Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 10

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Trage „w“ oder „f“ ein.

Aussage	w/f
Die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{5n}{2+n}$ konvergiert gegen $a = \dfrac{5}{2}$.	
Die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{5n}{2+n}$ konvergiert gegen $a = 5$.	
Eine Folge (a_n) ist konvergent gegen a, wenn es zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\lvert a_N - a\rvert < \varepsilon$.	
Eine Folge (a_n) ist konvergent gegen a, wenn es zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ für alle $n > N$.	
Jede monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist, ist konvergent.	
Jede monoton wachsende Folge, die nach unten beschränkt ist, ist konvergent.	
Die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n}{1000}$ ist nach oben beschränkt.	
Die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n}{1000}$ ist nach unten beschränkt.	
Es gilt $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.	
Die Euler-Zahl e ist irrational.	
Für die Euler-Zahl gilt $\mathrm{e} = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{1\,000!}$.	
Konvergiert die Folge (a_n) gegen a, dann konvergiert die Folge $(4a_n)$ gegen $4a$.	

Aufgabe 11

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+5}$. Es soll bewiesen werden, dass (a_n) gegen $a = 1$ konvergiert.

a) Berechne $|a_n - 1|$. $\qquad |a_n - 1| = \boxed{}$.

b) Gib ein N an, so dass $|a_n - 1| < 0{,}1$ für $n > N$ gilt: $\qquad N = \boxed{}$

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel, so dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N$ gilt: $\qquad N \geq \boxed{}$

Dadurch ist bewiesen, dass (a_n) gegen $a = 1$ konvergiert.

Aufgabe 12

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = 1 + \frac{54}{100} + \frac{54}{10^4} + \frac{54}{10^6} + \ldots + \frac{54}{10^{2n}}$

a) Gib a_1, a_2, a_3 in Dezimaldarstellung an.

$a_1 =$ ☐ , $a_2 =$ ☐ , $a_3 =$ ☐ .

b) Gib eine untere Schranke M für (a_n) an, d.h. eine Zahl M, so dass $a_n \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $M =$ ☐

c) Gib eine obere Schranke M für (a_n) an, d.h. eine Zahl M, so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $M =$ ☐

d) Berechne die Differenz $a_{n+1} - a_n$. $a_{n+1} - a_n =$ ☐ .

Welche Eigenschaft von (a_n) folgt hieraus? (a_n) ist ☐ .

e) Begründe, warum (a_n) konvergent ist.

☐

f) Gib den Grenzwert a von (a_n) in Dezimaldarstellung an, $a =$ ☐ .

g) Gib den Grenzwert a von (a_n) als gekürzten Bruch an. $a =$ ☐ .

Aufgabe 13

In dieser Aufgabe dreht sich alles um monoton fallende Funktionen.

a) Sei (a_n) eine monoton fallende Folge. Zeige, dass (a_n) nach oben beschränkt ist, durch Angabe einer Zahl M, so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $M =$ ☐ .

b) Gib ein Beispiel für eine monoton fallende Folge (a_n) an, die nicht nach unten beschränkt ist. $a_n =$ ☐ .

c) Gib ein Beispiel für eine monoton fallende Folge (a_n) an, die eine Nullfolge ist. $a_n =$ ☐ .

d) Gib eine monoton fallende Folge (a_n) an, so dass $a_n \geq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, aber nicht $a_n \geq 5{,}1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $a_n =$ ☐ .