Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 7

Ein Gummiball – der Radius bleibt unberücksichtigt – fällt von einem $108\,$m hohen Turm lotrecht auf den Boden und springt nach jedem Aufprall genau $\frac{1}{10}$ seiner vorherigen Fallhöhe wieder hoch.

a) Wie hoch springt der Ball nach dem 4. Aufprall? $h_4 = \boxed{}$ m

b) Wie lang ist der Weg, den der Ball bis zum 5. Aufprall zurücklegt (In Dezimaldarstellung)?

$s_5 = \boxed{}$ m

c) Löse die Aufgabenteile a) und b) für eine beliebige Turmhöhe von $H\,$m und fasse das jeweilige Ergebnis soweit wie möglich zusammen.

$h_4 = \boxed{}$ m, $s_5 = \boxed{}$ m.

Aufgabe 8

Gegeben ist die Folge (b_n) durch die rekursive Formel

$$b_1 = 1 \quad \text{und} \quad b_{n+1} = b_n + \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

oder anders geschrieben

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

Gesucht ist nun eine explizite Darstellung von b_{n+1}. Fülle dazu den Lückentext aus und gib die Formel an, die damit hergeleitet wird.

Lösung:

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{5^{n-1}} + \frac{1}{5^n} \quad \Big| \cdot \boxed{}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{} \cdot b_{n+1} = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \cdots + \boxed{} + \boxed{}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{} \cdot b_{n+1} - b_{n+1} = \boxed{}$$

$$\Rightarrow \quad b_{n+1} = \boxed{}$$

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 9

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = 3 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass a_n für große n der Zahl $a = 3$ beliebig nahe kommt.

a) Zeichne die Punkte (n, a_n) mit blauer Farbe ins Koordinatensystem ein. Berechne hierzu a_1, a_4, a_{16} und a_{25} in Dezimaldarstellung und zeichne zunächst die zu diesen Folgengliedern gehörenden Punkte ein.

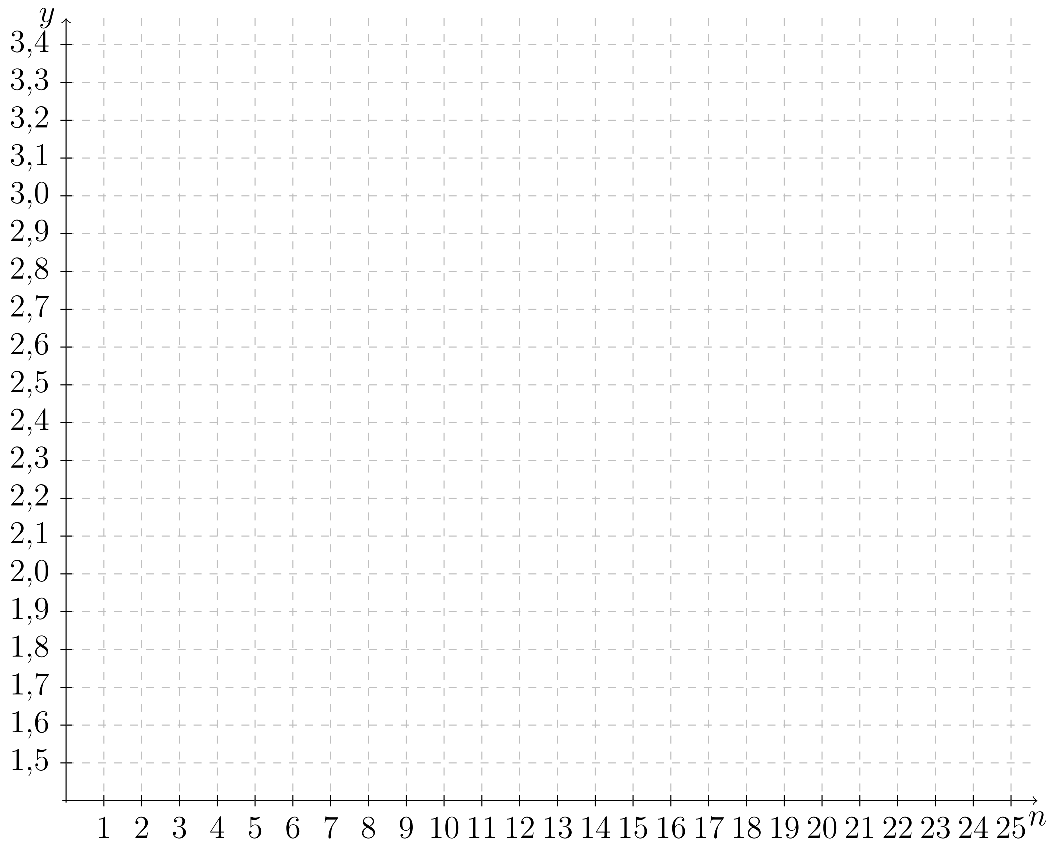
b) Zeichne den ε-Streifen für $a = 3$ und $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ein (mit roter Farbe).

c) Gib eine natürliche Zahl n_0 an, so dass die Punkte für $n > n_0$ im $\frac{1}{4}$-Streifen liegen.

d) Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Gib eine reelle Zahl N in Abhängigkeit von ε an, so dass für $n > N$ gilt: $|3 - a_n| < \varepsilon$.

Lösung: a) $a_1 = \boxed{}$, $a_4 = \boxed{}$, $a_{16} = \boxed{}$, $a_{25} = \boxed{}$.

b)



c) a_n liegt im $\frac{1}{4}$-Streifen für $n > n_0 = \boxed{}$

d) Es gilt $|3 - a_n| = 3 - a_n < \varepsilon$ für $n > N = \boxed{}$