Konvergenz

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+3}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

a) Berechne $|a_n - 1|$.

b) Bestimme ein N so, dass $|a_n - 1| < \dfrac{1}{1000}$ für alle $n > N$ gilt.

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für N, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Durch die Lösung von Teil c) ist bewiesen, dass (a_n) gegen $a = 1$ konvergiert.

Aufgabe 4

Es soll bewiesen werden, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{3n^2-1}{n^2+2}$ gegen $a = 3$ konvergiert.

a) Berechne $|a_n - 3|$.

b) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für N, so dass $|a_n - 3| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Durch die Lösung von Teil b) ist bewiesen, dass (a_n) gegen $a = 3$ konvergiert.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^3+n^2}{5n^3+5n^2+3}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{5}$.

a) Berechne $|a_n - \frac{1}{5}|$.

b) Schätze $|a_n - \frac{1}{5}|$ durch einen einfacheren Term nach oben ab. Im Nenner sollte keine Summe stehen bleiben.

c) Bestimme ein N so, dass $|a_n - \frac{1}{5}| < \dfrac{1}{1000}$ für alle $n > N$ gilt.

d) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für N, so dass $|a_n - \frac{1}{5}| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Durch die Lösung von Teil d) hast Du bewiesen, dass (a_n) gegen $a = \frac{1}{5}$ konvergiert.

Zusatzaufgabe 1

Es sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert

a) Beweise, dass dann die Folge $(1 - a_n)$ gegen $1 - a$ konvergiert.

b) Beweise, dass dann die Folge $(5a_n)$ gegen $5a$ konvergiert.