Die Euler-Zahl e

Erinnerungen: 1) Weg des Achill

$$s_n \;=\; 10\Big(1+\frac{1}{2}+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+\ldots+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big) \;=\; 20-10\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \;\leq\; 20.$$

Daraus folgt

$$1+\frac{1}{2}+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+\ldots+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \;\leq\; \boxed{} \quad \text{für jedes } n\in\mathbb{N}. \qquad (1)$$

2) Für $n \in \mathbb{N}$ oder $n = 0$ ist die Fakultät von n definiert durch

$$n! := n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1, \quad 0! := 1, \quad 1! := 1.$$

Z.B. $6! = \boxed{}$

Aufgabe 9

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$

a) Gib die Formel für a_{n+1} an: $a_{n+1} = \boxed{}$

b) Berechne die Differenz: $a_{n+1} - a_n = \boxed{}$

c) Trage ein: „J“ für Ja, „N“ für Nein.

(a_n) ist monoton wachsend	(a_n) ist monoton fallend

d) Nun soll bewiesen werden, dass (a_n) nach oben beschränkt ist.

d₁) Gib an, durch welche Zweierpotenz $n!$ nach unten abgeschätzt werden kann.

$$n! = \underbrace{n}_{\geq 2}\cdot\underbrace{(n-1)}_{\geq 2}\cdot\underbrace{(n-2)}_{\geq 2}\cdots\underbrace{3}_{\geq 2}\cdot\underbrace{2}_{=2}\cdot 1 \;\geq\; 2^{\boxed{}} \quad \text{für } n \geq 1.$$

d₂) Aus der letzten Teilaufgabe folgt

$$\frac{1}{n!} \;\leq\; \boxed{} \quad \text{für } n \geq 1.$$

d$_3$) Verwende die Abschätzung aus der letzten Teilaufgabe und die Ungleichung (1), um eine Zahl M zu bestimmen, so dass $a_n \leq M$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$a_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$\overset{d_2)}{\leq} 1 + \boxed{}$$

$$\overset{(1)}{\leq} 1 + \boxed{} = \boxed{}$$

Also gilt $a_n \leq \boxed{}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hauptsatz über monotone Folgen $\Rightarrow$ $\boxed{}$.

Man schreibt $\mathrm{e} := \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \right) = 2{,}718\ldots$ **(Eulersche Zahl)**.

Zusatzaufgabe 2

Sei x mit $0 < x < 1$ fest gewählt. Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Beweise, dass (a_n) konvergiert.

Tipp: Benütze die in der vorigen Aufgabe bewiesene Beschränktheit.

Zusatzaufgabe 3

Sei (a_n) eine Folge mit positiven Folgengliedern $a_n \geq 0$ und mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Folge (s_n) sei definiert durch

$$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Beweise, dass (s_n) konvergiert.