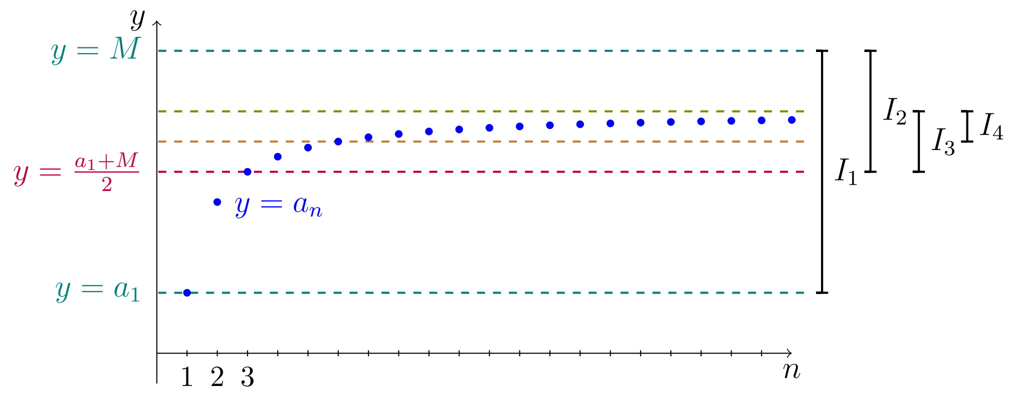
Der Hauptsatz über monotone Folgen

Satz: Eine Folge (a_n), die monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist konvergent.

Beweis:
(a_n) ist nach oben beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt eine Zahl $M \geq 0$, so dass $\boxed{}$ für $n \in \mathbb{N}$.



Nun werden Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ konstruiert, so dass in jedem Intervall unendlich viele Folgenglieder a_n liegen und nur endlich viele Folgenglieder außerhalb, und dass die Intervalle eine Intervallschachtelung bilden.

Schritt 0: Alle Folgenglieder a_n liegen in dem Intervall $I_1 = \boxed{[\quad ; \quad]}$

Schritt 1: Die Mitte des Intervalls I_1 ist durch $m_1 = \boxed{}$ gegeben.

Fall 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < m_1$.
Dann liegen alle Folgenglieder a_n im Intervall $\boxed{[\quad ; \quad]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_2 und fahre fort mit Schritt 2.

Fall 2: Es gibt eine Zahl N, so dass $a_N \geq m_1$.
Da (a_n) monoton wächst, folgt, dass dann $\boxed{}$ für alle $n \geq N$ gilt.

Dann liegen alle Folgenglieder a_n mit Index $n \geq N$ im Intervall $\boxed{[\quad ; \quad]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_2 und fahre fort mit Schritt 2.

Schritt 2: Wir wissen, dass $a_n \in I_2$ für $n \geq N_1$ mit einer geeigneten Zahl $N_1 \in \mathbb{N}$ gilt.
Sei $I_2 = [c_2, d_2]$, und m_2 bezeichne die Mitte des Intervalls m_2.

Fall 1: Für alle $n \geq N_1$ gilt $\boxed{}$

Dann liegen alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N_1$ im Intervall $\boxed{[\quad ; \quad]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_3 und fahre fort mit Schritt 3.

Fall 2: Es gibt eine Zahl N, so dass $\boxed{}$ für $n \geq N$.

Dann liegen alle Folgenglieder a_n mit Index $n \geq N$ im Intervall $\boxed{[\quad ; \quad]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_3 und fahre fort mit Schritt 3.

So fortfahrend erhalten wir Intervalle $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots$.

Da sich die Intervalllänge in jedem Schritt $\boxed{}$,

bilden die Intervalllängen eine $\boxed{}$.

Außerdem gilt $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$.

Daher bilden die Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ eine $\boxed{}$.

Die einzige reelle Zahl a, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge (a_n).