

## Nullfolgen

### Aufgabe 4

Die Folge  $(a_n)$  ist gegeben durch  $a_n = \frac{1}{2 + \sqrt{n}}$ . Behauptung:  $(a_n)$  ist eine Nullfolge. Dies soll hier bewiesen werden.

a) Gib ein  $N$  an, so dass  $|a_n| < 0,01$  für  $n > N$  gilt:

$$N = \boxed{\phantom{000}}$$

b) Gib ein  $N$  an, so dass  $|a_n| < 0,0001$  für  $n > N$  gilt:

$$N = \boxed{\phantom{000}}$$

c) Gib ein  $N$  an, so dass  $|a_n| < 0,01$  und  $|a_n| < 0,0001$  für  $n > N$  gilt:

$$N = \boxed{\phantom{000}}$$

d) Es sei ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für  $N$ , so dass  $|a_n| < \varepsilon$  für  $n > N$  gilt:

$$N \geq \boxed{\phantom{000}}$$

### Aufgabe 5

Untersuche, ob die angegebene Folge eine Nullfolge ist. Begründe Deine Antwort. Das heißt, im Fall einer Nullfolge ist für beliebig vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  anzugeben, wie  $N \in \mathbb{N}$  zu wählen ist, dass  $|a_n| < \varepsilon$  für alle  $n > N$  gilt. Im anderen Fall ist anzugeben, warum die Definition einer Nullfolge nicht erfüllt ist.

a)  $(a_n)$  mit  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}$ ,  $a_4 = 0$ ,  $a_5 = \frac{1}{3}, \dots$ , oder allgemein

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

b)  $(a_n)$  mit  $a_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

c)  $(a_n)$  mit  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,

d)  $(a_n)$  mit  $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

e)  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ .

### Zusatzaufgabe 1

a) Sei  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine weitere Folge mit der Eigenschaft  $|b_n| \leq |a_n|$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Beweise, dass dann  $(b_n)$  eine Nullfolge ist.

b) Sei  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine weitere Folge mit der Eigenschaft  $|b_n| \leq 3|a_n|$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Beweise, dass dann  $(b_n)$  eine Nullfolge ist.

c) Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Nullfolgen. Beweise, dass dann auch die Summenfolge  $(c_n)$  mit  $c_n = a_n + b_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Nullfolge ist.