

Irrationalität von Zahlen

Aufgabe 7

Sei x eine rationale Zahl. Beweise durch Widerspruch, dass dann die Summe $x + \sqrt{2}$ irrational ist.

Annahme: $x + \sqrt{2}$ ist

\Rightarrow Es gibt $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, so dass $x + \sqrt{2} =$

Drücke $\sqrt{2}$ durch m, n, x aus: $\sqrt{2} =$

x ist rational \Rightarrow Es gibt $r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}$, so dass $x =$

Drücke $\sqrt{2}$ durch m, n, r, s aus: $\sqrt{2} =$

$\Rightarrow \sqrt{2}$ ist



\Rightarrow Die Annahme war

Also ist $x + \sqrt{2}$

□

Aufgabe 8

Sei x eine rationale Zahl, $x \neq 0$. Beweise durch Widerspruch, dass dann das Produkt $x \cdot \sqrt{2}$ irrational ist.

Schreibe die Annahme auf, dann die Folgerungen aus der Annahme und schließlich die falsche Aussage, die aus der Annahme folgt.

Aufgabe 9

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{2}^n$ irrational, für welche rational?

Hinweis: Unterscheide die Fälle n gerade und n ungerade. Schreibe $n = 2k$ bzw. $n = 2k + 1$ und vereinfache die Ausdrücke $\sqrt{2}^{2k}$ bzw. $\sqrt{2}^{2k+1}$.