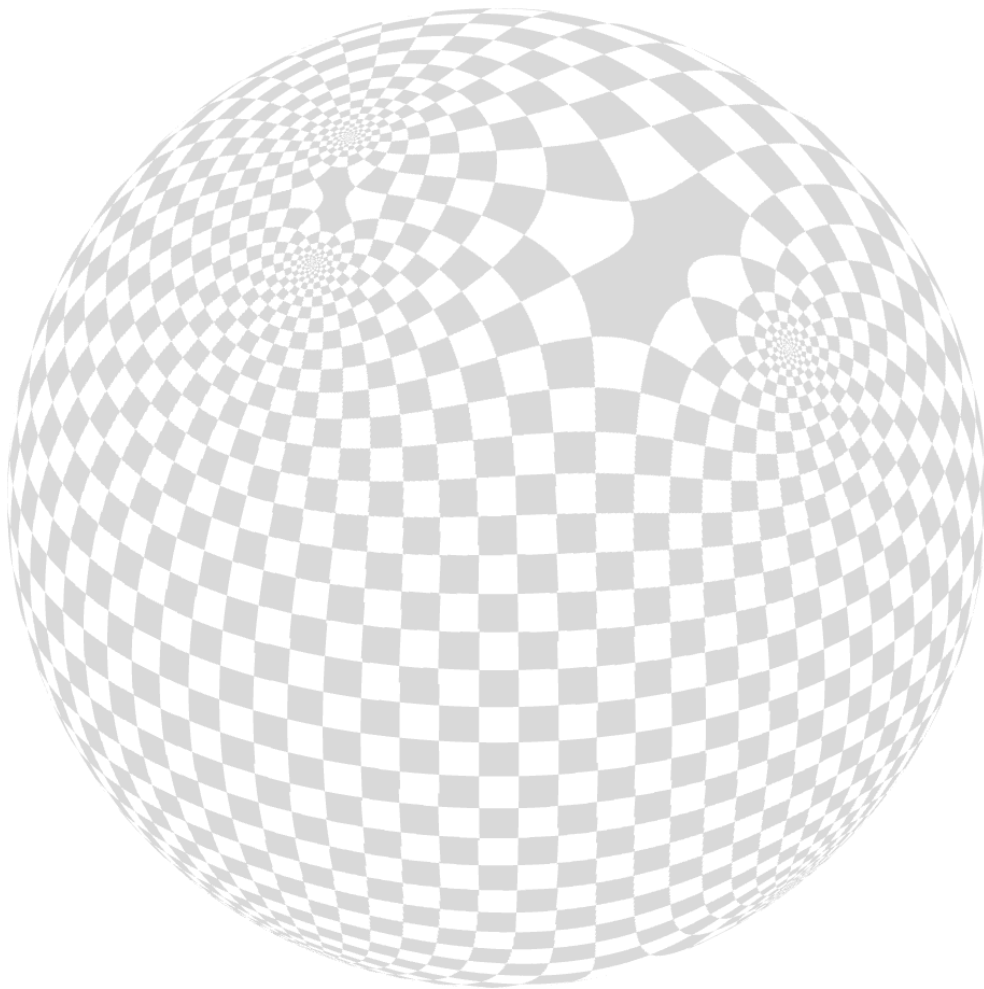


Prof. Dr. Jens Wirth  
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung  
Universität Stuttgart

# Höhere Analysis





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>7</b>
1.1	Komplexe Zahlen, Riemannsche Zahlenkugel und elementare Funktionen	7
1.2	Potenzreihen und komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	10
1.3	Kurvenintegrale . . . . .	18
1.4	Ganze Funktionen . . . . .	33
1.5	Laurentreihen und Singularitäten . . . . .	34
1.6	Analytische Fortsetzungen . . . . .	39
1.7	Residuensatz und Integralberechnungen . . . . .	46
<b>2</b>	<b>Fourierreihen und -integrale</b>	<b>61</b>
2.1	Fourierreihen . . . . .	61
2.2	Harmonische Funktionen und das Poisson-Integral . . . . .	63
2.3	Punktweise Konvergenz und Summierbarkeit . . . . .	68
2.4	Quadratintegrierbare Funktionen und die Parseval-Identität . . . . .	74
2.5	Laplace- und Fouriertransformation . . . . .	76
2.6	Harmonische Fortsetzung und Poissonintegral . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Distributionen</b>	<b>91</b>
3.1	Testfunktionenräume und Distributionen . . . . .	91
3.2	Rechnen mit Distributionen . . . . .	97
3.3	Fouriertransformation im Schwartzraum . . . . .	107

## Literatur (-empfehlungen)

- [1] E. Wegert, *Visual Complex Functions*, Springer Basel 2012
- [2] H.A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*, Oxford University Press 2011
- [3] E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press 1939
- [4] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теорий комплексного переменного*, Наука, Москва 1965
- [5] И.И. Привалов, *Введение в теорию функций комплексного переменного*, Москва, 1954
- [6] М.А. Евграфов, *Аналитические функции*, Москва, 1991
- [7] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Москва, 1988
- [8] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966
- [9] L. Hörmander, *The Analysis of Partial Differential Equations*, Vol. I, Springer Basel 1990

## Zeitplan Höhere Analysis

Woche	Themen	
1	Potenzreihen, komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy–Riemann-Gleichungen	1.1, 1.2
2	Offene Abbildungen und lokale Invertierbarkeit, Kurvenintegrale, Formel von Newton–Leibniz	1.2 1.3
3	Integralsatz von Cauchy, Cauchysche Integralformel, Mittelwertsatz und Maximumsprinzip	1.3
4	Äquivalenzsatz, Konstruktion von Stammfunktionen, Satz von Morera, Ganze Funktionen, Fundamentalsatz der Algebra	1.3, 1.4
5	Singularitäten, Hebbarkeitssatz, Laurentreihen, Residuen	1.5
6	Analytische Fortsetzungen, Monodromiesatz, Riemannsches Flächen	1.6
7	Integralberechnung mit Residuensatz, Satz von Rouché	1.7
8	Partialbruchzerlegungen mit Residuensatz, Fourier- und Laurentreihen, Euler–Fouriersche Formeln	1.7 2.1
9	Harmonische Funktionen und Poissonintegral, Punktweise Konvergenz von Fourierreihen, Summierbarkeit	2.2 2.3
10	periodische $L^2$ -Funktionen, Orthogonalbasen, Parseval-Identität	2.4
11	Laplace- und Fouriertransformation, Poissonintegral zur Fourierinversion	2.5 2.6
12	Testfunktionen und Distributionen, Beispiele	3.1
13	Rechnen mit Distributionen, Kompakt getragene Distributionen, Fouriertransformation	3.2
14	Temperierte Distributionen und Fouriertransformation	3.3



# 1 Funktionentheorie

## 1.1 Komplexe Zahlen, Riemannsche Zahlenkugel und elementare Funktionen

**1.1.1.** Wir erinnern an die Definition der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(i), \quad (1.1.1-A)$$

die Bezeichnungen  $x := \operatorname{Re} z$ ,  $y := \operatorname{Im} z$  und die grundlegenden auf  $i^2 = -1$  basierenden Rechenregeln für komplexe Zahlen. Mit der Notation  $\bar{z} := x - iy$  für die zu  $z = x + iy$  komplex konjugierte Zahl folgt damit  $z\bar{z} = x^2 + y^2 =: |z|^2$  und damit  $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ .

Komplexe Zahlen können sinnvoll mit Punkten der Ebene  $\mathbb{R}^2$  identifiziert werden. Dann entspricht  $|z|$  dem Abstand des Punktes  $(x, y)$  zum Ursprung. Weiter definieren wir  $\arg z$  als den Winkel von der positiven reellen Achse zum Strahl durch  $(x, y)$ .

Für zwei komplexe Zahlen  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  gilt damit

$$z + w = (x + u) + i(y + v), \quad zw = (xu - yv) + i(xv + yu) \quad (1.1.1-B)$$

sowie (als Konsequenz der Additionstheoreme der Winkelfunktionen)

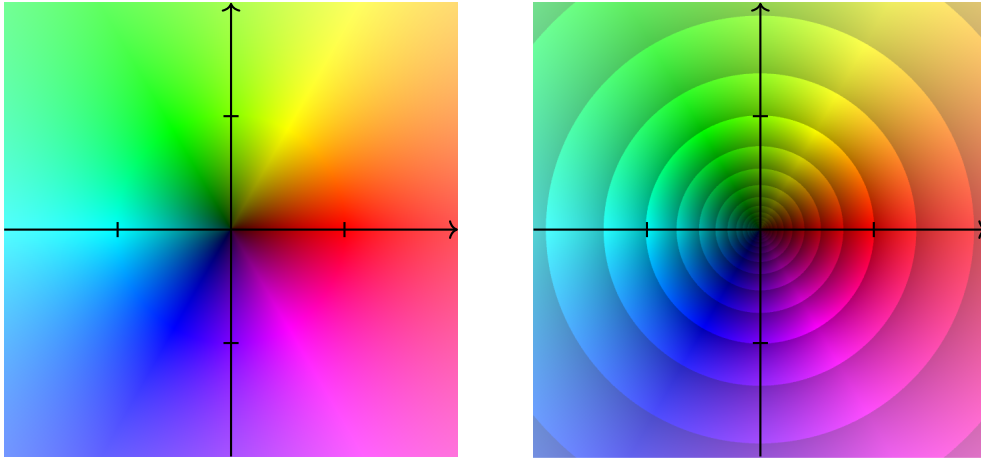
$$|zw| = |z||w|, \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}. \quad (1.1.1-C)$$

Darüberhinaus hat sich die Polarform

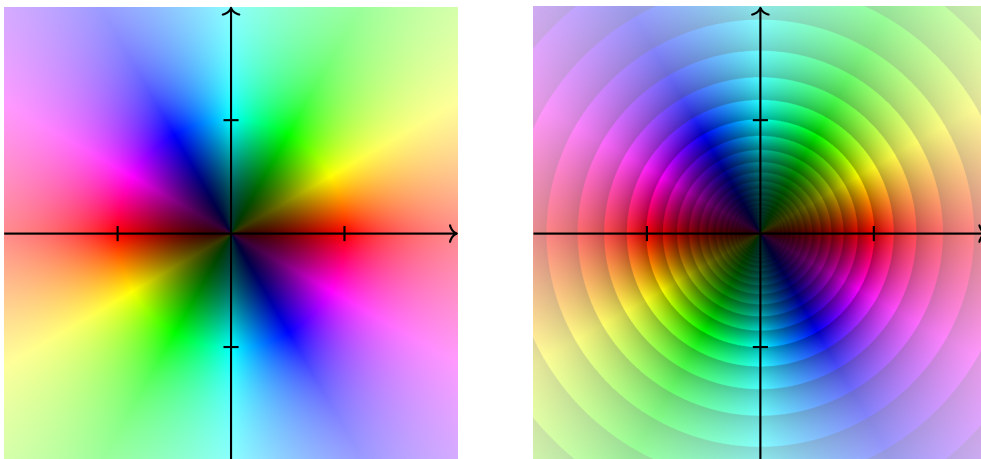
$$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.1.1-D)$$

für  $\varphi = \arg z$  als Notation für komplexe Zahlen eingebürgert, die erst durch die nachfolgend nochmals ausführlich diskutierte komplexe Exponentialfunktion sinnvoll verstanden werden kann.

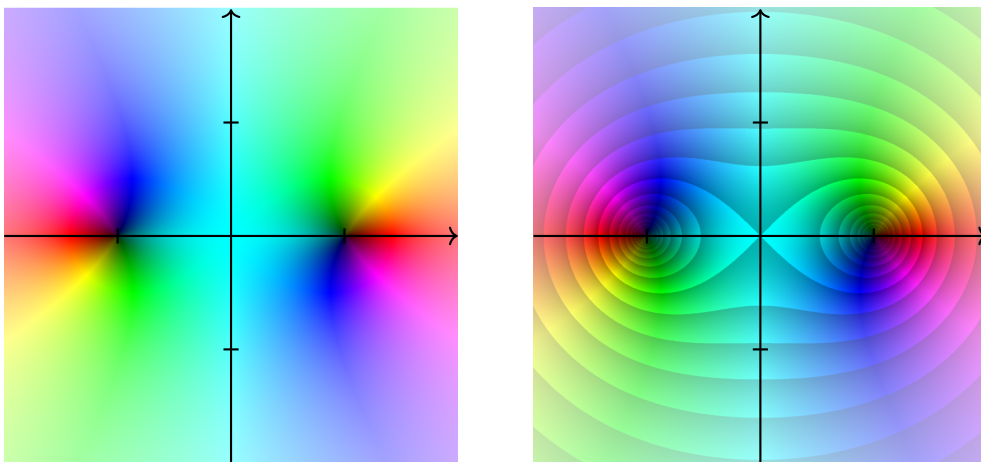
**1.1.2.** Zur Darstellung komplexer Zahlen nutzen wir im weiteren Verlauf Farbwerte. Diese ist in nachfolgendem Bild angegeben und liefert eine eindeutige Festlegung jeder Zahl  $z \in \mathbb{C}$  durch eine Farbe  $\arg z$  und eine Helligkeit  $|z|$ . Das Bild auf der rechten Seite hilft dabei zusätzlich Beträge besser abzulesen. Es ist sinnvoll, die Argumente  $\arg z$  und den Logarithmus des Betrags  $\ln |z|$  äquidistant einzuteilen.



Besonders nützlich ist diese Farbcodierung bei der Darstellung von komplexen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dabei wird jeder Punkt der Zahlenebene mit der Farbe des zugehörigen Funktionswertes eingefärbt. Nachfolgend dargestellt sind auf diese Weise die Polynomfunktionen  $f(z) = z^2$  und  $f(z) = (z - 1)(z + 1)$ .



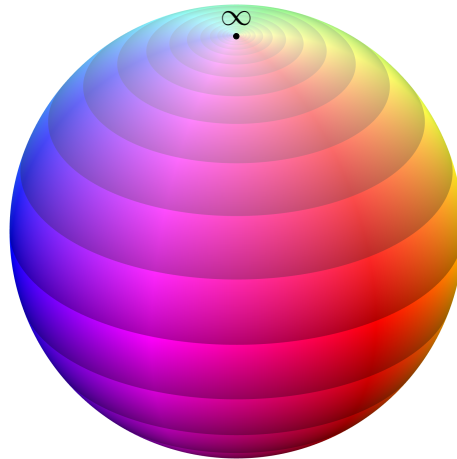
$$f(z) = z^2$$



$$f(z) = (z - 1)(z + 1)$$



**1.1.3.** Neben der komplexen Zahlenebene bietet sich oft die Nutzung der Riemannschen Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  an. Dass es sich tatsächlich um eine sinnvolle Kugel handelt, ist an folgendem linken Bild ersichtlich. Während der Südpol der Kugel mit dem Ursprung  $0 \in \mathbb{C}$  identifiziert wird und in einer Umgebung der Null die stereographische Projektion eine (reell differenzierbare) Karte bildet, ist eine Umgebung des Nordpols durch  $z^{-1}$  beschrieben.



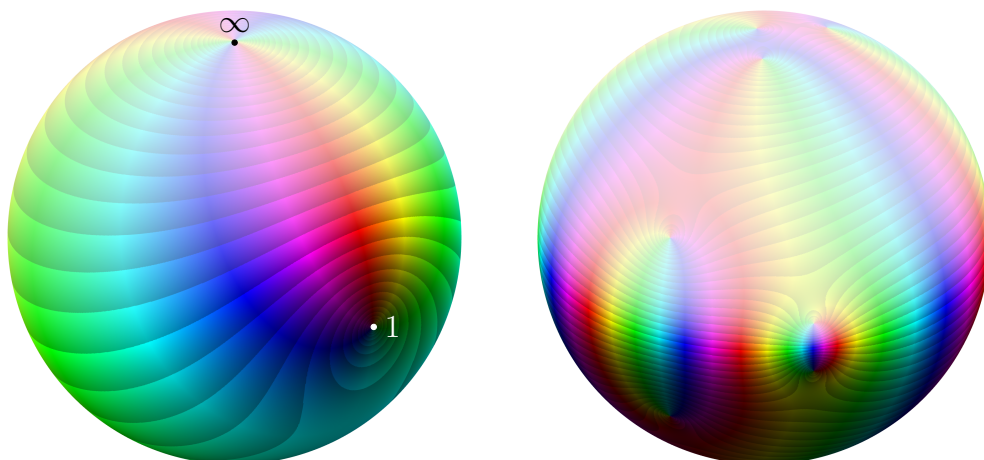
Die stereographische Projektion kann in Polarkoordinaten und außerhalb des Nordpols als

$$\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{S}^2 \ni \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \mapsto z = \tan \left( \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\phi} \in \mathbb{C} \quad (1.1.3-A)$$

geschrieben werden, wie üblich haben wir auf der Kugel  $\mathbb{S}^3$  die sphärischen Koordinaten  $\phi \in [0, 2\pi)$  und  $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  genutzt. Damit können Funktionen

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad (1.1.3-B)$$

als Bilder auf der Kugeloberfläche gezeichnet werden. Nachfolgend sieht man links die Polynomfunktion  $f(z) = z(z-1)$  und rechts eine Funktion der Form  $f(z) = \prod_{j=1}^{10} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha_j}z}$  für 10 zufällig gewählte Nullstellen  $\alpha_j \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .



**1.1.4.** Die einfachsten uns interessierenden Funktionen sind durch Polynomfunktionen

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (1.1.4-A)$$

mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  gegeben. Wir sagen, das Polynom  $p$  besitzt den Grad

$$\deg p := n, \quad (1.1.4-B)$$

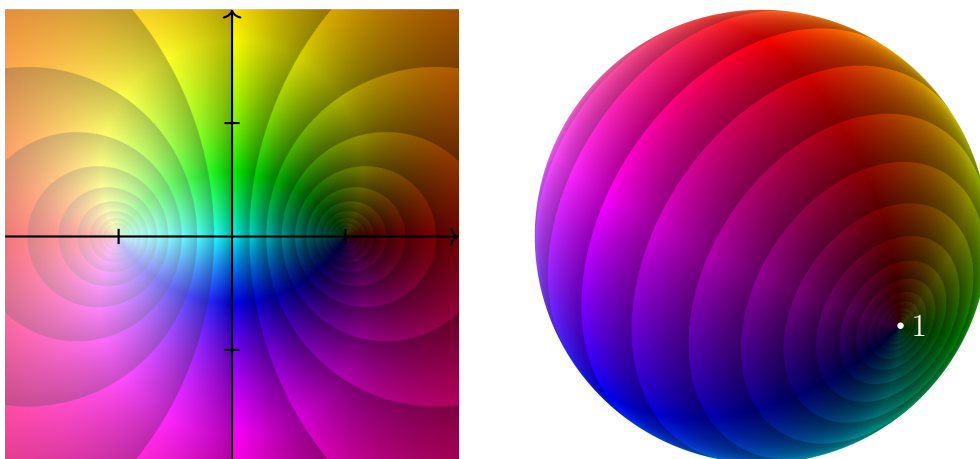
falls in dieser Darstellung zusätzlich der Koeffizient  $a_n \neq 0$  erfüllt. Dem Nullpolynom  $p(z) = 0$  weisen wir den Grad  $-\infty$  zu.

Ebenso interessant sind rationale Funktionen

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad q(z) \neq 0, \quad (1.1.4-C)$$

als Quotienten zweier Polynomfunktionen  $p, q$  mit  $\deg q \geq 0$ . Ordnet man den Nullstellen  $z$  der Polynomfunktion  $q$  den Funktionswert  $f(z) = \infty$  zu, so ergeben sich Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Diese kann man zu einer stetigen Funktion  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  fortsetzen.

Nachfolgend dargestellt ist die rationale Funktion  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$  sowohl auf einem Ausschnitt der Ebene als auch auf der Riemannschen Zahlenkugel.



## 1.2 Potenzreihen und komplexe Differenzierbarkeit

**1.2.1 (Potenzreihen).** Potenzreihen zum Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  sind Reihen der speziellen Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (1.2.1-A)$$

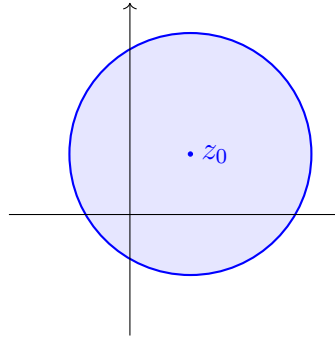
mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ . Das Konvergenzverhalten solcher Reihen hängt von der Wahl des Parameters  $z \in \mathbb{C}$  ab. Um dies zu diskutieren, nutzen wir das Wurzelkriterium und erhalten absolute Konvergenz, falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} = |z - z_0| \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad (1.2.1-B)$$

und damit

$$|z - z_0| < \rho := \begin{cases} +\infty, & \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0, \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.2.1-C)$$

gilt. Ebenso liefert das Wurzelkriterium Divergenz, falls  $|z - z_0| > \rho$  gilt. Über das Konvergenzverhalten auf dem Rand der Kreisscheibe sagt das Wurzelkriterium nichts aus, dies ist im Einzelfall anders zu untersuchen.



Potenzreihen konvergieren also entweder auf ganz  $\mathbb{C}$ , in einer Kreisscheibe (mit potentiell interessantem Verhalten auf dem Rand) oder nur im Entwicklungspunkt. Die durch (1.2.1-C) bestimmte Zahl  $\rho \in [0, +\infty]$  wird als *Konvergenzradius* der *Potenzreihe* (1.2.1-A) bezeichnet. Formel (1.2.1-C) ist auch als Formel von Hadamard<sup>1</sup> bekannt.

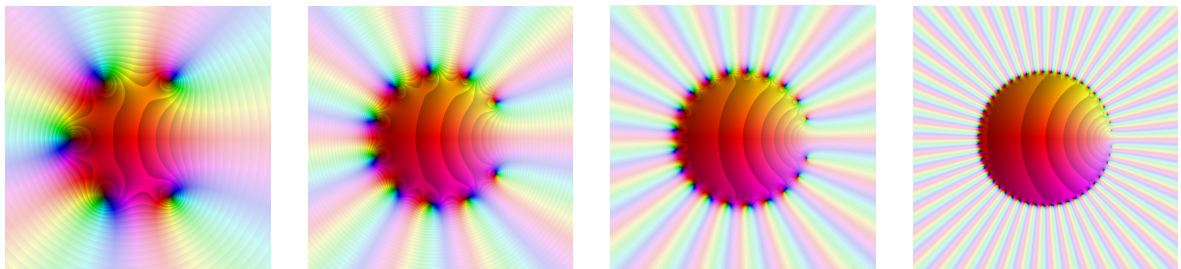
**1.2.2.** Angenommen, der Konvergenzradius  $\rho$  ist positiv. Dann bestimmt die Potenzreihe (1.2.1-A) auf der *Kreisscheibe*  $\mathbb{B}_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$  eine Funktion

$$f : \mathbb{B}_\rho(z_0) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1.2.2-A)$$

die wir als nächstes genauer untersuchen wollen. Wir betrachten zuerst ein (explizites, aber durchaus bedeutendes) Beispiel. Die *geometrische Reihe*, also die Reihe in der alle Koeffizienten  $a_k = 1$  erfüllen, besitzt den Konvergenzradius 1 und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1, \quad (1.2.2-B)$$

während für  $|z| \geq 1$  die Glieder der Reihe keine Nullfolge bilden. Bilder der ersten Partialsummen mit 5, 10, 20 und 50 als höchstem Exponenten sind nachfolgend dargestellt.

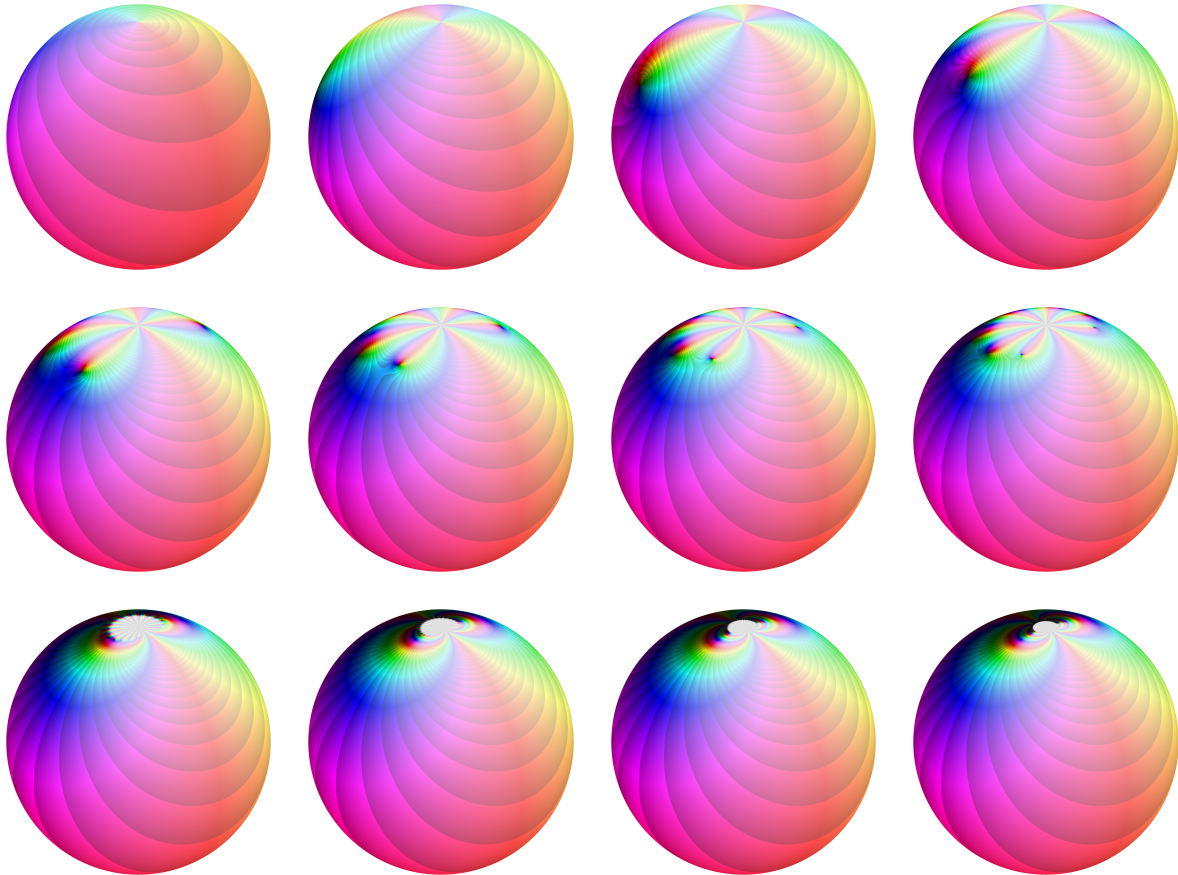


<sup>1</sup>JACQUES HADAMARD, 1865–1963

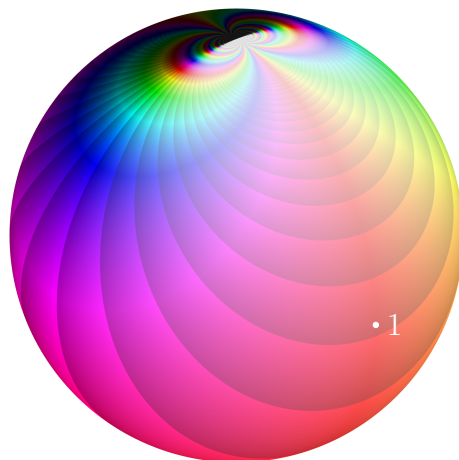
Als zweites (explizites und noch bedeutenderes) Beispiel betrachten wir die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad (1.2.2-C)$$

die für jedes  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert und die *komplexe Exponentialfunktion* definiert. Nachfolgend dargestellt sind die ersten Partialsummen



sowie die Exponentialfunktion auf der Riemannschen Zahlenkugel (ohne den Punkt  $\infty$ ).



**1.2.3 (Komplexe Differenzierbarkeit).** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Wir nennen die Funktion  $f$  in  $z_\bullet \in U$  *komplex differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(z_\bullet) := \lim_{z \rightarrow z_\bullet} \frac{f(z) - f(z_\bullet)}{z - z_\bullet} \quad (1.2.3-A)$$

in  $\mathbb{C}$  existiert. Ist  $f$  in jedem Punkt  $z \in U$  differenzierbar, so bezeichnet  $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$  die (komplexe) *Ableitung* der Funktion  $f$ . Für diese nutzt man auch die Notation  $\frac{d}{dz}f(z)$ .

Diese Definition der komplexen Differenzierbarkeit stimmt (bis auf das Ersetzen von  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{C}$ ) mit der Definition der reellen Differenzierbarkeit für Funktionen einer reellen Variablen überein. Damit übertragen sich insbesondere alle Differentiationsregeln vom Reellen ins Komplexe. Es gelten also

$$\begin{aligned} (f + g)'(z) &= f'(z) + g'(z), \\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\ (f \circ g)'(z) &= f'(g(z))g'(z) \end{aligned} \quad (1.2.3-B)$$

und Summen, Produkte und Verkettungen komplex differenzierbarer Funktionen sind wiederum komplex differenzierbar.

☞ **1.2.4 Lemma.** *Jede durch eine Potenzreihe (1.2.1-A) definierte Funktion ist im Inneren des Konvergenzkreises komplex differenzierbar.*

*Beweis.* Der Vollständigkeit halber geben wir einen neuen Beweis, die Aussage selbst wurde auch schon in Analysis 2 gezeigt. Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho \quad (1.2.4-A)$$

für  $\rho$  aus (1.2.1-C). Wir zeigen, dass die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad (1.2.4-B)$$

die Ableitung von  $f$  beschreibt. Zuerst bemerken wir dazu, dass der Konvergenzradius dieser Reihe wegen

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \right) \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad (1.2.4-C)$$

ebenso durch  $\rho$  gegeben ist und damit  $g : \mathbb{B}_\rho(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  wohldefiniert ist. Betrachtet man nun zu  $z, z_\bullet \in \mathbb{B}_\rho(z_0)$  den Differenzenquotienten und subtrahiert  $g(z_\bullet)$ , so ergibt sich

$$\frac{f(z) - f(z_\bullet)}{z - z_\bullet} - g(z_\bullet) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{(z - z_0)^k - (z_\bullet - z_0)^k}{z - z_\bullet} - k(z_\bullet - z_0)^{k-1} \right). \quad (1.2.4-D)$$

Den geklammerten Ausdruck können wir mit dem Binomischen Satz zu

$$\begin{aligned} & \frac{(z - z_\bullet + z_\bullet - z_0)^k - (z_\bullet - z_0)^k}{z - z_\bullet} - k(z_\bullet - z_0)^{k-1} \\ &= \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} (z - z_\bullet)^{j-1} (z_\bullet - z_0)^{k-j} \end{aligned} \quad (1.2.4-E)$$

vereinfachen und damit wegen

$$\binom{k}{j+2} = \frac{k!}{(k-j-2)!(j+2)!} \leq k(k-1) \frac{(k-2)!}{(k-2-j)!j!} = k(k-1) \binom{k-2}{j} \quad (1.2.4-F)$$

die obige Differenz durch

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - f(z_\bullet)}{z - z_\bullet} - g(z_\bullet) \right| &\leq |z - z_\bullet| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j+2} |z - z_\bullet|^j |z_\bullet - z_0|^{k-j-2} \\ &\leq |z - z_\bullet| \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) |a_k| \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} |z - z_\bullet|^j |z_\bullet - z_0|^{k-2-j} \quad (1.2.4-G) \\ &= |z - z_\bullet| \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) |a_k| (|z - z_\bullet| + |z_\bullet - z_0|)^{k-2} \end{aligned}$$

abschätzen. Die auftretende Reihe ist wiederum für  $|z - z_\bullet| + |z_\bullet - z_0| \leq r < \rho$  konvergent und kann für diese  $z$  durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) |a_k| (|z - z_\bullet| + |z_\bullet - z_0|)^{k-2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) |a_k| r^{k-2} =: M \quad (1.2.4-H)$$

majorisiert werden. Es gilt also

$$\left| \frac{f(z) - f(z_\bullet)}{z - z_\bullet} - g(z_\bullet) \right| \leq M |z - z_\bullet| \quad (1.2.4-I)$$

und mit  $z \rightarrow z_\bullet$  folgt die Behauptung.  $\square$

**✂ 1.2.5 Beispiel.** Potenzreihen erlauben es, viele aus der reellen Analysis bekannte Funktionen im Komplexen zu definieren. Neben der schon genannten Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad (1.2.5-A)$$

betrifft dies zum Beispiel

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad (1.2.5-B)$$

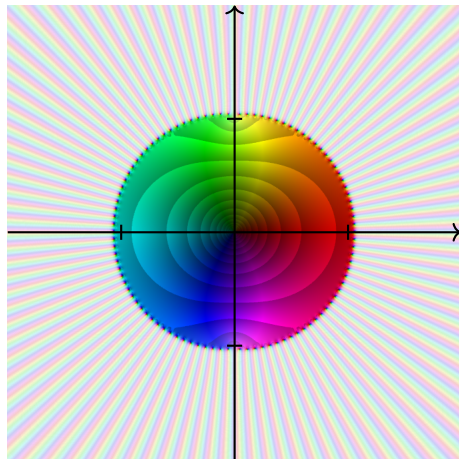
die ebenso für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergieren. Weitere wichtige Reihen sind

$$\arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}, \quad |z| < 1 \quad (1.2.5-C)$$

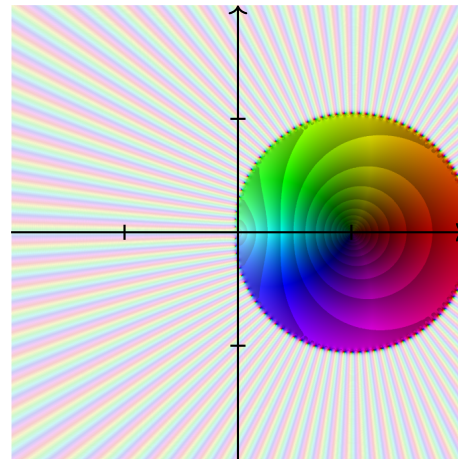
und

$$\log(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (z-1)^k, \quad |z-1| < 1 \quad (1.2.5-D)$$

die uns ebenso im Reellen schon begegnet sind. Alle diese Reihen definieren (beliebig oft) komplex differenzierbare Funktionen, deren komplexe Ableitungen im Inneren des Konvergenzkreises durch gliedweises Differenzieren bestimmt werden können.



Partialsomme von  $\arctan(z)$



Partialsomme von  $\log(z)$

**1.2.6.** Durch Potenzreihen dargestellte Funktionen haben bemerkenswerte Eigenschaften. So sind die Koeffizienten der Reihe eindeutig durch die Funktion bestimmt. Da wir nach Lemma 1.2.4 gliedweise komplex differenzieren können, impliziert

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (1.2.6-A)$$

für die komplexen Ableitungen von  $f$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n} \quad (1.2.6-B)$$

und damit folgt mit  $n = k$  und Auswertung im Entwicklungspunkt  $z_0$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (1.2.6-C)$$

Dies impliziert, dass wir Potenzreihen gliedweise vergleichen können. Es gilt für zwei konvergente Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \iff \forall_{k \in \mathbb{N}_0} a_k = b_k. \quad (1.2.6-D)$$

Nullstellen von durch Potenzreihen definierten Funktionen sind isoliert.

☞ **1.2.7 Lemma.** Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (1.2.7-A)$$

auf der Kreisscheibe  $\mathbb{B}_\rho(z_0)$  konvergent. Dann gilt

- entweder  $f(z) = 0$  auf  $\mathbb{B}_\rho(z_0)$  (und damit  $a_k = 0$  für alle  $k$ );
- oder es gibt ein  $\delta > 0$ , so dass  $f(z) \neq 0$  für  $z \neq z_0$  und  $|z - z_0| < \delta$ .

*Beweis.* Angenommen,  $f$  ist nicht die Nullfunktion. Dann gibt es einen Anfangsindex  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $a_k = 0$  für  $k < m$  und  $a_m \neq 0$ . Wir können also  $f$  in der Umgebung von  $z_0$  als

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^k = (z - z_0)^m g(z) \quad (1.2.7-B)$$

mit der durch die angegebene Reihe bestimmten Funktion  $g$  schreiben. Da  $g(z_0) = a_m \neq 0$  ist, gibt es auf Grund der Stetigkeit von  $g$  eine Umgebung  $\mathbb{B}_\delta(z_0)$  auf der  $g(z) \neq 0$  gilt. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

✂ **Ergänzung.** Die Aussage impliziert, dass alle Mengen der Form  $\{z \in \mathbb{B}_\rho(z_0) \mid f(z) = w\}$  zu  $w \in \mathbb{C}$  entweder durch die gesamte Kreisscheibe gegeben sind oder eine diskrete Teilmenge bilden, die nur am Rand der Kreisscheibe Häufungspunkte besitzen kann.

**1.2.8.** Komplexe Funktionen  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  können auf natürliche Weise als reelle Funktionen  $\mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2$  aufgefasst werden. Dazu führen wir etwas Notation ein und setzen

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) + i \operatorname{Im} f(x + iy) \quad (1.2.8-A)$$

für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x + iy \in U$  und so dass  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  reellwertig sind. Dann impliziert komplexe Differenzierbarkeit die partielle Differenzierbarkeit der beiden Funktionen  $u$  und  $v$ . Dazu wählen wir in der Definition der Ableitung

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z + w) - f(z)}{w} \quad (1.2.8-B)$$

für  $w$  speziell Folgen aus der reellen beziehungsweise der imaginären Achse. Es existieren also

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, y) + iv(x + h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + h, y) - v(x, y)}{h} \quad (1.2.8-C) \\ &= \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z + ih) - f(z)}{ih} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, y + h) + iv(x, y + h) - u(x, y) - iv(x, y)}{ih} \quad (1.2.8-D) \\ &= -i \partial_y u(x, y) + \partial_y v(x, y). \end{aligned}$$

Da auf Grund der komplexen Differenzierbarkeit beide Grenzwerte übereinstimmen müssen, folgt insbesondere

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \quad \text{und} \quad \partial_x v(x, y) = -\partial_y u(x, y) \quad (1.2.8-E)$$

sowie die Darstellung der komplexen Ableitung durch die reellen partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x + iy) &= \frac{\partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y)}{2} + \frac{\partial_y v(x, y) - i \partial_y u(x, y)}{2} \quad (1.2.8-F) \\ &= \frac{\partial_x - i \partial_y}{2} (u(x, y) + iv(x, y)). \end{aligned}$$

Wir fassen die Erkenntnis zu einem Satz zusammen.



☞ **1.2.9 Satz (Cauchy<sup>2</sup>–Riemann<sup>3</sup>-Gleichungen).** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definiert auf einer offenen Menge  $U$  und im Punkt  $z \in U$  komplex differenzierbar. Dann gelten mit der Notation (1.2.8-A) im Punkt  $z = x + iy$  die Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_x u(x, y) &= \partial_y v(x, y), \\ \partial_y u(x, y) &= -\partial_x v(x, y).\end{aligned}\tag{1.2.9-A}$$

✂ **Ergänzung.** Nutzt man die oben formulierte Darstellung der komplexen Ableitung über die partiellen Ableitungen und definiert die Wirtinger-Ableitungen<sup>4</sup>

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),\tag{1.2.9-B}$$

so lassen sich die Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen (1.2.9-A) auch kurz als  $\partial_{\bar{z}}f = 0$  schreiben. Die Notation ist sinnvoll, es gilt

$$\partial_z z = 1, \quad \partial_{\bar{z}} z = 0, \quad \partial_z \bar{z} = 0, \quad \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1\tag{1.2.9-C}$$

zusammen mit den üblichen Ableitungsregeln für beide Wirtinger-Ableitungen. Damit kann für ein Polynom in beiden Variablen  $z$  und  $\bar{z}$  und die zugehörige ‘Polynomfunktion’  $p(z, \bar{z})$  durch die Berechnung von

$$\partial_{\bar{z}} p(z, \bar{z})\tag{1.2.9-D}$$

entschieden werden, ob die Variable  $\bar{z}$  vorkommt. Kommt sie nicht vor, handelt es sich um eine komplexe Polynomfunktion und es gilt die Cauchy–Riemannsches Differentialgleichung  $\partial_{\bar{z}} p(z, \bar{z}) = 0$ .

Die Wirtinger-Ableitung  $\partial_z$  ist von der komplexen Ableitung  $\frac{d}{dz}$  zu unterscheiden, letztere existiert nur, falls die Funktion komplex differenzierbar ist. Die Ableitung  $\partial_z$  benötigt nur die reelle partielle Differenzierbarkeit. Ist die Funktion komplex differenzierbar, so stimmen beide Ableitungen überein.

☞ **1.2.10 Satz.** Sei  $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und seien  $u, v : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar. Gilt dann das System der Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_x u(x, y) &= \partial_y v(x, y), \\ \partial_y u(x, y) &= -\partial_x v(x, y)\end{aligned}\tag{1.2.10-A}$$

für alle  $(x, y) \in U$ , so ist die Funktion  $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$  auf der Menge  $U = \{x + iy \mid (x, y) \in U\} \subseteq \mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

*Beweis.* Sind  $u$  und  $v$  stetig partiell differenzierbar, so folgt Fréchet-Differenzierbarkeit und es gilt

$$\begin{aligned}u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) &= h_1 \partial_x u(x, y) + h_2 \partial_y u(x, y) + \mathbf{o}(|h_1| + |h_2|) \\ v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) &= h_1 \partial_x v(x, y) + h_2 \partial_y v(x, y) + \mathbf{o}(|h_1| + |h_2|)\end{aligned}\tag{1.2.10-B}$$

für  $h = (h_1, h_2)^\top \rightarrow 0$ . Damit folgt aber für  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  und mit den Bezeichnungen  $z = x + iy$ ,  $w = h_1 + ih_2$

$$\begin{aligned}f(z + w) - f(z) &= h_1 \partial_x u(x, y) + h_2 \partial_y u(x, y) \\ &\quad + i(h_1 \partial_x v(x, y) + h_2 \partial_y v(x, y)) + \mathbf{o}(|h_1| + |h_2|) \\ &= (h_1 + ih_2) \partial_x u(x, y) + (h_1 + ih_2) i \partial_x v(x, y) + \mathbf{o}(|h_1| + |h_2|) \\ &= w \partial_x (u(x, y) + iv(x, y)) + \mathbf{o}(|w|)\end{aligned}\tag{1.2.10-C}$$

<sup>2</sup>AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, 1789–1857

<sup>3</sup>BERNHARD RIEMANN, 1826–1866

<sup>4</sup>WILHELM WIRTINGER, 1865–1945

und damit die komplexe Differenzierbarkeit sowie  $f'(z) = \partial_x(u(x, y) + iv(x, y))$ .  $\square$

**1.2.11 (Lokale Invertierbarkeit).** Wir nutzen noch einmal die Interpretation als reelle Abbildung. Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar und gilt  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , so implizieren die Cauchy–Riemann-Gleichungen (1.2.9-A) für die zugehörige Jacobimatrix der Abbildung  $(x, y)^\top \mapsto (u, v)^\top$

$$\det \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{bmatrix} = (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 = |f'(z)|^2. \quad (1.2.11-A)$$

Also ist die Jacobimatrix für alle  $z$  mit  $f'(z) \neq 0$  invertierbar. Damit kann der Satz über die Inverse Abbildung aus Analysis 2 angewendet werden. Da die Inverse der Jacobimatrix wiederum Cauchy–Riemann erfüllt, entspricht der inversen Abbildung nach obigem Satz eine komplex differenzierbare Funktion.

**Korollar.** Angenommen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Gilt dann  $f'(z_\bullet) \neq 0$  für ein  $z_\bullet \in U$ , so gibt es eine Umgebung von  $z_\bullet$  auf der  $f$  bijektiv ist und eine komplex differenzierbare Funktion  $g$ , so dass für  $z$  aus dieser Umgebung

$$f(z) = w \quad \iff \quad z = g(w) \quad (1.2.11-B)$$

gilt.

Die Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitung ist dabei unerheblich, wir werden später zeigen dass komplexe Differenzierbarkeit auf offenen Mengen stets die stetige komplexe Differenzierbarkeit impliziert. Wir bezeichnen eine auf einer offenen Menge komplex differenzierbare Funktion im Weiteren als *holomorph*.

## 1.3 Kurvenintegrale

**1.3.1 (Integrale entlang rektifizierbarer Kurven).** Von besonderer Bedeutung sind Kurvenintegrale holomorpher Funktionen. Wir erinnern zuerst an einige Definitionen aus der Analysis 2, die wir aber hier speziell für die komplexe Ebene formulieren. Sei dazu  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine *Parametrisierung* einer Kurve (mit Endpunkten) in  $U$  ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : I \rightarrow U \quad (1.3.1-A)$$

eines Intervalls  $I \subset \mathbb{R}$  in die komplexe Zahlenebene. Zugeordnet zur Parametrisierung betrachten wir die Menge  $[\gamma] = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$  der durchlaufenen Punkte zusammen mit der *Kurve*  $\Gamma$ , die man sich als Äquivalenzklasse bezüglich ordnungserhaltender Umparametrisierungen vorstellen kann. Diese besitzt neben der Orientierung insbesondere Informationen über mehrfach durchlaufene Punkte und Kurvenabschnitte.

Falls das Intervall  $I = [a, b]$  kompakt ist, sagen wir die Kurve besitzt den *Anfangspunkt*  $\gamma(a)$  und den *Endpunkt*  $\gamma(b)$ . Wir bezeichnen eine Kurve  $\Gamma$  als *geschlossen*, wenn Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, also wenn für die gewählte Parametrisierung  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt. Wir betrachten im Weiteren nur Kurven, für die es eine lokal injektive Parametrisierung gibt.

Eine Kurve  $\Gamma$  heißt *rektifizierbar*, falls das Supremum

$$\ell(\Gamma) = \sup_{\mathfrak{Z}} \sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \quad (1.3.1-B)$$

über alle Zerlegungen

$$\mathfrak{Z} = (a \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n(\mathfrak{Z})} \leq b), \quad n(\mathfrak{Z}) \in \mathbb{N}, \quad (1.3.1-C)$$

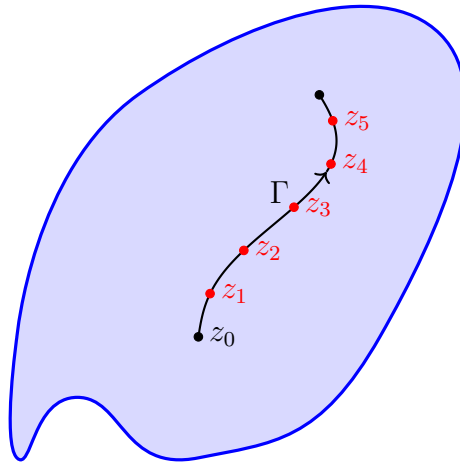
des Intervalls  $I$  endlich ist. Dabei bezeichnet  $n$  die Anzahl der *Teilintervalle* der *Zerlegung* und

$$\delta(\mathfrak{Z}) = \max_{k=1, \dots, n(\mathfrak{Z})} |t_k - t_{k-1}| \quad (1.3.1-D)$$

die *Feinheit* der Zerlegung  $\mathfrak{Z}$ . Für rektifizierbare Kurven ist die induzierte Feinheit

$$\delta_{\Gamma}(\mathfrak{Z}) = \max \left( \{ \ell(\Gamma_{[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)])} \mid k = 1, \dots, n(\mathfrak{Z}) \} \cup \{ \ell(\Gamma \setminus \Gamma_{[\gamma(t_0), \gamma(t_{n(\mathfrak{Z})})]}) \} \right) \quad (1.3.1-E)$$

ebenso interessant. Ist das Intervall  $I$  kompakt, so wählt man  $t_0 = a$  und  $t_{n(\mathfrak{Z})} = b$ . In diesem Fall impliziert  $\delta(\mathfrak{Z}_n) \rightarrow 0$  für eine Folge von Zerlegungen stets  $\delta_{\Gamma}(\mathfrak{Z}_n) \rightarrow 0$ .



Ist nun  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\Gamma \Subset U$  durch  $\gamma$  parametrisierte rektifizierbare und kompakt in  $U$  enthaltene Kurve, so definiert der Grenzwert der *Riemannsummen*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \lim_{\delta_{\Gamma}(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0} \mathcal{S}(f; \gamma, \mathfrak{Z}) = \lim_{\delta_{\Gamma}(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})} f(\gamma(t_k)) (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \quad (1.3.1-F)$$

ein *Kurvenintegral* von  $f$  entlang der orientierten Kurve  $\Gamma$ . Dieses hängt von der Kurve, aber nicht von der gewählten Parametrisierung ab. Die Konvergenz weisen wir nach. Für zwei Zerlegungen  $\mathfrak{Z}_1$  und  $\mathfrak{Z}_2$  des Intervalls  $I$  bezeichne  $\mathfrak{Z}_{(1 \cup 2)} := \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$  die *gemeinsame Verfeinerung*. Da  $f$  stetig und der Abschluss der Menge der durchlaufenen Kurvenpunkte kompakt ist, ist  $f$  auf  $\Gamma$  gleichmäßig stetig und zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| < \delta \quad \implies \quad |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon. \quad (1.3.1-G)$$

Damit gilt für die Differenz der beiden zugeordneten Riemannsummen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(f; \gamma, \mathfrak{Z}_1) - \mathcal{S}(f; \gamma, \mathfrak{Z}_2) &= \sum_i f(z_i^{(1)})(z_i^{(1)} - z_{i-1}^{(1)}) - \sum_j f(z_j^{(2)})(z_j^{(2)} - z_{j-1}^{(2)}) \\
 &= \sum_k (f(z_{k,(1+)}^{(1\cup 2)}) - f(z_{k,(2+)}^{(1\cup 2)}))(z_k^{(1\cup 2)} - z_{k-1}^{(1\cup 2)})
 \end{aligned} \tag{1.3.1-H}$$

mit  $z_k^{(j)} = \gamma(t_k^{(j)})$  den induzierten Stützstellen der Zerlegung  $\gamma(\mathfrak{Z}_j)$  auf  $\Gamma$  und  $z_{k,(j+)}^{(1\cup 2)}$  dem  $\mathfrak{Z}_j$ -Nachfolger des Punktes  $z_k^{(1\cup 2)} \in \gamma(\mathfrak{Z}_{1\cup 2})$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{S}(f; \gamma, \mathfrak{Z}_1) - \mathcal{S}(f; \gamma, \mathfrak{Z}_2)| &\leq \sum_k |f(z_{k,(1+)}^{(1\cup 2)}) - f(z_{k,(2+)}^{(1\cup 2)})| |z_k^{(1\cup 2)} - z_{k-1}^{(1\cup 2)}| \\
 &\leq 2\varepsilon \ell(\Gamma)
 \end{aligned} \tag{1.3.1-I}$$

für  $\delta_\Gamma(\mathfrak{Z}_j) < \delta$ ,  $j = 1, 2$ . Damit erfüllen die Riemannsummen aber das Cauchy Kriterium und die gewünschte Konvergenz folgt für  $\delta_\Gamma(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0$ .

**1.3.2.** Das gerade definierte Kurvenintegral ist Spezialfall eines ebenen Kurvenintegrals zweiter Art. Um das zu sehen, schreiben wir zuerst  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  und setzen  $x_k + iy_k = \gamma(t_k)$  in die obigen Riemannsummen ein. Dies liefert

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})} (u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k))((x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})) \\
 &= \sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})} u(x_k, y_k)(x_k - x_{k-1}) - v(x_k, y_k)(y_k - y_{k-1}) \\
 &\quad + i \sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})} v(x_k, y_k)(x_k - x_{k-1}) + u(x_k, y_k)(y_k - y_{k-1}) \\
 &\longrightarrow \int_\Gamma u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_\Gamma v(x, y) dx + u(x, y) dy \\
 &= \int_\Gamma (u(x, y) + iv(x, y))(dx + i dy) \\
 &= \int_\Gamma f(z) dz
 \end{aligned} \tag{1.3.2-A}$$

mit der Bezeichnung  $dz = dx + i dy$ .

**1.3.3.** Ist die Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar, so kann das Kurvenintegral direkt durch Einsetzen der Parametrisierung bestimmt werden. Es gilt also mit  $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt. \tag{1.3.3-A}$$

Ebenso gilt die Formel von Newton–Leibniz. Ist  $f$  die komplexe Ableitung einer Funktion  $F$ , gilt also  $f(z) = F'(z)$ , so folgt  $dF(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt$  und damit

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_\Gamma F'(z) dz = F(z) \Big|_\Gamma = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{1.3.3-B}$$

Insbesondere gilt für jede geschlossene Kurve  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} dz = 0 \quad \text{und} \quad \oint_{\Gamma} z dz = 0 \quad (1.3.3-C)$$

da es sich bei beiden Integranden um komplexe Ableitungen handelt.

Wir halten noch einige wichtige und direkt aus der Definition des Kurvenintegrals folgende Eigenschaften fest.

☞ **1.3.4 Proposition.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\Gamma \Subset U$  orientierte rektifizierbare Kurve.

(i) Es gilt

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \ell(\Gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|. \quad (1.3.4-A)$$

(ii) Ist  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge stetiger Funktionen und gilt  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig bezüglich  $z \in \Gamma$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad (1.3.4-B)$$

(iii) Sei  $\mathfrak{Z}_n$  eine Folge von Zerlegungen mit  $\delta_{\Gamma}(\mathfrak{Z}_n) \rightarrow 0$  und bezeichne  $\Gamma_n$  den Polygonzug der durch direktes Verbinden der Kurvenpunkte  $\gamma(\mathfrak{Z}_n)$  entsteht. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} f(z) dz. \quad (1.3.4-C)$$

*Beweis.* Wir zeigen die dritte Aussage, die ersten beiden folgen direkt aus obiger Konstruktion. Da  $U$  offen und  $\Gamma$  kompakt ist, gilt für  $n$  hinreichend groß stets  $\Gamma_n \subseteq U$ . Ebenso gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|z - w| \leq \delta \implies |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon \quad (1.3.4-D)$$

für  $z, w \in \Gamma$ . Wählt man  $\delta$  noch kleiner, so gilt nach Konstruktion des Integrals weiterhin für die zugehörige Partialsumme

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \mathcal{S}(f; \gamma, \mathfrak{Z}_n) \right| \leq \varepsilon \ell(\Gamma) \quad (1.3.4-E)$$

für Zerlegungen  $\mathfrak{Z}_n$  mit  $\delta_{\Gamma}(\mathfrak{Z}_n) \leq \delta$ . Ebenso gilt

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{S}(f; \gamma, \mathfrak{Z}_n) - \int_{\Gamma_n} f(z) dz \right| &= \left| \sum_k f(z_k^{(n)}) (z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) - \int_{S_{z_{k-1}^{(n)}, z_k^{(n)}}} f(z) dz \right| \\ &= \left| \sum_k \int_{S_{z_{k-1}^{(n)}, z_k^{(n)}}} f(z_k^{(n)}) - f(z) dz \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_k |z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}| = \varepsilon \ell(\Gamma_n) \\ &\leq \varepsilon \ell(\Gamma) \end{aligned} \quad (1.3.4-F)$$

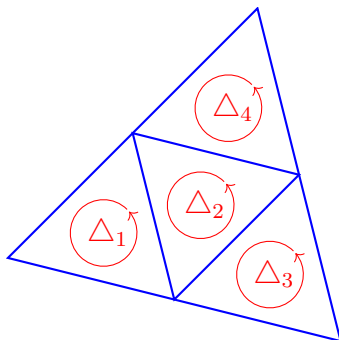
für  $\mathfrak{Z}_n = (t_k^{(n)})$  und  $z_k^{(n)} = \gamma(t_k^{(n)})$  und mit der Notation  $S_{z,w}$  für die Verbindungsstrecke der Punkte  $z, w \in \mathbb{C}$ . Zusammen liefern beide Abschätzungen die Behauptung.  $\square$

☞ **1.3.5 Lemma** (Goursat<sup>5</sup>–Pringsheim<sup>6</sup>). Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar. Dann gilt für jedes im Inneren von  $U$  liegende Dreieck  $\Delta \in U$

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0. \tag{1.3.5-A}$$

*Beweis.* Wir beweisen dies indirekt. Angenommen, für ein Dreieck  $\Delta$  in  $U$  gilt

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = M > 0. \tag{1.3.5-B}$$



Zerlegt man nun dieses Dreieck  $\Delta$  durch Verbinden der Seitenmitten in vier Teildreiecke  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  und  $\Delta_4$ , so gilt (da die innenliegenden Seiten doppelt durchlaufen werden)

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \oint_{\partial\Delta_j} f(z) dz \tag{1.3.5-C}$$

und eines der Teildreiecke  $\Delta^{(1)} \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$  muss

$$\left| \oint_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4} \tag{1.3.5-D}$$

erfüllen. Setzt man dies rekursiv fort, so erhält man eine ineinander geschachtelte Folge von Teildreiecken  $\Delta^{(n)}$  mit

$$\left| \oint_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}. \tag{1.3.5-E}$$

Wählt man die Dreiecke abgeschlossen, so gibt es damit auf Grund der Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$  ein

$$z_\bullet \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta^{(n)} \subset U \tag{1.3.5-F}$$

und da  $f$  in  $z_\bullet$  differenzierbar ist zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta \in (0, 1)$ , so dass für  $|z - z_\bullet| \leq \delta$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_\bullet)}{z - z_\bullet} - f'(z_\bullet) \right| \leq \varepsilon \tag{1.3.5-G}$$

gilt. Weiter existiert zu diesem  $\delta$  ein  $N_\delta$ , so dass für  $n \geq N_\delta$  die Dreiecke  $\Delta^{(n)} \subseteq \mathbb{B}_\delta(z_\bullet)$  erfüllen. Also gilt für diese  $n$  wegen

$$\oint_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz = \oint_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz - \underbrace{f(z_\bullet) \oint_{\partial\Delta^{(n)}} dz}_{=0} - \underbrace{f'(z_\bullet) \oint_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_\bullet) dz}_{=0} \tag{1.3.5-H}$$

auch

$$\left| \oint_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \ell(\partial\Delta^{(n)}) \max_{z \in \Delta^{(n)}} |z - z_\bullet| \leq \varepsilon \frac{L}{2^n} \frac{L}{2^n} \tag{1.3.5-I}$$

<sup>5</sup>ÉDOUARD GOURSAT, 1858–1936

<sup>6</sup>ALFRED PRINGSHEIM, 1850–1941

mit  $L = \ell(\partial\Delta)$  dem Umfang des Ausgangsdreiecks und unter Ausnutzung der Tatsache, dass  $|z - z_\bullet|$  höchstens so groß wie der Umfang von  $\Delta^{(n)}$  sein kann. Da  $\varepsilon$  beliebig war, ist dies ein Widerspruch.  $\square$

**✂ Ergänzung.** Wir haben im Satz nur die Differenzierbarkeit von  $f$  und nicht die stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt. Ist  $f$  stetig differenzierbar, so ist der Beweis deutlich einfacher zu erhalten. Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen liefern dann direkt

$$d((u(x, y) + iv(x, y))(dx + i dy)) = d(u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i d(v(x, y) dx + u(x, y) dy) = 0, \quad (1.3.5-J)$$

so dass der Integralsatz von Green (beziehungsweise allgemeiner der Satz von Stokes) direkt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\partial\Delta} (v(x, y) dx + u(x, y) dy) = \int_{\Delta} 0 = 0 \quad (1.3.5-K)$$

liefert. Die Bedeutung des Lemmas von Goursat besteht gerade darin, diese Stetigkeit der Ableitungen nicht vorauszusetzen. Wir werden allerdings später sehen, dass alle komplex differenzierbaren Funktionen automatisch stetig differenzierbar sind. Der Beweis dieser fundamentalen Aussage beruht insbesondere auf dem Lemma von Goursat.

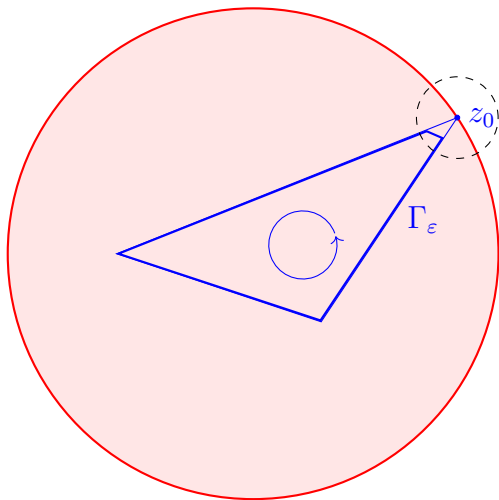
Die Aussage des Lemmas 1.3.5 gilt natürlich für jede in  $U$  liegende Figur, die sich in Dreiecke zerlegen lässt, also insbesondere jedes Polygon. Wir formulieren dies nicht separat, da wir anschließend ohnehin die allgemeinere Aussage des Integralsatzes von Cauchy aus dem Lemma folgern werden.

Zuerst verschärfen wir allerdings das Lemma leicht.

**✎ 1.3.6 Korollar (Verschärftes Lemma von Goursat).** *Die Aussage des Lemmas von Goursat gilt ebenso, wenn ein Eckpunkt des Dreiecks  $\Delta$  auf dem Rand von  $U$  liegt und  $f$  in diesen Randpunkt stetig fortsetzbar ist.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Grenzwertbildung. Sei  $z_0$  der Randpunkt. Da  $f$  in  $z_0$  stetig fortgesetzt werden kann, gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta \in (0, 1)$ , so dass dem entsprechend gewählten Wert  $f(z_0)$

$$z \in \mathbb{B}_\delta(z_0) \cap U \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (1.3.6-A)$$



gilt. Wir schneiden vom Dreieck  $\Delta$  die auf dem Rand liegende Ecke derart ab, dass der Abschnitt  $\Delta_\varepsilon$  in  $\mathbb{B}_\delta(z_0) \cap U$  liegt und bezeichnen die Randkurve des verbleibenden Vierecks mit  $\Gamma_\varepsilon$ . Dann gilt einerseits nach Lemma 1.3.5

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = 0 \quad (1.3.6-B)$$

und damit

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = \oint_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) dz. \quad (1.3.6-C)$$

Da der Rand des abgeschnittenen Dreiecks in  $\mathbb{B}_\delta(z_0) \cap U$  enthalten ist, können wir dort

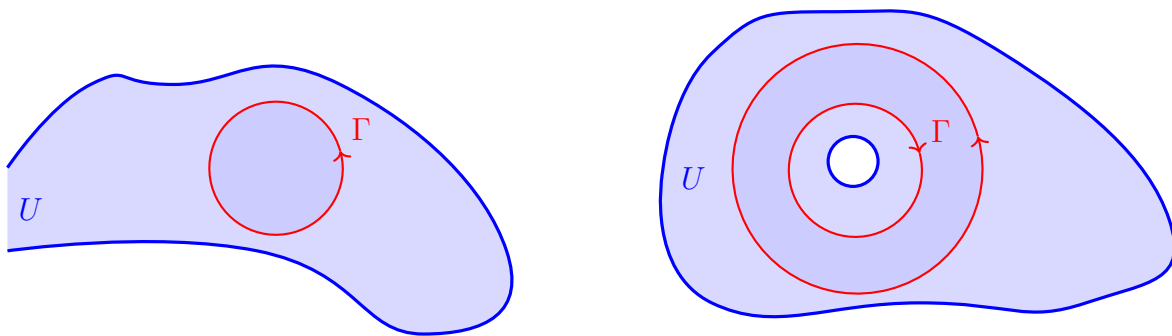
$|f(z) - f(z_0)|$  durch  $\varepsilon$  abschätzen. Es gilt wegen (1.3.3-C)

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = \left| \oint_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) dz \right| = \left| \oint_{\partial\Delta_\varepsilon} (f(z) - f(z_0)) dz \right| \leq 4\delta\varepsilon \leq 4\varepsilon, \quad (1.3.6-D)$$

da die Seitenlängen des Dreiecks offenbar kleiner  $\delta$  beziehungsweise  $2\delta$  sein müssen. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**1.3.7.** Wir nennen im Weiteren eine geschlossene orientierte Kurve  $\Gamma$  *nullhomolog* in  $U$ , falls sie Randkurve eines echt enthaltenen Teilgebietes  $G \Subset U$  ist. Es ist sinnvoll die Bezeichnung auf formale  $\mathbb{Z}$ -lineare Summe orientierter Kurven auszudehnen, diese heißen nullhomolog wenn sie (eventuell anders zusammengesetzt) Summen nullhomologer Kurven sind. Zwei Kurven  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  heißen *homolog* in  $U$ , falls ihre formale Differenz  $\Gamma_2 - \Gamma_1$  nullhomolog ist. Wir schreiben  $\Gamma_1 \sim_U \Gamma_2$  in diesem Fall.

Zwei Beispiele nullhomologer Kurven sind nachfolgend dargestellt.



Im zweiten Beispiel ist die gegenläufige Orientierung der beiden Kurvenstücke essentiell. Ein Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls jede geschlossene Kurve in  $U$  auch in  $U$  nullhomolog ist.

**1.3.8 Satz (Integralsatz von Cauchy).** Sei  $\Gamma$  eine orientierte in  $U$  liegende geschlossene und in  $U$  nullhomologe rektifizierbare Kurve. Sei weiter  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar. Dann gilt

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.3.8-A)$$

*Beweis.* Jede rektifizierbare Kurve entsteht als Grenzwert von Polygonzügen  $\gamma(\mathfrak{Z})$  mit induzierter Feinheit  $\delta_{\Gamma}(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0$ . Damit folgt die Behauptung aus Lemma 1.3.5 zusammen mit Proposition 1.3.4, nachdem das innerhalb des Polygonzugs liegende Teilgebiet in Dreiecke zerlegt wurde.  $\square$

**1.3.9 Satz (Cauchysche Integralformel).** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $U$ ,  $z \in U$  und  $\Gamma$  eine den Punkt  $z$  innerhalb von  $U$  einmal positiv umlaufende nullhomologe Kurve. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.3.9-A)$$



*Beweis.* Wir zeigen zuerst eine Hilfsaussage. Es gilt für jede einmal den Ursprung positiv umlaufende Kurve  $\Gamma_0$  aufgrund des Integralsatzes von Cauchy und mit dem positiv orientierten Einheitskreis  $\mathcal{E}$

$$\oint_{\Gamma_0} \frac{dz}{z} = \oint_{\mathcal{E}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = 2\pi i \quad (1.3.9-B)$$

unter Ausnutzung der Parametrisierung  $t \mapsto e^{it}$  für  $\mathcal{E}$ . Damit gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.3.9-C)$$

und da der verbleibende Integrand für  $\zeta \neq z$  holomorph<sup>7</sup> in  $\zeta$  ist, kann der Integrationsweg mit dem Integralsatz von Cauchy durch einen kleinen positiv orientierten Kreis um  $z$  ersetzt werden. Wählen wir diesen mit Radius  $r$  und bezeichnen ihn mit  $\mathcal{E}_{z,r}$ , so gilt also

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\mathcal{E}_{z,r}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq r \max_{\zeta \in \mathcal{E}_{z,r}} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right|. \quad (1.3.9-D)$$

Da  $f$  holomorph ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z) \quad (1.3.9-E)$$

und der Quotient ist stetig in einer Umgebung von  $z$ . Damit können wir das verbleibende Maximum für  $r \leq r_0$  durch

$$\max_{\zeta \in \mathcal{E}_{z,r}} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \leq \max_{\zeta: |z-\zeta| \leq r_0} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| = M \quad (1.3.9-F)$$

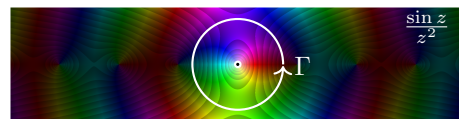
und damit die abzuschätzende Differenz (1.3.9-D) durch  $Mr$  abschätzen. Mit  $r \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

**✂ 1.3.10 Beispiel.** Die Integralformel von Cauchy kann auch genutzt werden, um einfache Kurvenintegrale zu berechnen. So gilt für jede den Ursprung einmal positiv umlaufende Kurve  $\Gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz = \sin 0 = 0 \quad (1.3.10-A)$$

und da ebenso  $\text{si}(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$  im Ursprung komplex differenzierbar ist (und sinnvoll mit Funktionswert 1 fortgesetzt werden kann)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\text{si}(z)}{z} dz = \text{si}(0) = 1. \quad (1.3.10-B)$$



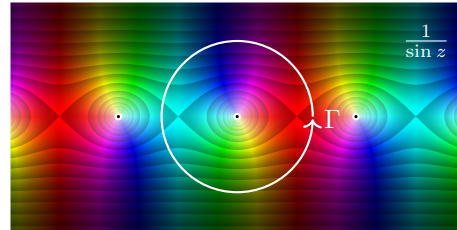
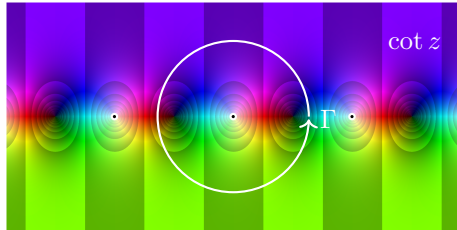
<sup>7</sup>Er ist auch holomorph für alle  $\zeta \in U$ , aber das beweisen wir erst später.

Wählt man einen Weg  $\Gamma$ , der den Ursprung einmal positiv umläuft und in dessen Inneren kein weiterer Punkt aus  $\pi\mathbb{Z}$  liegt, so gilt damit auch

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \cot z \, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} \frac{z \cos z}{\sin z} \, dz = \frac{\cos 0}{\operatorname{si} 0} = 1 \quad (1.3.10-C)$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\sin z} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} \frac{z}{\sin z} \, dz = \frac{1}{\operatorname{si} 0} = 1. \quad (1.3.10-D)$$



**1.3.11.** Die Cauchysche Integralformel impliziert (erstaunlicherweise!) direkt eine Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen. Ist  $f$  holomorph und  $\Gamma$  eine entsprechend gewählte Kurve, so gilt für alle  $w \in \mathbb{B}_{\delta}(z)$  mit  $\delta < \operatorname{dist}(z, \Gamma)$

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z + z - w} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{1}{1 - \frac{z-w}{z-\zeta}} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{w-z}{\zeta-z} \right)^k \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (w-z)^k \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} \, d\zeta \end{aligned} \quad (1.3.11-A)$$

unter Ausnutzung der gleichmäßigen Konvergenz der auftretenden geometrischen Reihe. Jede holomorphe Funktion ist also lokal um jeden Punkt von  $U$  durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar und damit *analytisch*,

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w-z)^k, \quad w \in \mathbb{B}_{\delta}(z). \quad (1.3.11-B)$$

Nach Lemma 1.2.4 ist die Funktion  $f$  damit beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt die verallgemeinerte *Cauchysche Integralformel*

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} f(z) = a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} \, d\zeta \quad (1.3.11-C)$$

zur Berechnung der Koeffizienten. Die gerade gezeigte Reihendarstellung entspricht der Taylorreihe <sup>8</sup> der Funktion.

Dies impliziert eine sehr wichtige Äquivalenz:

<sup>8</sup>BROOK TAYLOR, 1685–1731

☞ **1.3.12 Satz.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf einer offenen Menge  $U$  definierte Funktion. Dann sind äquivalent

- (i)  $f$  ist holomorph, also in jedem Punkt  $z \in U$  komplex differenzierbar;
- (ii)  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  sind auf  $U$  stetig reell differenzierbar und es gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (1.2.9-A);
- (iii)  $f$  ist analytisch, also in der Umgebung eines jeden Punktes  $z_0 \in U$  durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar.

Insbesondere ist damit  $f$  auf  $U$  beliebig oft komplex differenzierbar.

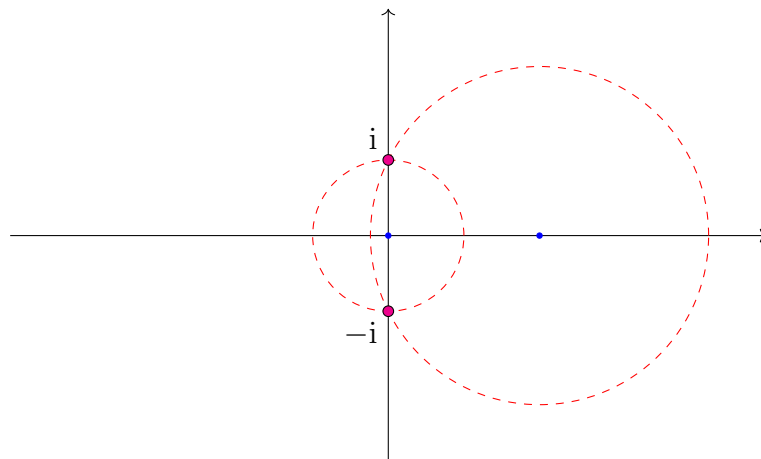
*Beweis.* Ist  $f$  holomorph, so impliziert Satz 1.2.9 die partielle Differenzierbarkeit von  $u$  und  $v$  und die Gültigkeit der Cauchy–Riemann-Gleichungen. Da wie gerade gezeigt,  $f$  beliebig oft differenzierbar ist, ist die Ableitung  $f'(z)$  auch stetig und damit sind  $u$  und  $v$  auch stetig partiell differenzierbar. Die umgekehrte Implikation wurde in Satz 1.2.10 gezeigt.

Wir haben gerade nachgerechnet, dass jede holomorphe Funktion um jeden Punkt durch ihre Taylorreihe darstellbar ist. Damit sind holomorphe Funktionen stets analytisch. Ist umgekehrt  $f$  analytisch, so impliziert Lemma 1.2.4 die Holomorphie.  $\square$

✂ **1.3.13 Beispiel.** Der Beweis der Darstellung (1.3.11-B) holomorpher Funktionen als Taylorreihe mit Koeffizienten (1.3.11-C) liefert insbesondere auch Informationen über den Konvergenzradius der sich ergebenden Reihe. Da  $\rho < \operatorname{dist}(z_0, \Gamma)$  durch den Abstand von  $z_0$  zum Integrationsweg  $\Gamma$  bestimmt ist und dieser frei (als nullhomologe Kurve in  $U$ ) wählbar ist, entspricht das Konvergenzgebiet mindestens der größten (in  $U$  liegenden) Kreisscheibe um  $z_0$ , auf der  $f$  holomorph ist. Oft ist es auch genau diese Scheibe. Dazu ein Beispiel. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad (1.3.13-A)$$

ist in  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$  definiert und holomorph und wegen  $\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$  auch nicht auf eine größere Menge holomorph fortsetzbar. Damit besitzt die Potenzreihendarstellung von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  den Konvergenzradius 1 und die Potenzreihendarstellung um den Punkt  $z_0 = 2$  den Konvergenzradius  $\sqrt{5} = |2 - i|$ .



**1.3.14 (Mittelwertegenschaft und Maximumsprinzip).** Wählt man als Integrationsweg für die Cauchysche Integralformel einen (im Gebiet  $U$  liegenden) Kreis mit Radius  $r$  um den Punkt  $z$ , so ergibt sich mit der Parametrisierung  $\zeta = z + re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , und damit mit  $d\zeta = ire^{i\theta} d\theta$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \quad (1.3.14-A)$$

und der Funktionswert  $f(z)$  ist stets der Mittelwert der Funktionswerte  $f(\zeta)$  entlang der Kreislinie. Damit folgen Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z + re^{i\theta})| \\ \operatorname{Re} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z + re^{i\theta}) d\theta \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \operatorname{Re} f(z + re^{i\theta}) \\ \operatorname{Im} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} f(z + re^{i\theta}) d\theta \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \operatorname{Im} f(z + re^{i\theta}). \end{aligned} \quad (1.3.14-B)$$

Dabei kann Gleichheit nur eintreten, wenn  $|f|$ ,  $\operatorname{Re} f$  beziehungsweise  $\operatorname{Im} f$  konstant ist. Wir formulieren dies als Satz:

**1.3.15 Satz.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer zusammenhängenden Menge  $U$ . Nimmt  $|f(z)|$  in einem inneren Punkt von  $U$  ein lokales Maximum an, so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Angenommen, für  $z_\bullet \in U$  gibt es eine Umgebung  $\mathbb{B}_\delta(z_\bullet) \Subset U$  mit

$$|f(z_\bullet)| = \max_{\zeta \in \mathbb{B}_\delta(z_\bullet)} |f(\zeta)|. \quad (1.3.15-A)$$

Sei weiter  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$  so gewählt, dass  $|f(z_\bullet)| = \operatorname{Re} \alpha f(z_\bullet)$ . Dann folgt

$$|f(z_\bullet)| = \operatorname{Re} \alpha f(z_\bullet) \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \operatorname{Re} \alpha f(z + re^{i\theta}) \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z + re^{i\theta})| \leq |f(z_\bullet)| \quad (1.3.15-B)$$

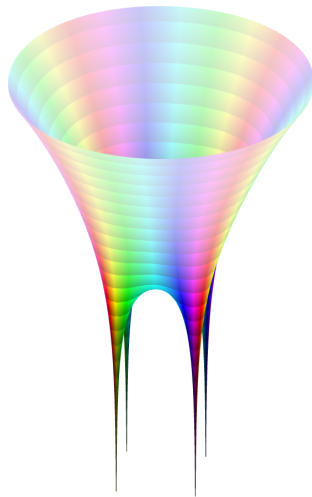
für alle  $0 < r < \delta$  und  $z \mapsto \operatorname{Re} \alpha f(z)$  ist konstant auf  $\mathbb{B}_\delta(z_\bullet)$ . Da  $z \mapsto \alpha f(z)$  holomorph ist, impliziert Cauchy–Riemann damit  $z \mapsto \operatorname{Im} \alpha f(z)$  konstant und damit auch  $f$  konstant auf  $\mathbb{B}_\delta(z_\bullet)$ .

Angenommen,  $f$  ist nicht konstant auf  $U$ . Dann gilt  $N = \{z \in U \mid f(z) = f(z_\bullet)\} \neq U$  und da  $U$  zusammenhängend ist, besitzt  $N$  mindestens einen nicht isolierten Randpunkt innerhalb von  $U$ . Die holomorphe Funktion  $f - f(z_\bullet)$  ist in diesem Punkt analytisch und damit folgt ein Widerspruch zu Lemma 1.2.7.  $\square$

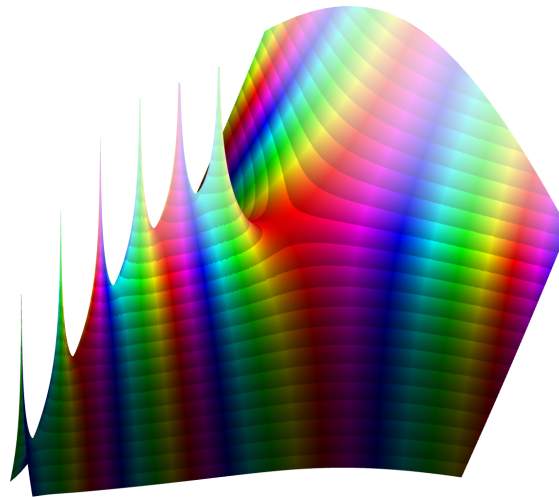
**Ergänzung.** Früher wurden zur Visualisierung holomorpher Funktionen oft *analytische Landschaften*, also Bilder von  $z \mapsto |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$  verwendet. Diese besitzen nach dem gerade formulierten Maximumsprinzip keine Berge sondern nur Sättel und alle Täler führen zu Nullstellen der Funktion. Letzteres kann man durch Differenzieren zeigen. In einem lokalen Minimum muss für die Wirtinger-Ableitung

$$\partial_z |f(z)|^2 = \overline{f(z)} \partial_z f(z) = 0 \quad (1.3.15-C)$$

gelten. Damit impliziert  $\partial_z f(z) \neq 0$  direkt  $f(z) = 0$  in einem solchen lokalen Minimum. Ist  $\partial_z f(z) \neq 0$ , so muss man weiter differenzieren. Letzteres ist erlaubt, da wir nachfolgend zeigen werden, dass alle holomorphen Funktionen beliebig oft differenzierbar sind.



$$f(z) = z^4 - 1$$



$$f(z) = \Gamma(z)$$

Wir verwenden für analytische Landschaften den Graphen der Funktion  $f \mapsto \ln|f(z)|$  eingefärbt mit dem Argument des Funktionswertes.

☞ **1.3.16 Satz (Existenz von Stammfunktionen).** *Ist  $U$  einfach zusammenhängend, so gibt es zu jeder holomorphen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ , also eine komplex differenzierbare Funktion mit*

$$F'(z) = f(z) \tag{1.3.16-A}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Wir geben eine Stammfunktion einfach an. Wir wählen dazu ein  $z_0 \in U$  und zu jedem  $z \in U$  eine Kurve  $\Gamma_z$ , die  $z_0$  mit  $z$  verbindet. Dann ist

$$F(z) = \int_{\Gamma_z} f(\zeta) d\zeta \tag{1.3.16-B}$$

von der Wahl der Kurve  $\Gamma_z$  unabhängig. Dies zeigen wir zuerst. Für jede zweite Kurve  $\tilde{\Gamma}_z$  von  $z_0$  nach  $z$  ist die Differenz  $\Gamma_z - \tilde{\Gamma}_z$  (da  $U$  einfach zusammenhängend ist) nullhomolog und es folgt aus dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \oint_{\Gamma_z - \tilde{\Gamma}_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\tilde{\Gamma}_z} f(\zeta) d\zeta. \tag{1.3.16-C}$$

Weiterhin ist für  $w$  nahe Null

$$\begin{aligned} F(z+w) - F(z) &= \int_{\Gamma_{z+w} - \Gamma_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{S_{z,z+w}} f(\zeta) d\zeta \\ &= f(z)w + \int_{S_{z,z+w}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \end{aligned} \tag{1.3.16-D}$$

mit der Verbindungsstrecke  $S_{z,z+w}$  der Punkte  $z$  und  $z+w$ . Da  $f$  in  $z$  stetig ist, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta$ , so dass

$$|w| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \tag{1.3.16-E}$$

gilt und für solche  $w$  ist das verbleibende Integral betragsmäßig durch  $\varepsilon|w|$  abschätzbar. Das aber entspricht gerade der Differenzierbarkeit von  $F$  und  $F'(z) = f(z)$  folgt.  $\square$

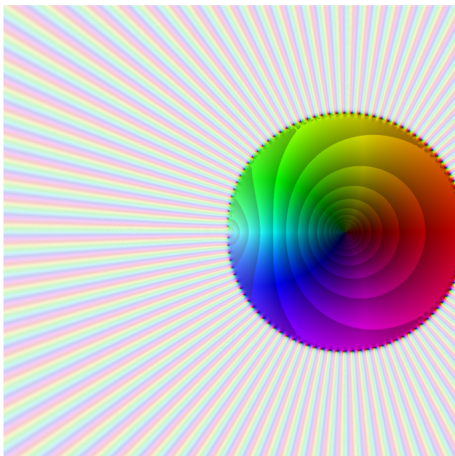
**✂ 1.3.17 Beispiele.** Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph. Damit existiert auf jeder einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine Stammfunktion zu dieser Funktion. Zur Wahl einer geeigneten möglichst großen solchen Menge schneiden wir die komplexe Zahlenebene von 0 bis  $\infty$  auf und definieren auf dem Komplement dieses Schnittes

$$\log z := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{1.3.17-A}$$

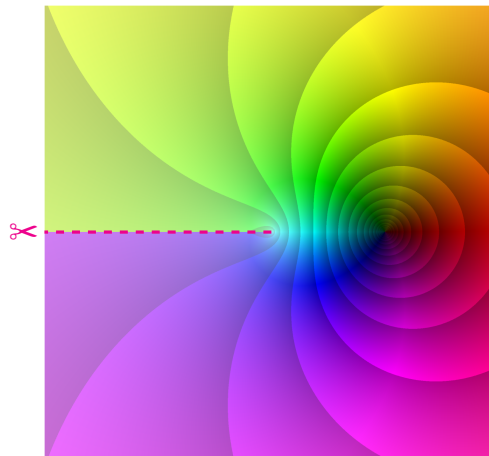
Hierbei dürfen wir entlang eines beliebigen Weges in diesem einfach zusammenhängenden Gebiet integrieren. Gebräuchlich ist ein Schnitt entlang der negativen reellen Achse, dann gilt (1.3.17-A) für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Da zumindest für Werte  $z \in (0, \infty)$  das Integral mit dem Logarithmus übereinstimmt, also  $\log x = \ln x$ ,  $x > 0$ , gilt und dieser auf  $(0, 2)$  durch die Potenzreihe (1.2.5-D) gegeben ist, haben wir diese damit sinnvoll auf einen größeren Bereich fortgesetzt.

Es gilt, wie durch Differenzieren leicht zu zeigen ist,

$$\log(re^{i\phi}) = \ln r + i\phi, \quad r > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi). \tag{1.3.17-B}$$



Partialsomme der Reihe von  $\log(z)$

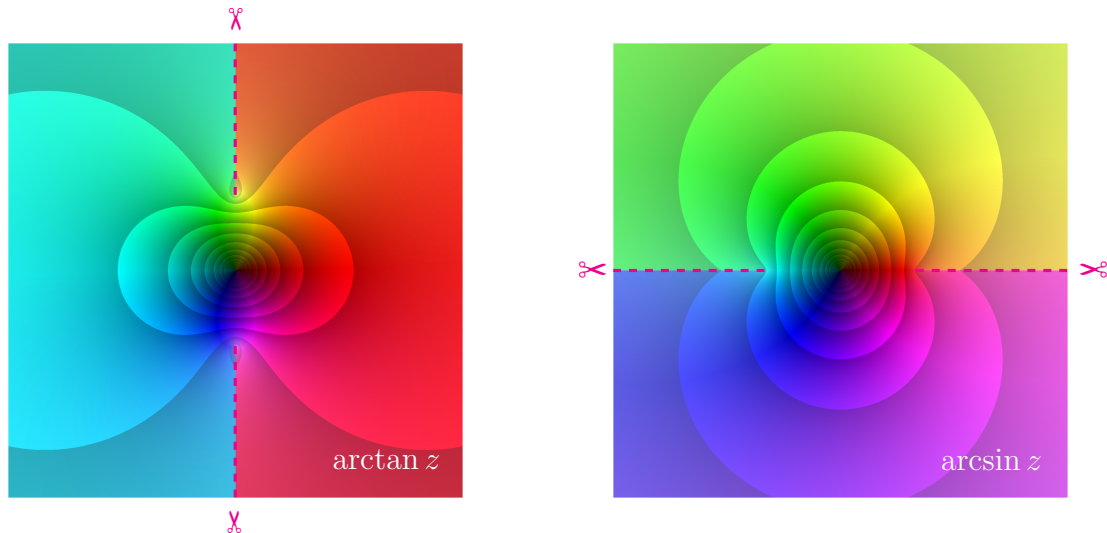


Logarithmusfunktion  $\log(z)$  auf  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$  holomorph. Um ein einfach zusammenhängendes Gebiet zu erhalten, schneiden wir  $\mathbb{C}$  entlang der imaginären Achse von  $-i\infty$  nach  $-i$  und entsprechend von  $i$  nach  $+i\infty$  auf. Damit liefert

$$\arctan z := \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \tag{1.3.17-C}$$

in der aufgeschnittenen Ebene  $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty))$  eine Stammfunktion. Diese ist zumindest für reelle  $z$  der bekannte *arcus tangens*, den wir hiermit ins Komplexe fortgesetzt haben.



Die Funktion  $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$  ist (bei richtiger Wahl der Wurzel) auf der aufgeschnittenen komplexen Ebene  $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$  holomorph. Damit liefert

$$\arcsin z := \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1.3.17-D)$$

mit einem in  $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$  verlaufenden Integrationsweg eine sinnvolle Fortsetzung des *arcus sinus* ins Komplexe.

Im Beweis des Satzes 1.3.16 haben wir zur Konstruktion der Stammfunktion die Holomorphie von  $f$  nur in Form des Integralsatzes von Cauchy verwendet. Dies nutzen wir nun, um eine Umkehrung des Integralsatzes von Cauchy zu zeigen.

Diese ist insbesondere für durch Integrale gegebene Funktionen einfacher zu überprüfen als die komplexe Differenzierbarkeit.

☞ **1.3.18 Satz (Morera<sup>9</sup>).** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und gelte

(i) für den Rand jedes in  $U$  liegenden Dreiecks  $\Delta$

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0, \quad (1.3.18-A)$$

oder äquivalent dazu

(ii) für jede in  $U$  liegende nullhomologe rektifizierbare Kurve  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.3.18-B)$$

Dann ist die Funktion  $f$  auf  $U$  holomorph.

<sup>9</sup>GIACINTO MORERA, 1856–1909

*Beweis.* Die Konstruktion des Kurvenintegrals impliziert die Implikation **(i)** nach **(ii)**. Sei nun  $z_0 \in U$  beliebig und  $r$  so klein, dass  $\mathbb{B}_r(z_0) \subseteq U$  gilt. Da die Kreisscheibe  $\mathbb{B}_r(z_0)$  einfach zusammenhängend ist, impliziert der Beweis von Satz 1.3.16 die Existenz einer komplex differenzierbaren Funktion  $F : \mathbb{B}_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{B}_r(z_0)$ . Da  $F$  damit aber beliebig oft komplex differenzierbar ist, ist auch  $f(z)$  komplex differenzierbar und damit in  $\mathbb{B}_r(z_0)$  holomorph.

Da  $z_0$  beliebig war, folgt die Behauptung. □

**✎ 1.3.19 Korollar.** *Seien  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen auf einem Gebiet  $U$ . Konvergiert dann  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge  $K \Subset U$ , so ist die Grenzfunktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ebenso holomorph.*

*Beweis.* Auf dem Rand jedes echt in  $U$  enthaltenen Dreiecks  $\Delta \Subset U$  konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ . Also gilt für jedes solche Dreieck  $\Delta$  wegen Proposition 1.3.4

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = \oint_{\partial\Delta} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0 \quad (1.3.19-A)$$

und mit dem Satz von Morera folgt die Behauptung. □

Das ist anders als im reellen Fall. Reelle Differenzierbarkeit überträgt sich nicht durch gleichmäßige Konvergenz allein. Hier mussten wir in Analysis 2 zusätzlich die gleichmäßige Konvergenz der Ableitung fordern.

**✂ Ergänzung.** Es genügt natürlich zu wissen, dass die holomorphen Funktionen  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf jeder kompakten Teilmenge  $K \Subset U$  gleichmäßige Cauchyfolgen sind, um die Konvergenz gegen eine holomorphe Funktion zu folgern. Beschränkt man sich auf weniger und benötigt nur die Existenz einer Teilfolge der  $f_n$ , die gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, so liefert der aus Analysis 3 bekannte Satz von Arzelà–Ascoli ein entsprechendes Kompaktheitskriterium für Folgen holomorpher Funktionen.

**Satz (Montel<sup>10</sup>).** *Seien  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Angenommen, für jedes Kompaktum  $K \Subset U$  gilt*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in K} |f_n(z)| < +\infty. \quad (1.3.19-B)$$

*Dann existiert eine Teilfolge  $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ , die auf jedem Kompaktum  $K \Subset U$  gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert.*

Da  $U$  offen ist, genügt es als Kompakta Kreisscheiben zu verwenden. Zum Beweis nutzt man nun, dass jedes Kompaktum  $K \Subset U$  echt in einem größeren Kompaktum  $L$  enthalten ist (also  $K$  kompakte Teilmenge des Inneren von  $L$  ist, was wir als  $K \Subset L \Subset U$  abkürzen). Da dann die holomorphen Funktionen  $f_n$  auf  $L$  gleichmäßig beschränkt sind, impliziert die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel (1.3.11-C) mit einem um  $K$  innerhalb  $L$  verlaufenden Integrationsweg, dass die komplexen Ableitungen  $f'_n$  auf  $K$  gleichmäßig beschränkt sind. Dies wiederum impliziert, dass die Funktionen  $f_n$  auf  $K$  gleichgradig gleichmäßig stetig sind und damit nach Arzelà–Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzen. Schöpft man nun  $U$  mit (abzählbar vielen!) Kompakta aus, kann man aus diesen Teilfolgen immer wieder Teilfolgen auswählen, so dass die sich ergebende Diagonalfolge auf allen diesen (und damit allen darin enthaltenen) Kompakta gleichmäßig konvergiert.

---

<sup>10</sup>PAUL MONTEL, 1876–1975



## 1.4 Ganze Funktionen

**1.4.1.** Holomorphe Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , Funktionen die also auf ganz  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbar sind, werden als *ganze Funktionen* bezeichnet. Beispiele dazu haben wir schon einige gesehen: Alle Polynomfunktionen sind ganz, ebenso die Exponentialfunktion und die über diese definierten komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen.

Für ganze Funktionen  $f$  gilt die Darstellung als Maclaurin-Reihe<sup>11</sup>

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (1.4.1-A)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

☞ **1.4.2 Satz** (Liouville<sup>12</sup>). *Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz. Ist  $f$  auf  $\mathbb{C}$  beschränkt, so ist  $f$  konstant.*

*Beweis.* Ist  $f$  beschränkt, gilt also  $|f(z)| \leq M < \infty$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , so folgt aus den Cauchyschen Integralformeln (1.3.11-C)

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\mathcal{E}_r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| \leq \frac{M}{r^k} \quad (1.4.2-A)$$

mit den positiv orientierten Kreisen  $\mathcal{E}_r$  mit Radius  $r$  um den Ursprung. Da  $r$  beliebig ist, folgt  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \geq 1$  und bis auf den ersten Summanden sind alle Glieder der Maclaurin-Reihe (1.4.1-A) Null. Damit ist die Funktion  $f$  konstant.  $\square$

✂ **Ergänzung.** Es gibt viele Beweisansätze für den Satz von Liouville. Wir hätten alternativ auch einen Kreis um einen beliebigen Punkt  $z_\bullet$  wählen und die obige Abschätzung nur für  $k = 1$  nutzen können. Damit folgt  $f'(z_\bullet) = 0$  für alle  $z_\bullet \in \mathbb{C}$  und ebenso die Behauptung. Der angegebene Beweis ist allerdings direkt verallgemeinerbar, siehe Satz 1.4.4.

Wir formulieren eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Liouville und beweisen den Fundamentalsatz der Algebra.

☞ **1.4.3 Korollar** (Gauss, Fundamentalsatz der Algebra). *Jede nicht konstante Polynomfunktion  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt eine Nullstelle.*

*Beweis.* Es genügt, dies für Polynome mit führendem Koeffizienten 1 zu zeigen. Angenommen, die Polynomfunktion

$$p(z) = z^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^k \quad (1.4.3-A)$$

besitzt keine Nullstelle. Dann ist die Hilfsfunktion  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  definiert und holomorph. Da ebenso

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-m} \left( 1 + \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{k-m} \right)^{-1} = 0 \quad (1.4.3-B)$$

<sup>11</sup>COLIN MACLAURIN, 1698–1746

<sup>12</sup>JOSEPH LIOUVILLE, 1809–1882

gilt, ist  $f$  beschränkt und damit nach dem Satz von Liouville konstant und nach dem gerade bestimmten Grenzwert gleich Null. Widerspruch zur Definition von  $f$ .  $\square$

Wir können deutlich mehr mit dem Satz von Liouville beziehungsweise der genutzten Abschätzung in obigem Beweis zeigen. Jede Funktion, die höchstens wie ein Polynom wächst, ist auch eines. Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen müssen damit insbesondere schneller wachsen als ein Polynom.

☞ **1.4.4 Satz (Liouville).** Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz. Angenommen, für ein  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |z^{-m} f(z)| = M < +\infty. \quad (1.4.4-A)$$

Dann ist  $f$  eine Polynomfunktion höchstens vom Grad  $m$ .

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis des Satzes von Liouville. Aus der Bedingung  $|z|^{-m}|f(z)| \leq M < \infty$  für  $M$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  folgt analog zum Beweis von Satz 1.4.2

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| \leq \frac{M}{r^{k-m}} \quad (1.4.4-B)$$

und für  $k > m$  ergibt sich  $f^{(k)}(0) = 0$ . Damit liefert die Maclaurin-Reihe von  $f$  direkt die Darstellung als Polynomfunktion.  $\square$

☞ **1.4.5 Korollar.** Angenommen, eine von der Nullfunktion verschiedene ganze Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt unendlich viele Nullstellen. Dann gilt für jedes  $m \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} |z|^{-m}|f(z)| = +\infty. \quad (1.4.5-A)$$

✂ **Ergänzung.** Die Aussage lässt sich noch deutlich verschärfen. Da nach Lemma 1.2.7 sich die Nullstellen holomorpher Funktionen nicht häufen, können diese gezählt werden. Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Dichte der Nullstellen, also dem Wachstum der Nullstellenzählfunktion

$$N(r) = \#\{z \in \mathbb{B}_R(0) \mid f(z) = 0\} \quad (1.4.5-B)$$

und dem Wachstum der Funktion  $f$ . Unter der Annahme, dass die Funktion durch  $f(0) = 1$  normiert ist, gilt die Abschätzung

$$2^{N(r)} \leq \sup_{|z|=2r} |f(z)|. \quad (1.4.5-C)$$

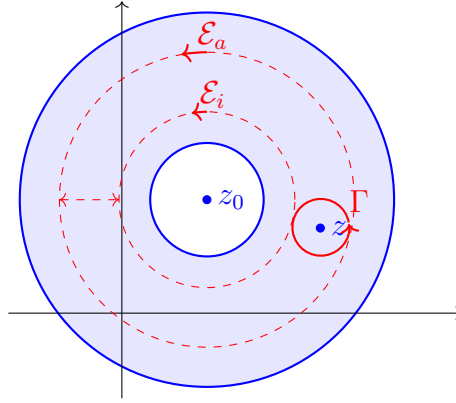
Diese können wir hier an dieser Stelle nicht beweisen.

## 1.5 Laurentreihen und Singularitäten

**1.5.1.** Wir betrachten zuerst holomorphe Funktionen auf speziellen Gebieten. Sei dazu  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $0 \leq \rho_i < \rho_a$  und

$$\mathbb{K}_{\rho_i, \rho_a}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_i < |z - z_0| < \rho_a\} \quad (1.5.1-A)$$

der *Kreisring* um  $z_0$  mit innerem Radius  $\rho_i$  und äußerem Radius  $\rho_a$ . Sei weiter die Funktion  $f : \mathbb{K}_{\rho_i, \rho_a} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z \in \mathbb{K}_{\rho_i, \rho_a}$ .



Dann impliziert die Cauchysche Integralformel für einen den Punkt  $z$  in  $\mathbb{K}_{\rho_i, \rho_a}$  einmal positiv umlaufende Kurve  $\Gamma$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.5.1-B)$$

Der Integralsatz von Cauchy erlaubt uns nun, die Kurve  $\Gamma$  durch eine dazu homologe Kurve zu ersetzen. Dazu wählen wir wie in der Skizze angegeben zwei positiv orientierte Kreise  $\mathcal{E}_i$  und  $\mathcal{E}_a$  um  $z_0$ . Dann ist  $\Gamma$  zu  $\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_i$  homolog und es folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{E}_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{E}_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.5.1-C)$$

Auf dem Kreis  $\mathcal{E}_a$  können wir nun die geometrische Summenformel anwenden und den Integranden in die auf  $\mathcal{E}_a$  gleichmäßig konvergente Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \quad (1.5.1-D)$$

entwickeln. Die gleichmäßige Konvergenz folgt, da  $z$  innerhalb des Kreises  $\mathcal{E}_a$  liegt. Analog gilt auf  $\mathcal{E}_i$  (da diesmal  $z$  außerhalb des Kreises liegt)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-k}}{(\zeta - z_0)^{1-k}}. \quad (1.5.1-E)$$

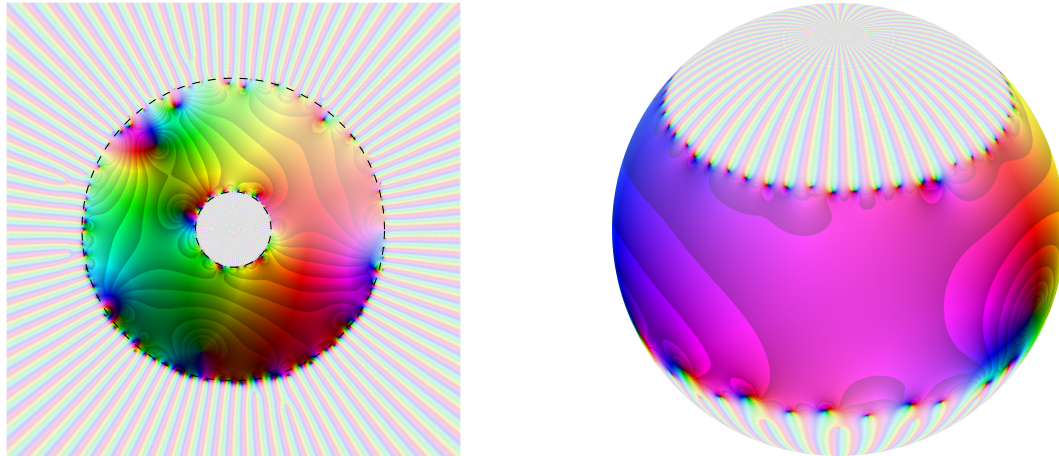
Es gilt also die Reihendarstellung

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{E}_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{E}_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \int_{\mathcal{E}_a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} (z - z_0)^{-k} \int_{\mathcal{E}_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1-k}} d\zeta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned} \quad (1.5.1-F)$$

mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+k}} d\zeta, \tag{1.5.1-G}$$

wobei der Integrationsweg einmal den Punkt  $z_0$  positiv innerhalb des Gebietes umläuft. Eine Reihendarstellung dieser Form wird als *Laurentreihe*<sup>13</sup> bezeichnet. Die Formeln (1.5.1-G) zur Bestimmung der Koeffizienten verallgemeinern wiederum die Cauchysche Integralformel.



Partialsomme einer Laurentreihe in  $\mathbb{C}$  bzw. auf  $\widehat{\mathbb{C}}$

Konvergente Laurentreihen konvergieren auf Kreisringen  $\mathbb{K}_{\rho_i, \rho_a}$  (wobei hier auch  $\rho_i = 0$  und  $\rho_a = +\infty$  auftreten können). Zerlegt man eine Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{1.5.1-H}$$

in ihren *Hauptteil* (also den singulären Anteil) und den Potenzreihenanteil, so konvergiert letzterer in einer Kreisscheibe  $\mathbb{B}_{\rho_a}(z_0)$ , deren Radius mit der Formel von Cauchy–Hadamard (1.2.1-C) berechnet werden. Der Hauptteil ist ebenso eine Potenzreihe in der Variablen  $(z - z_0)^{-1}$ , konvergiert also im Inneren von  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{B}_{\rho_i}(z_0)$ . Dabei impliziert (1.2.1-C) direkt

$$\rho_i = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|} \quad \text{und} \quad \rho_a = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}. \tag{1.5.1-I}$$

Gilt nun  $\rho_i < \rho_a$ , so folgt Konvergenz auf dem Kreisring  $\mathbb{K}_{\rho_i, \rho_a}$ . Andernfalls ist die Reihe divergent für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

Im Weiteren wollen wir Laurentreihen nutzen, um isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen genauer zu untersuchen.

**1.5.2.** Sei  $U$  offen und  $z_\bullet \in U$  ein Punkt. Sei weiter  $f : U \setminus \{z_\bullet\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann bezeichnen wir den Punkt  $z_\bullet$  als

<sup>13</sup>PIERRE ALPHONSE LAURENT, 1813–1854

- eine *hebbare Singularität* (also eigentlich *keine* Singularität), falls  $f$  in  $z_\bullet$  stetig fortsetzbar ist und diese Fortsetzung wiederum eine holomorphe Funktion liefert;
- eine *isolierte Singularität*, falls es keine solche Fortsetzung gibt.

Da  $z_\bullet$  innerer Punkt von  $U$  war, gibt es ein  $\rho$  mit  $\mathbb{B}_\rho(z_\bullet) \subset U$ . Damit ist  $f : \mathbb{K}_{0,\rho}(z_\bullet) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und es gibt eine Darstellung von  $f$  als Laurentreihe um  $z_\bullet$ . Wir bezeichnen eine isolierte Singularität  $z_\bullet$  als

- eine *Polstelle* von  $f$ , falls der Hauptteil der Laurentreihe nur endlich viele von Null verschiedene Summanden besitzt und damit  $f$  von der Form

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k(z - z_\bullet)^k = (z - z_\bullet)^{-N} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l-N}(z - z_\bullet)^l \quad (1.5.2-A)$$

für ein  $N < 0$  und mit  $a_{-N} \neq 0$  ist;

- eine *wesentliche Singularität*, falls der Hauptteil der Laurentreihe unendlich viele von Null verschiedene Koeffizienten besitzt.

Es gibt auch nicht isolierte Singularitäten. So können Funktionen auch entlang ganzer Kurven singulär (also nicht in Punkte der Kurve hinein einseitig stetig fortsetzbar) sein. Diese wollen wir hier nicht diskutieren.

☞ **1.5.3 Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz).** *Angenommen, die holomorphe Funktion  $f : U \setminus \{z_\bullet\} \rightarrow \mathbb{C}$  ist in einer Umgebung von  $z_\bullet$  beschränkt, es gibt also  $\rho > 0$  und  $M > 0$ , so dass für  $z \in U \setminus \{z_\bullet\}$*

$$|z - z_\bullet| \leq \delta \quad \implies \quad |f(z)| \leq M \quad (1.5.3-A)$$

*gilt. Dann ist  $z_\bullet$  eine hebbare Singularität und  $f$  in  $z_\bullet$  holomorph fortsetzbar.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass die negativen Koeffizienten der Laurentreihe alle gleich Null sind. Wir wählen dazu als Integrationsweg einen Kreis um  $z_\bullet$  mit Radius  $r < \rho$ . Dann impliziert (1.5.1-G) für  $k < 0$

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_\bullet)^{k+1}} d\zeta \right| \leq Mr^{-k} \longrightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.5.3-B)$$

und damit die Behauptung. □

**1.5.4.** Ist  $z_\bullet$  eine Polstelle der Funktion  $f : U \setminus \{z_\bullet\} \rightarrow \mathbb{C}$ , und gilt

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z - z_\bullet)^k = (z - z_\bullet)^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l-m}(z - z_\bullet)^l = (z - z_\bullet)^{-m} g(z) \quad (1.5.4-A)$$

für ein  $m > 0$  und mit  $a_{-m} \neq 0$ , so bezeichnet man die Zahl  $m$  als die *Ordnung* der Polstelle. Die angegebene Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph und außerhalb des Konvergenzkreises der angegebenen Reihe einfach durch das Produkt

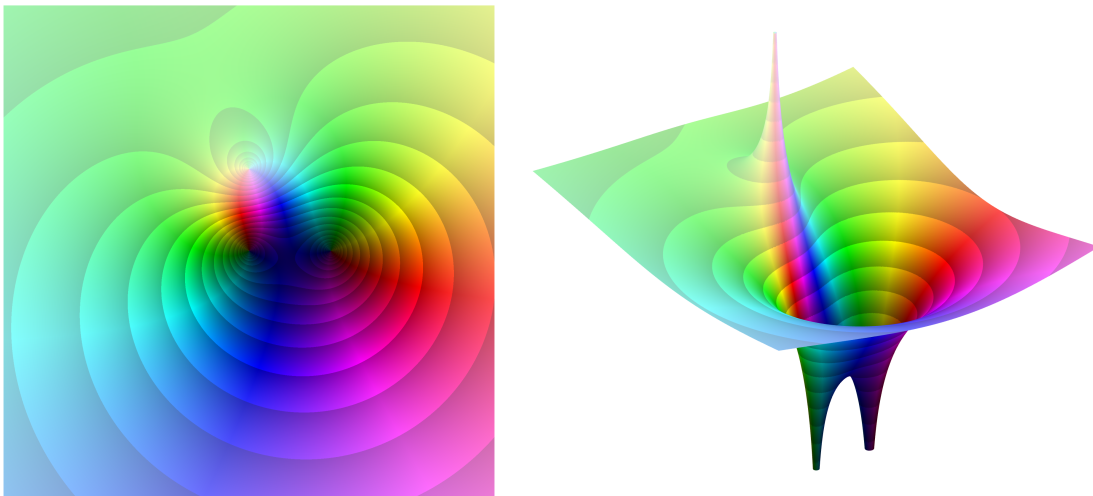
$$g(z) = (z - z_\bullet)^m f(z) \quad (1.5.4-B)$$

gegeben. Sie erfüllt dabei  $g(z_\bullet) = a_{-m} \neq 0$ .

Funktionen mit Polstellen kann man auf natürliche Weise als Abbildungen in die Riemannsche Zahlenkugel  $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  verstehen. Da  $g(z_\bullet) \neq 0$  ist, besitzt die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_\bullet)^m}{g(z)} \quad (1.5.4-C)$$

in  $z_\bullet$  eine hebbare Singularität und ist damit holomorph. Also ist  $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  stetig und da wir die Umgebung von  $\infty$  durch die Karte  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \ni w \mapsto w^{-1} \in \mathbb{C}$  beschreiben auch komplex differenzierbar. Eine Funktion die nur Polstellen als Singularitäten besitzt, also eine komplex differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , wird als *meromorph* auf  $U$  bezeichnet.



Phasenporträt und analytische Landschaft zu  $f(z) = \frac{z(z-1)}{z-i}$

Es ist also naheliegend, den Funktionswert der holomorphen Funktion in einer Polstelle einfach als  $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$  zu bezeichnen. Wesentliche Singularitäten erlauben keine solche Fortsetzung auf die Zahlenkugel. Vielmehr gilt:

☞ **1.5.5 Satz** (Casorati<sup>14</sup>–Weierstrass<sup>15</sup>, Sochozki<sup>16</sup>). *Angenommen,  $z_\bullet$  ist eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion  $f : U \setminus \{z_\bullet\} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist für jedes hinreichend kleine  $\rho > 0$  dass Bild der Menge  $\mathbb{K}_{0,\rho}(z_\bullet)$  unter  $f$  dicht in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Angenommen,  $w \in \mathbb{C}$  liegt nicht im Abschluss des Bildes  $f[\mathbb{K}_{0,\rho}(z_\bullet)]$ . Dann ist  $\mathbb{K}_{0,\rho}(z_\bullet) \ni z \mapsto (f(z) - w)^{-1} \in \mathbb{C}$  holomorph und auf der angegebenen Menge beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist damit  $z \mapsto (f(z) - w)^{-1}$  in  $z_\bullet$  holomorph fortsetzbar und  $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  damit holomorph. Also ist  $f$  in  $z_\bullet$  holomorph oder besitzt einen Pol.  $\square$

<sup>14</sup>FELICE CASORATI 1835–1890

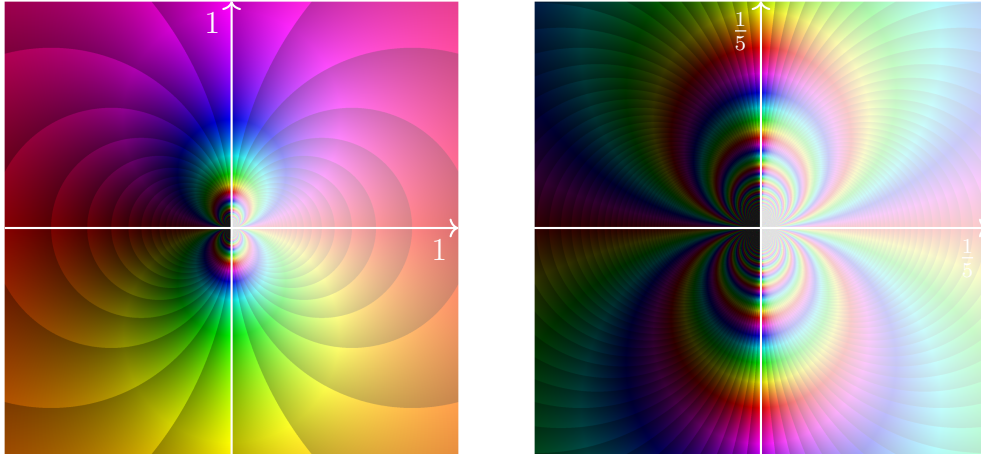
<sup>15</sup>KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS 1815–1897

<sup>16</sup>JULIAN KAROL SOCHOZKI (Юлиан Васильевич Сохоцкий), 1842–1927

✂ **1.5.6 Beispiel.** Ein typisches Beispiel einer Funktion mit einer wesentlichen Singularität ist

$$f(z) = \exp(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}, \quad z \neq 0. \quad (1.5.6-A)$$

Die Funktion ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und singularär in  $z = 0$ . Die Singularität ist nachfolgend graphisch dargestellt.



Verhalten von  $f(z) = \exp(z^{-1})$  um  $z = 0$

## 1.6 Analytische Fortsetzungen

Lemma 1.2.7 impliziert, dass holomorphe Funktionen durch ihr Verhalten auf einer konvergenten Punktfolge eindeutig bestimmt sind. Es gilt insbesondere

☞ **1.6.1 Korollar (Identitätssatz).** Sei  $U$  zusammenhängend. Seien weiter  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und gelte

- für eine in  $U$  konvergente Folge  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Gleichung  $f(z_k) = g(z_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;
- oder für ein  $z_\bullet \in U$  die Gleichung  $f^{(k)}(z_\bullet) = g^{(k)}(z_\bullet)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

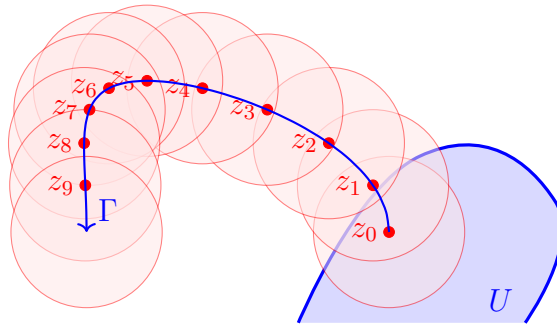
Dann folgt  $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in U$ .

*Beweis.* Wir beweisen zuerst den ersten Fall. Sei  $z_\bullet = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ . Dann impliziert Lemma 1.2.7, dass um  $z_\bullet$  eine Kreisscheibe  $\mathbb{B}_\rho(z_\bullet)$  auf der

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_\bullet)^k = g(z), \quad z \in \mathbb{B}_\rho(z_\bullet) \quad (1.6.1-A)$$

gilt. Wir betrachten nun die Menge  $M = \{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ . Diese ist nach Definition abgeschlossen in  $U$ . Ebenso gibt es um jeden ihrer Häufungspunkte in  $U$  nach dem eben gezeigten eine offene Kreisscheibe, die zu  $M$  gehört. Damit ist die Menge der Häufungspunkte von  $M$  in  $U$  offen und abgeschlossen, also leer oder eine Zusammenhangskomponente. Da  $z_\bullet \in M$  gilt und  $U$  zusammenhängend ist, muss  $M = U$  gelten und die Aussage ist gezeigt. Im zweiten Fall folgt (1.6.1-A) direkt aus (1.2.6-C).  $\square$

**1.6.2 (Kreisketten).** Holomorphe Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sind lokal um jeden Punkt durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar. Dabei kann das Konvergenzgebiet der Reihe über die Menge  $U$  hinausragen. Dies kann man nutzen, um die Funktion  $f$  fortzusetzen.



Sei dazu  $\Gamma$  eine orientierte Kurve in  $\mathbb{C}$  mit Startpunkt  $z_0 \in U$ . Wir sagen,  $f$  ist entlang  $\Gamma$  *analytisch fortsetzbar*, falls es eine Zerlegung  $\mathfrak{Z} = (z_0, z_1, \dots)$  von  $\Gamma$ , so dass

- $z_1$  im Konvergenzgebiet der Potenzreihendarstellung von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $z_0$  liegt;
- damit die Taylorreihe

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \tag{1.6.2-A}$$

in einer Umgebung von  $z_0$  die Funktion  $f$  darstellt und diese durch die Reihe insbesondere in den Punkt  $z_1$  holomorph fortsetzt und damit um  $z_1$  eine Taylorreihe

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1)^k \tag{1.6.2-B}$$

bestimmt;

- und rekursiv  $z_{j+1}$  jeweils im Konvergenzgebiet der Potenzreihendarstellung

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0^{(k)}(z_j)}{k!} (z - z_j)^k \tag{1.6.2-C}$$

um  $z_j$  liegt.

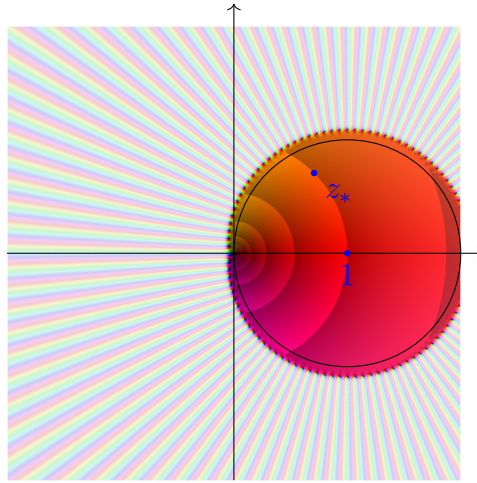
Das sich ergebende Verfahren zur Fortsetzung von  $f$  entlang  $\Gamma$  wird als *Kreiskettenverfahren* bezeichnet. Der Funktionswert der Fortsetzung im Endpunkt der Kurve  $\Gamma$  hängt dabei von der Kurve  $\Gamma$ , aber nicht von der gewählten Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  ab.

✂ **1.6.3 Beispiel.** Wir betrachten ein Beispiel und entwickeln dazu die Wurzelfunktion  $f(z) = \sqrt{z}$  im Punkt  $z = 1$  in eine Potenzreihe. Dies führt auf die spezielle Binomialreihe

$$\begin{aligned} f(z) = \sqrt{z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (z - 1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \prod_{l=0}^{k-1} \left( \frac{1}{2} - l \right) \right) \frac{(z - 1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (z - 1)^k \end{aligned} \tag{1.6.3-A}$$



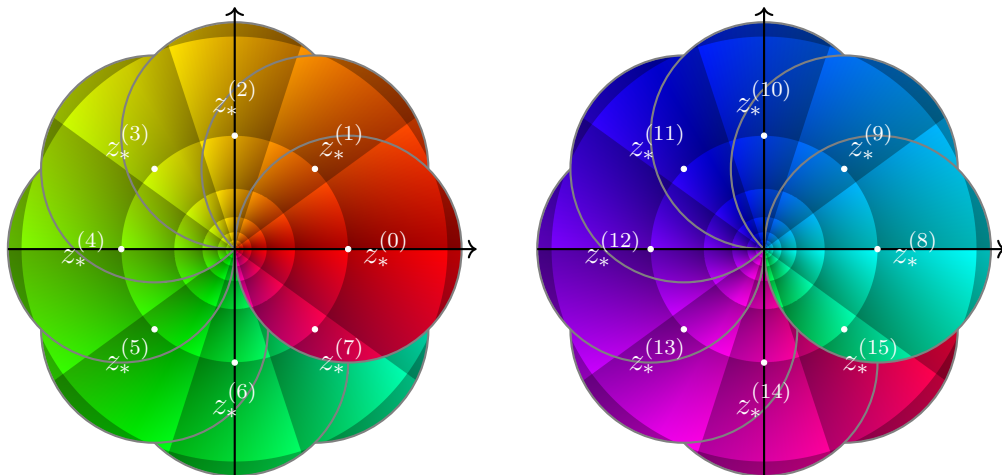
um den Entwicklungspunkt  $z_0 = 1$  mit Konvergenzradius 1. Eine Partialsumme dieser Reihe ist nachfolgend dargestellt.



Im Konvergenzgebiet liegt dabei insbesondere der Punkt  $z_* = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Da die durch die Reihe (1.6.3-A) dargestellte Funktion  $f$  damit in  $z_*$  wiederum analytisch ist, ergibt sich im Entwicklungspunkt  $z_*$  eine Darstellung als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k = f(z_*) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (z - z_*)^k z_*^{-k}. \quad (1.6.3-B)$$

Setzt man dies schrittweise mit den Entwicklungspunkten  $z_* \in \{e^{in\frac{\pi}{4}} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  fort, so ergibt sich das linke nachfolgende Bild,



wobei die neuen Konvergenzkreise jeweils unter die bereits bestimmten gelegt sind. Nach einem Umlauf um den Ursprung erhalten wir die rechts zuoberst liegende Kreisscheibe, ein zweiter Umlauf führt wieder zurück auf die linke Seite.

**1.6.4.** Die analytische Fortsetzung hängt nicht von der Kurve  $\Gamma$  sondern nur von der Homotopieklasse der Kurve ab. Dies müssen wir zuerst definieren. Wir nennen zwei

(durch dasselbe Intervall  $I = [a, b]$  parametrisierte) orientierte Kurven  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  zwischen den gleichen Endpunkten *homotop* in  $U$ , falls es eine *Homotopie*, also eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1] \times I \rightarrow U \tag{1.6.4-A}$$

mit

- $h(0, \cdot) = \gamma_0 : I \rightarrow \Gamma_0$  Parametrisierung von  $\Gamma_0$ ;
- $h(1, \cdot) = \gamma_1 : I \rightarrow \Gamma_1$  Parametrisierung von  $\Gamma_1$ ; und
- für jedes  $t \in [0, 1]$  durch  $h(0, a) = h(t, a) = h(1, a)$  und  $h(0, b) = h(t, b) = h(1, b)$

gibt. Wir schreiben dafür  $\Gamma_0 \simeq_U \Gamma_1$ . Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation auf orientierten Kurven. Die triviale Homotopie  $h(t, \cdot) = \gamma_0(\cdot)$  ergibt  $\Gamma_0 \simeq_U \Gamma_0$ . Gilt  $\Gamma_0 \simeq_U \Gamma_1$  und  $\Gamma_1 \simeq_U \Gamma_2$  und ist  $h_1$  eine Homotopie von  $\Gamma_0$  nach  $\Gamma_1$  und  $h_2$  eine Homotopie von  $\Gamma_1$  nach  $\Gamma_2$ , so gibt es eine Umparametrisierung  $\varphi : I \rightarrow I$  mit  $h_1(1, \cdot) = h_2(0, \varphi(\cdot))$  und

$$h_1 \sqcup h_2 : [0, 1] \times I \rightarrow U, \quad h_1 \sqcup h_2(t, \cdot) = \begin{cases} h_1(2t, \cdot), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h_2(2t - 1, \varphi(\cdot)), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1.6.4-B}$$

ist eine Homotopie von  $\Gamma_0$  nach  $\Gamma_2$  und es folgt  $\Gamma_0 \simeq_U \Gamma_2$ . Weiter ist für  $\Gamma_0 \simeq_U \Gamma_1$  mit Homotopie  $h$  durch  $h^-(t, \cdot) = h(1 - t, \cdot)$  eine Homotopie von  $\Gamma_1$  nach  $\Gamma_0$  gegeben und es folgt  $\Gamma_1 \simeq_U \Gamma_0$ .

Eine geschlossene Kurve, also eine Kurve die einen Punkt  $z_\bullet$  mit sich selbst verbindet, heißt *nullhomotop*, falls sie zur trivialen Kurve  $\{z_\bullet\}$  homotop ist.

✂ **1.6.5 Beispiel (Windungszahlen).** Kurven in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind homotop genau dann wenn sie dieselben Winkel um den Ursprung umlaufen. Auch dies präzisieren wir. Für eine zwei Punkte  $z_0$  und  $z_\bullet$  verbindende orientierte Kurve  $\Gamma$  in  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  bezeichnen wir mit

$$\angle(\Gamma) = \arg z \Big|_{z=z_0}^{z_\bullet} \tag{1.6.5-A}$$

den von der Kurve um den Ursprung umlaufenen Winkel zwischen Anfangs- und Endpunkt. Dabei haben wir das nur modulo  $2\pi$  definierte Argument  $\arg z \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass es entlang der Kurve  $\Gamma$  stetig ist. Sind  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  nun zwei Kurven, die beide  $z_0$  und  $z_\bullet$  verbinden, so gilt

$$\Gamma_0 \simeq_U \Gamma_1 \iff \angle(\Gamma_0) = \angle(\Gamma_1). \tag{1.6.5-B}$$

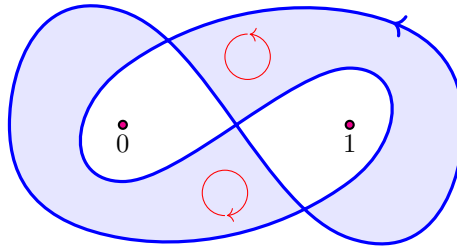
Zum Beweis der Rückrichtung genügt es, eine Homotopie anzugeben. Wir überlassen dies als Übung.

Für eine geschlossene Kurve  $\Gamma$  ist  $\angle(\Gamma)$  stets ein Vielfaches von  $2\pi$ . Wir definieren deshalb, die *Windungszahl* der Kurve  $\Gamma$  um den Punkt 0 als

$$\text{wind}_0(\Gamma) := \frac{\angle(\Gamma)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \arg z \Big|_{\Gamma}. \tag{1.6.5-C}$$

✂ **Ergänzung.** Homotopie und Homologie von Kurven sind eng verwandte Konzepte, allerdings sind nicht alle Kurven  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwischen zwei gegebenen Punkten die homolog sind auch homotop. Dazu ein

Beispiel. Die nachfolgen skizzierte Kurve in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$



(1.6.5-D)

ist nullhomolog, da es sich um den (richtig orientierten!) Rand zweier Teilgebiete handelt. Allerdings ist die Kurve nicht nullhomotop in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

☞ **1.6.6 Satz (Monodromiesatz).** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in U$  und  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus U$ . Seien weiter  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  zwei in  $\mathbb{C}$  homotope die Punkte  $z_0$  und  $z_1$  verbindende Kurven mit Homotopie  $h : [0, 1] \times I \rightarrow \mathbb{C}$ . Angenommen,  $f$  ist entlang jeder der Zwischenkurven  $\Gamma_t$  parametrisiert durch  $h(t, \cdot) : I \rightarrow \Gamma_t$  für  $t \in [0, 1]$  analytisch fortsetzbar. Dann liefert jede dieser Fortsetzungen im Punkt  $z_1$  denselben Funktionswert.

*Beweisskizze.* Zur Vereinfachung betrachten wir nur einfache Kurven, so dass Fortsetzungen auf einer hinreichend kleinen Umgebung der Kurve in  $\mathbb{C}$  analytische Funktionen bestimmen. Wir bezeichnen den Funktionswert in  $z_1$ , der durch analytische Fortsetzung entlang  $\Gamma_t$  bestimmt ist, als  $f_t(z_1)$ . Dies liefert eine Funktion  $[0, 1] \ni t \mapsto f_t(z_1) \in \mathbb{C}$ , die wir genauer untersuchen.

Wir wählen dazu  $t \in [0, 1]$ . Zur analytischen Fortsetzung entlang der Kurve  $\Gamma_t$  genügt eine Zerlegung  $\mathfrak{J}_t$  von  $[0, 1]$  und damit überdecken endlich viele Kreisscheiben  $\Gamma_t$ . Ist nun  $\varepsilon > 0$  klein genug, so liegt auch jede Kurve  $\Gamma_s$  zu  $s \in [0, 1]$  mit  $|t - s| < \varepsilon$  in der Vereinigung dieser Kreisscheiben und der Identitätssatz 1.6.1 impliziert dass die Fortsetzungen übereinstimmen. Es gilt also  $f_s(z_1) = f_t(z_1)$  für  $|s - t| < \varepsilon$ .

Damit ist  $[0, 1] \ni t \mapsto f_t(z_1)$  lokal in der Umgebung jedes  $t \in [0, 1]$  konstant, also konstant auf  $[0, 1]$ . Es folgt  $f_0(z_1) = f_1(z_1)$ .  $\square$

Basierend auf der gerade genutzten Beweisidee bezeichnen wir zwei Kurven  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  von  $z_0$  zu einem gemeinsamen Endpunkt, entlang derer eine Funktion  $f$  von  $z_0$  aus analytisch fortsetzbar ist, als *homotop* (im Sinne analytischer Fortsetzungen einer gegebenen Funktion), falls es eine Homotopie  $h$  von  $\Gamma_0$  nach  $\Gamma_1$  gibt und  $f$  entlang jeder dadurch bestimmten Zwischenkurve  $\Gamma_t$  analytisch fortsetzbar ist. In diesem Fall schreiben wir  $\Gamma_0 \simeq_f \Gamma_1$ .

**1.6.7 (Riemannsche Flächen).** Wir wollen holomorphe Funktionen maximal analytisch fortsetzen. Ist eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  entlang jeder Kurve in  $\mathbb{C}$  fortsetzbar, so sind alle Kurven homotop und die Fortsetzung ist nach dem Monodromiesatz eindeutig bestimmt. Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall und wir müssen uns beim Fortsetzen in einen Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus U$  auf eine Kurve beziehungsweise besser eine Homotopieklasse von Kurven festlegen.

Um trotzdem alle Fortsetzungen betrachten zu können, nutzen wir ein allgemeineres Konzept und definieren holomorphe Funktionen nicht auf Teilmengen von  $\mathbb{C}$  sondern

auf Riemannschen Flächen. Diese sehen lokal wie offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$  aus, erlauben uns aber über jeder komplexen Zahl konsistent mehrere Funktionswerte zu definieren. Anstatt eine Definition zu formulieren, konstruieren wir die *Riemannsche Fläche* der analytischen Fortsetzung einer Funktion. Dazu nehmen wir an, dass  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  holomorph ist. Wir fixieren einen Punkt  $z_* \in U$  und betrachten alle orientierten Kurven in  $\mathbb{C}$  mit Startpunkt  $z_*$  entlang derer  $f$  analytisch fortsetzbar ist und bilden die Menge der Homotopieklassen solcher Kurven, also

$$\mathcal{M}_f = \{[\Gamma_z]_{\simeq_f} \mid f \text{ ist fortsetzbar entlang } \Gamma_z \text{ von } z_* \text{ nach } z\}. \quad (1.6.7\text{-A})$$

Ist  $z_o$  Endpunkt einer solchen Kurve  $\Gamma_{z_o}$ , so gibt es um  $z_o$  eine Kreisscheibe  $\mathbb{B}_\rho(z_o) \subseteq \mathbb{C}$  und eine entsprechende analytische Fortsetzung  $f : \mathbb{B}_\rho(z_o) \rightarrow \mathbb{C}$ . Für alle weiteren Punkte  $z \in \mathbb{B}_\rho(z_o)$  liefert die Kurve ergänzt um die Verbindungsstrecke  $S_{z_o,z}$  eine Kurve  $\Gamma_z$  zum analytisch Fortsetzen in  $z$  mit zu  $f$  konsistentem Funktionswert. Wir können also die Punkte in  $\mathbb{B}_\rho(z_o)$  mit den Homotopieklassen dieser Kurven identifizieren und erhalten eine Bijektion

$$\pi : \{[\Gamma_{z_o} + S_{z_o,z}]_{\simeq_f} \in \mathcal{M}_f \mid z \in \mathbb{B}_\rho(z_o)\} \longrightarrow \mathbb{B}_\rho(z_o). \quad (1.6.7\text{-B})$$

Jeder Punkt aus  $\mathcal{M}_f$  besitzt damit auf natürliche Weise eine Umgebung, auf der  $\mathcal{M}_f$  mit einer Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  identifiziert werden kann. Darüberhinaus liefert die analytische Fortsetzung auf ebenso natürliche Weise eine Funktion

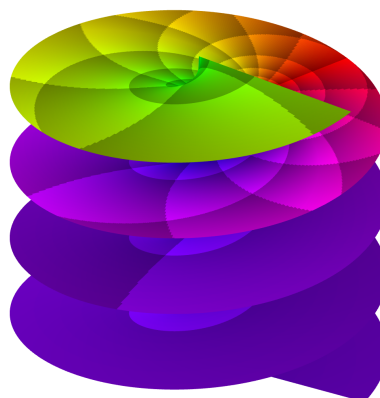
$$f : \mathcal{M}_f \rightarrow \mathbb{C}. \quad (1.6.7\text{-C})$$

Die Menge  $\mathcal{M}_f$  ist ein Beispiel einer Riemannschen Fläche, allerdings ist diese noch zu groß. Auf  $\mathcal{M}_f$  gibt es eine natürliche Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen zwei Punkte  $[\Gamma_z]_{\simeq_f}, [\tilde{\Gamma}_z]_{\simeq_f} \in \mathcal{M}_f$ , die über derselben komplexen Zahl  $z$  liegen, als äquivalent, falls die Fortsetzungen von  $f$  in Umgebungen dieser Punkte übereinstimmen. Identifiziert man äquivalente Punkte, so ergibt sich die *Riemannsche Fläche  $\mathcal{R}_f$  der Funktion  $f$* .

Die Riemannsche Fläche  $\mathcal{R}_f$  der Fortsetzung einer Funktion entsteht also, indem man alle Fortsetzungen bildet und diese (wenn sie übereinstimmen) miteinander identifiziert. Als Beispiel ist nachfolgend ein Ausschnitt der Riemannschen Fläche der Wurzelfunktion um den Ursprung dargestellt:



Riemannsche Fläche zu  $\sqrt{z}$

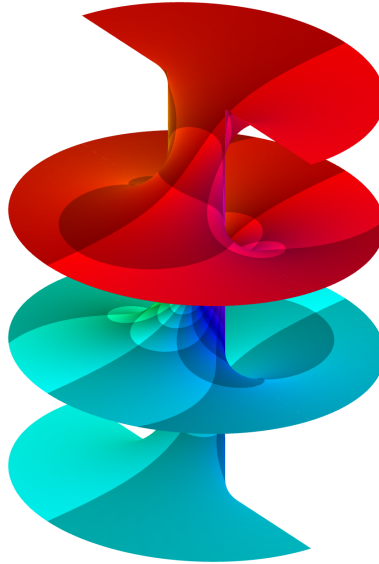


Riemannsche Fläche zu  $\log(z)$

Die Riemannsche Fläche der Logarithmusfunktion

$$f(z) = \log(z) = \ln |z| + i \arg z \quad (1.6.7-D)$$

entspricht einer Wendelfläche über  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , wobei die einzelnen Blätter durch die Windungszahl der zur Fortsetzung genutzten Kurve um den Ursprung bestimmt sind.



*Riemannsche Fläche zu  $\arctan z$*

Riemannsche Flächen zu Stammfunktionen sind mitunter einfach zu verstehen. Für  $\arctan z$  liefert

$$\arctan z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} = \frac{1}{2i} \int_0^z \left( \frac{1}{\zeta - i} - \frac{1}{\zeta + i} \right) d\zeta \quad (1.6.7-E)$$

mit Integration entlang einer Kurve  $\Gamma_{0,z}$  die 0 in  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$  mit  $z$  verbindet direkt die Fortsetzung entlang der gewählten Kurve. Da für Kurven, die nur den Punkt  $i$  einmal positiv umlaufen damit nach der Cauchyschen Integralformel

$$\oint \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} = \pi \quad (1.6.7-F)$$

und ebenso

$$\oint \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} = 0 \quad (1.6.7-G)$$

für das Kurvenintegral um jede beide Punkte  $\pm i$  einmal positiv umlaufende Kurve gilt, liefert die Differenz der Windungszahlen der Kurve  $\Gamma_{0,z}$  um die Punkte  $i$  und  $-i$  auf welchem Blatt der Fläche wir uns gerade befinden. Bei einem positiven Umlauf um den Punkt  $i$  erhöht sich der Funktionswert um  $\pi$ , bei einem positiven Umlauf um  $-i$  verringert sich der Funktionswert entsprechend um  $\pi$ .

✂ **Ergänzung.** Alle bisher gezeigten Sätze gelten auch, wenn man Funktionen statt auf Teilmengen von  $\mathbb{C}$  auf ihrer Riemannschen Fläche betrachtet. Beim Integralsatz von Cauchy ist dabei zu beachten, dass der Integrationsweg auf der Fläche nullhomolog sein muss und nicht nur seine Projektion in  $\mathbb{C}$  eine geschlossene Kurve bildet.

Integrale über geschlossene Kurven auf Riemannflächen können durchaus interessant sein. So liefert das Pochhammer<sup>17</sup>-Integral

$$(1 - e^{2\pi iz})(1 - e^{2\pi iw})B(z, w) = \oint_{\gamma} \zeta^{z-1}(1 - \zeta)^{w-1} d\zeta \quad (1.6.7-H)$$

über die in (1.6.5-D) dargestellte Kurve  $\gamma$  (allerdings verstanden auf der Riemannschen Fläche des Integranden und die Blätter so gewählt, dass der Integrand am mittleren Durchlauf von oben durch die reelle Achse für reelle  $z, w$  reellwertig ist) eine Darstellung der analytischen Fortsetzung der Beta-Funktion

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1 - t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0, \quad (1.6.7-I)$$

in beiden Variablen  $z$  und  $w$ . Es ist mit dem Satz von Morera einfach zu sehen, dass das Integral (1.6.7-H) sowohl in  $z$  als auch in  $w$  holomorph ist. Damit ist nur zu zeigen, dass für  $z, w > 0$  beide Ausdrücke für  $B(z, w)$  übereinstimmen. Dazu deformieren wir den Integrationsweg des Pochhammer-Integrals so, dass er (projiziert in die komplexe Ebene) zwischen 0 und 1 hin und herläuft. Der Integrand

$$\zeta^{z-1}(1 - \zeta)^{w-1} = e^{(z-1)\ln \zeta} e^{(w-1)\ln(1-\zeta)} \quad (1.6.7-J)$$

wird dabei bei einem (positiven) Umlauf um 0 mit dem Faktor  $e^{2\pi i(z-1)}$  und bei einem (positiven) Umlauf um 1 mit dem Faktor  $e^{2\pi i(w-1)}$  multipliziert. Damit folgt für  $z, w > 0$

$$\begin{aligned} & \oint_{\gamma} \zeta^{z-1}(1 - \zeta)^{w-1} d\zeta \\ &= (1 - e^{2\pi i(w-1)} + e^{2\pi i(z-1)}e^{2\pi i(w-1)} - e^{2\pi i(z-1)}) \int_0^1 t^{z-1}(1 - t)^{w-1} dt \\ &= (1 - e^{2\pi i(w-1)})(1 - e^{2\pi i(z-1)})B(z, w) \end{aligned} \quad (1.6.7-K)$$

unter Beachtung der Integrationsrichtungen der einzelnen Teilstücke.

## 1.7 Residuensatz und Integralberechnungen

**1.7.1.** Für eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{K}_{0,\rho}(z_{\bullet}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit Singularität in  $z_{\bullet}$  und Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_{\bullet})^k \quad (1.7.1-A)$$

bezeichnen wir den Koeffizienten vor  $(z - z_{\bullet})^{-1}$  als *Residuum* von  $f$  in  $z_{\bullet}$ , es gilt also mit der Formel (1.5.1-G) für die Laurentkoeffizienten

$$\operatorname{res}_{z_{\bullet}} f := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz. \quad (1.7.1-B)$$

Residuen können nicht nur durch Integrale berechnet werden. Handelt es sich um Polstellen der Funktion  $f$ , so gelten deutlich einfachere Formeln zur Residuenbestimmung. Besitzt  $f$  einen Pol erster Ordnung in  $z_{\bullet}$ , so gilt

$$\operatorname{res}_{z_{\bullet}} f = \lim_{z \rightarrow z_{\bullet}} (z - z_{\bullet})f(z). \quad (1.7.1-C)$$

<sup>17</sup>LEO AUGUST POCHHAMMER, 1841–1920

Handelt es sich um einen Pol der Ordnung  $m > 1$ , so gilt analog

$$\operatorname{res}_{z_\bullet} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_\bullet} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_\bullet)^m f(z), \quad (1.7.1-D)$$

was aus der Laurentreihendarstellung

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_\bullet)^m f(z) &= \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_\bullet)^m \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_\bullet)^k \\ &= \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_\bullet)^{m+k} \\ &= \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z - z_\bullet)^k \\ &= (m-1)! a_{-1} + \sum_{k=m}^{\infty} a_{k-m} k(k-1) \cdots (k-m+2) (z - z_\bullet)^{k-m+1} \end{aligned} \quad (1.7.1-E)$$

einfach nachzurechnen ist. Residuen sind wichtig zur Integralberechnung.

☞ **1.7.2 Satz (Residuensatz).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $N \subset U$  eine diskrete<sup>18</sup> Teilmenge. Sei weiter  $f : U \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit Singularitäten in den Punkten  $z_\bullet \in N$ . Dann gilt für jede einfache geschlossene und rektifizierbare Kurve  $\Gamma = \partial G$  mit  $G \Subset U$ , die keinen der Punkte aus  $N$  enthält,

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_\bullet \in N \cap G} \operatorname{res}_{z_\bullet} f. \quad (1.7.2-A)$$

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus dem Integralsatz 1.3.8 von Cauchy in Verbindung mit Formel (1.7.1-B) für die Residuen.  $\square$

Erlauben wir auch Kurven, die einzelne Punkte mehrfach umlaufen, so ergibt sich zusammen mit den Windungszahlen

$$\operatorname{wind}_{z_\bullet} \Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_\bullet} = \frac{1}{2\pi} \arg(z - z_\bullet) \Big|_{z \in \Gamma} \quad (1.7.2-B)$$

der Kurve  $\Gamma$  um die Punkte  $z_\bullet$  nachfolgende Verallgemeinerung:

☞ **1.7.3 Korollar.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $N \subset U$  diskret und  $f : U \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für jede geschlossene rektifizierbare Kurve  $\Gamma$  in  $U \setminus N$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_\bullet \in N} \operatorname{wind}_{z_\bullet}(\Gamma) \operatorname{res}_{z_\bullet}(f). \quad (1.7.3-A)$$

<sup>18</sup>Das heißt, die Menge  $N$  besitzt in  $U$  keine Häufungspunkte.

✂ **1.7.4 Beispiele.** (i) Integriert man die Funktion  $f(z) = e^{-1/z}$  einmal entlang des Einheitskreises  $\mathcal{E}$  um den Ursprung, so ergibt sich wegen

$$e^{-1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} z^k, \quad z \neq 0, \quad (1.7.4-A)$$

als Wert des Integrals

$$\oint_{\mathcal{E}} e^{-1/z} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} [e^{-1/z}] = -2\pi i. \quad (1.7.4-B)$$

(ii) Als zweites Beispiel bestimmen wir das Integral

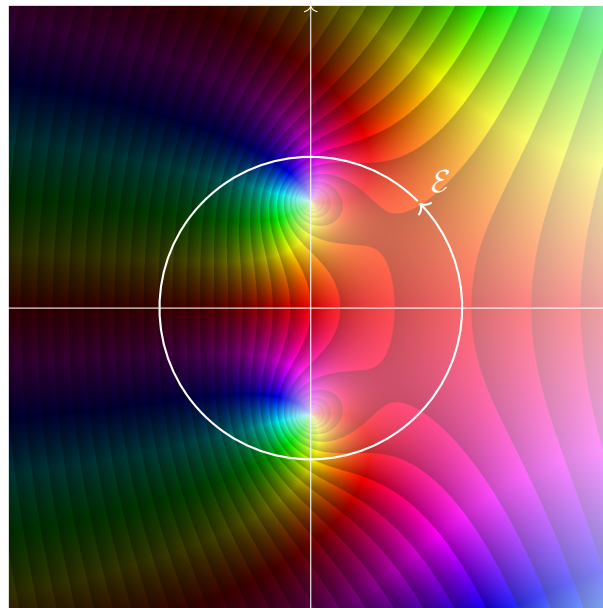
$$\oint_{\mathcal{E}} \frac{e^{zt}}{1+2z^2} dz. \quad (1.7.4-C)$$

entlang des Einheitskreises  $\mathcal{E}$ . Der Integrand ist singulär in den beiden Punkten  $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$  mit einfachen Polen, deren Residuen mittels (1.7.1-C) durch

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}i} \left[ \frac{e^{zt}}{(1-iz\sqrt{2})(1+iz\sqrt{2})} \right] &= \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}i} \frac{-1}{i\sqrt{2}} \frac{e^{zt}}{1-iz\sqrt{2}} = \frac{-e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}t}}{2i\sqrt{2}} \\ \operatorname{res}_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}i} \left[ \frac{e^{zt}}{(1-iz\sqrt{2})(1+iz\sqrt{2})} \right] &= \lim_{z \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}i} \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{e^{zt}}{1+iz\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}t}}{2i\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.7.4-D)$$

berechnet werden können. Es folgt

$$\oint_{\mathcal{E}} \frac{e^{zt}}{1+2z^2} dz = -2\pi i \left( \frac{e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}t}}{2i\sqrt{2}} - \frac{e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}t}}{2i\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2}\pi i \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{2}t \right). \quad (1.7.4-E)$$





(iii) Wir integrieren nochmals entlang des Einheitskreises. Der Integrand in

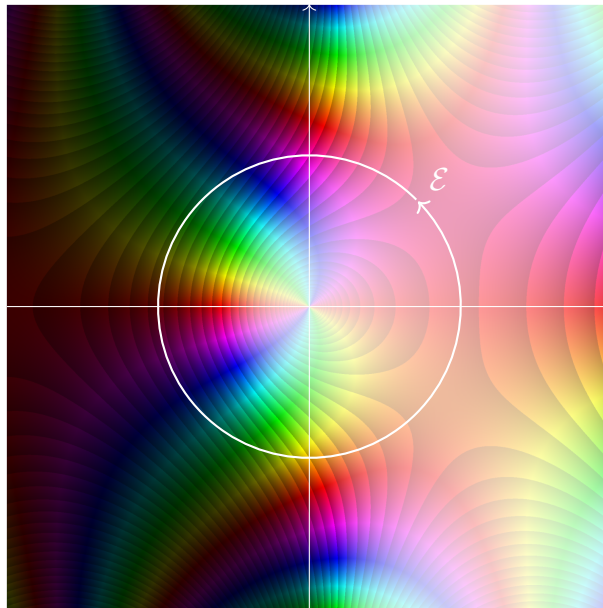
$$\oint_{\mathcal{E}} \frac{e^{t \sin z}}{z^2} dz \quad (1.7.4-F)$$

besitzt eine isolierte Singularität in  $z = 0$ . Diese ist ein Pol zweiter Ordnung, damit nutzen wir Formel (1.7.1-D) zur Berechnung des Residuums. Es gilt

$$\operatorname{res}_{z=0} \left[ \frac{e^{t \sin z}}{z^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} e^{t \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{t \sin z} t \cos z = t \quad (1.7.4-G)$$

und damit

$$\oint_{\mathcal{E}} \frac{e^{t \sin z}}{z^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \left[ \frac{e^{t \sin z}}{z^2} \right] = 2\pi i t. \quad (1.7.4-H)$$



Von besonderer Bedeutung ist der Residuensatz zur Berechnung von Integralen entlang der reellen Achse. Dazu zeigt man zuerst, dass unter entsprechenden Voraussetzungen das Integral entlang der reellen Achse mit dem über einen Halbkreis übereinstimmt und berechnet letzteres über den Residuensatz.

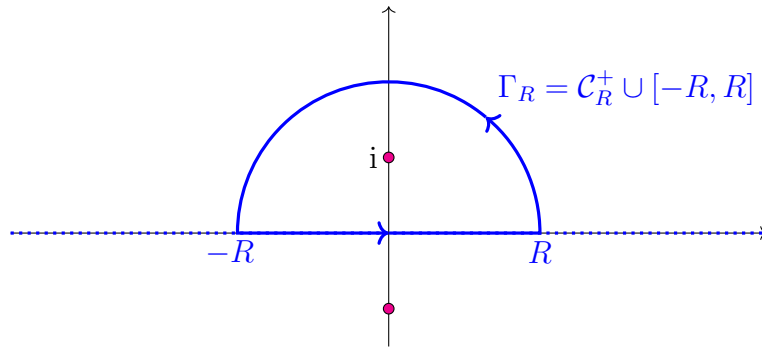
✂ **1.7.5 Beispiel.** Wir betrachten dazu ein Beispiel und berechnen das uneigentliche Riemannintegral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \left( = \left[ \arctan x \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} = \pi \right) \quad (1.7.5-A)$$

auf diese Weise. Da der Integrand durch die meromorphen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \quad (1.7.5-B)$$

mit einfachen Polen in  $\pm i$  gegeben ist, betrachten wir zu  $R > 1$  den nachfolgend skizzierten Integrationsweg  $\Gamma_R$  der sich aus dem Intervall  $[-R, R]$  und dem oberen Halbkreisbogen  $\mathcal{C}_R^+$  zusammensetzt.



Dieser umschließt den Pol in  $i$  mit Residuum  $\frac{1}{2i}$  und es folgt

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \left[ \frac{1}{1+z^2} \right] = \pi. \tag{1.7.5-C}$$

Weiterhin können wir das Integral über den oberen Halbkreisbogen durch das Maximum des Integranden und die Länge des Integrationsweges abschätzen. Dies führt wegen

$$|1+z^2| = |z-i||z+i| \geq (R-1)R, \quad z \in C_R^+, \tag{1.7.5-D}$$

auf

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \pi R \max_{z \in C_R^+} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \pi \frac{R}{(R-1)R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \tag{1.7.5-E}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \pi \end{aligned} \tag{1.7.5-F}$$

und wir habend das gewünschte Integral berechnet.

In diesem Beispiel konnten wir den Integranden entlang  $C_R^+$  durch  $1/R^2$  abschätzen und damit das Verschwinden des Integrals über den oberen Kreisbogen für  $R \rightarrow \infty$  zeigen. Ein ebenso oft nützliches Hilfsmittel ist nachfolgendes Lemma.

☞ **1.7.6 Lemma (Jordan<sup>19</sup>).** *Angenommen, die Funktion  $g : C_R^+ \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig. Dann gilt für alle  $a > 0$*

$$\left| \int_{C_R^+} e^{iaz} g(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{a} M_R \quad \text{mit} \quad M_R = \max_{z \in C_R^+} |g(z)|. \tag{1.7.6-A}$$

<sup>19</sup>CAMILLE JORDAN, 1838–1922

*Beweis.* Wir parametrisieren den Halbkreisbogen durch  $z = Re^{i\theta}$  mit  $\theta \in [0, \pi]$ . Dies führt auf  $dz = iRe^{i\theta} d\theta$

$$\int_{\mathcal{C}_R^+} e^{iaz} g(z) dz = iR \int_0^\pi e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)} g(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \quad (1.7.6-B)$$

und damit

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R^+} e^{iaz} g(z) dz \right| \leq RM_R \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} d\theta = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta} d\theta. \quad (1.7.6-C)$$

Es verbleibt, dieses Integral abzuschätzen. Wegen  $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$  für  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{2aR} (1 - e^{-aR}) \leq \frac{\pi}{2aR} \quad (1.7.6-D)$$

und damit

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R^+} e^{iaz} g(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{a} M_R, \quad (1.7.6-E)$$

also die Behauptung. □

☞ **1.7.7 Korollar.** Angenommen,  $g : \mathbb{C}_+ \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist meromorph in der (offenen) oberen Halbebene und stetig in ihrem Abschluss mit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Besitzt dann  $g$  endlich viele Polstellen  $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}_+$  und gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in \mathcal{C}_R^+} |g(z)| = 0, \quad (1.7.7-A)$$

so folgt für  $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} g(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res}_{z=z_k} \left[ z \mapsto e^{iaz} g(z) \right]. \quad (1.7.7-B)$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zu Beispiel (1.7.5), wobei anstatt der direkten Abschätzung des Integrals über den Halbkreisbogen  $\mathcal{C}_R^+$  Lemma 1.7.6 verwendet wird. □

Es gilt natürlich eine entsprechende Aussage für Funktionen, die meromorph in der unteren Halbebene sind. Dabei ist zu beachten, dass dann beim Schließen der Kontur der untere Halbkreisbogen entgegengesetzt zu durchlaufen ist und damit die Residuen negativ in das Integral einfließen. Der Vollständigkeit halber formulieren wir die entsprechende Aussage. Dabei ist  $\mathcal{C}_R^-$  der untere Halbkreisbogen.

**Korollar.** Angenommen,  $g : \mathbb{C}_- \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist meromorph in der (offenen) unteren Halbebene und stetig in ihrem Abschluss mit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Besitzt dann  $g$  endlich viele Polstellen  $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}_-$  und gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in \mathcal{C}_R^-} |g(z)| = 0, \quad (1.7.7-C)$$

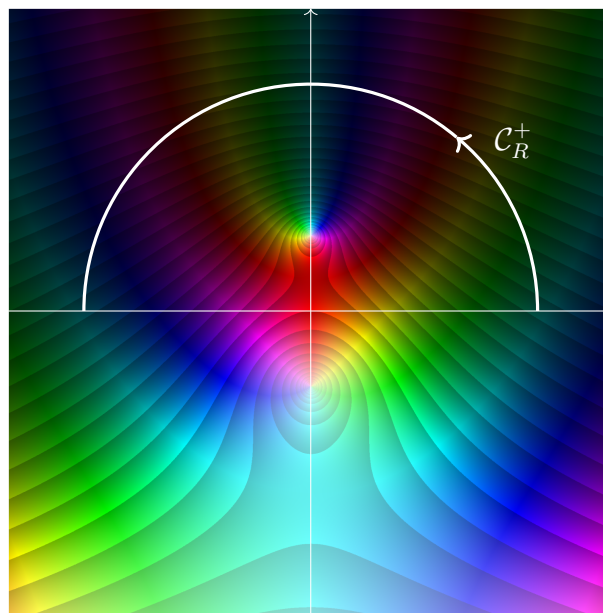
so folgt für  $a < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} g(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res}_{z=z_k} \left[ z \mapsto e^{iaz} g(z) \right]. \quad (1.7.7-D)$$

✂ **1.7.8 Beispiele.** (i) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \left[ \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{\pi}{e} \quad (1.7.8-A)$$

da der Integrand von der gewünschten Form ist und  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  meromorph mit Polstellen in  $\pm i$  ist und offenbar die Abschätzung (1.7.7-A) erfüllt.



(ii) Integrale, die trigonometrische Funktionen  $\sin x$  oder  $\cos x$  enthalten, können mitunter auf die Form von Folgerung 1.7.7 gebracht werden. Wir betrachten ebenso ein Beispiel. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{1+x^2} dx \right). \quad (1.7.8-B)$$

Das erste auftretende Integral haben wir oben berechnet. Für das zweite gilt entsprechend

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{1+x^2} dx = -2\pi i \operatorname{res}_{z=-i} \left[ \frac{e^{-iz}}{1+z^2} \right] = -2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{-iz}}{z-i} = \frac{\pi}{e}, \quad (1.7.8-C)$$

so dass sich für das Ausgangsintegral ebenso

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad (1.7.8-D)$$

ergibt. Wir hätten in diesem Fall aber auch kurz

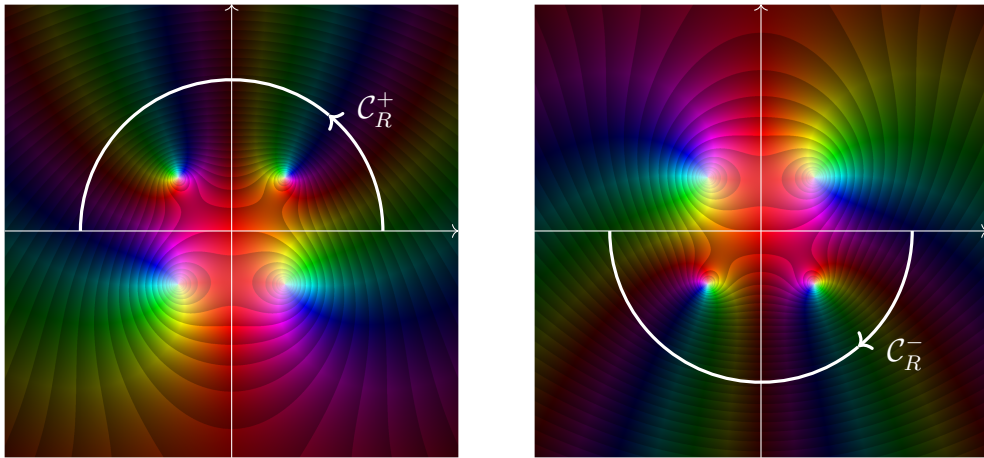
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad (1.7.8-E)$$

argumentieren können.

(iii) Ebenso gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^4} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{1+x^4} dx \right). \quad (1.7.8-F)$$

Die Polstellen des Integranden sind in den vier Punkten  $z = e^{i\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , von denen je nach Halbebene zwei zu beachten sind.



Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^4} dx = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}i}} \left[ \frac{e^{iz}}{1+z^4} \right] + \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}i}} \left[ \frac{e^{iz}}{1+z^4} \right] \right) \quad (1.7.8-G)$$

und

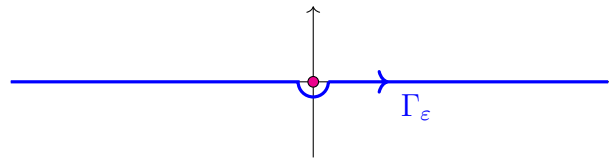
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{1+x^4} dx = -2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{5\pi}{4}i}} \left[ \frac{e^{-iz}}{1+z^4} \right] + \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{7\pi}{4}i}} \left[ \frac{e^{-iz}}{1+z^4} \right] \right). \quad (1.7.8-H)$$

Die Berechnung der Residuen und damit des Integrals überlassen wir als Übungsaufgabe.

✂ **1.7.9 Beispiel.** Mitunter muss man Integrale erst auf die passende Form bringen, um den Residuensatz auch anwenden zu können. Auch dazu ein Beispiel. Wir betrachten das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (1.7.9-A)$$

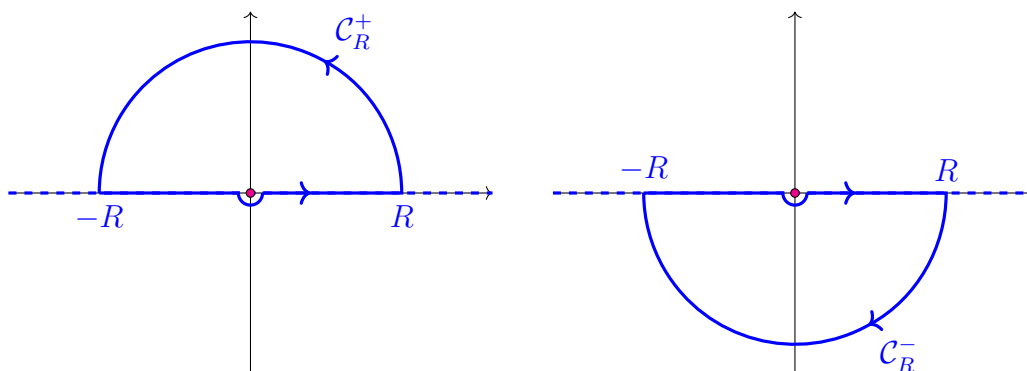
Der Integrand ist eine ganze Funktion, allerdings können wir die Definition des Sinus einsetzen und erzeugen damit Pole im Ursprung. Deswegen ersetzen wir den Integrationsweg zuerst durch eine Kurve  $\Gamma_\varepsilon$ , die den Ursprung auf einem Halbkreis mit Radius  $\varepsilon$  in der unteren Halbebene umrundet:



Damit gilt nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-iz}}{z} dz. \quad (1.7.9-B)$$

Die beiden sich nun ergebenden Integrale können wie vorher mit Residuensatz berechnet werden. Für das erste wählen wir wieder eine Kurve in der oberen Halbebene, für das zweite entsprechend eine in der unteren Halbebene



Das Jordanlemma impliziert wiederum, dass Kurvenintegrale über die Kreisbögen  $C_R^\pm$  jeweils für  $R \rightarrow \infty$  gegen Null streben. Für das zweite Integral und die Wahl des Integrationsweges in der unteren Halbebene liegt der Pol außerhalb und das Integral verschwindet. Für das erste Integral nutzen wir den Residuensatz. Es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-iz}}{z} dz = \pi \operatorname{res}_{z=0} \left[ \frac{e^{iz}}{z} \right] = \pi. \quad (1.7.9-C)$$

**1.7.10 (Null- und Polstellen zählendes Integral).** Eine weitere Anwendung des Residuensatzes ist das Zählen von Null- und Polstellen. Dazu definieren wir für eine meromorphe Funktion  $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  und  $z_\bullet \in U$  die (Nullstellen-) *Ordnung*

$$\operatorname{ord}_{z_\bullet} f = k \quad : \iff \quad f(z) = (z - z_\bullet)^k g(z), \quad g(z_\bullet) \neq 0, \quad (1.7.10-A)$$

wobei hier  $g$  holomorph in  $z_\bullet$  ist. Von Interesse ist diese Ordnung natürlich nur für  $z \in U$ , für die  $\operatorname{ord}_z f \neq 0$  gilt. Da

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - z_\bullet)^{k-1} g(z) + (z - z_\bullet)^k g'(z)}{(z - z_\bullet)^k g(z)} = \frac{k}{z - z_\bullet} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (1.7.10-B)$$

gilt, folgt

$$\operatorname{ord}_{z_\bullet} f = \operatorname{res}_{z_\bullet} \frac{f'}{f} \quad (1.7.10-C)$$

und wir erhalten aus dem Residuensatz eine einfache Zählformel für Null- und Polstellen in einem Teilgebiet  $G \subset U$ . Es gilt für  $\Gamma = \partial G$  und falls auf  $\Gamma$  keine Null- oder Polstellen liegen

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in N \cap G} \text{ord}_z f \quad (1.7.10-D)$$

mit  $N = \{z \in U \mid \text{ord}_z f \neq 0\}$ . Das angegebene Integral liefert also die Differenz der Anzahl der Nullstellen und Polstellen in  $G$  (gezählt mit Vielfachheit).

☞ **1.7.11 Satz (Rouché<sup>20</sup>).** Seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $U$  und  $G \Subset U$  ein echt enthaltenes Teilgebiet. Gilt dann auf  $\partial G$

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad (1.7.11-A)$$

so besitzen die Funktionen  $f$  und  $f + g$  im Teilgebiet  $G$  gleich viele Nullstellen (gezählt mit ihrer Vielfachheit).

*Beweis.* Es genügt, die Aussage für glatt berandete Teilgebiete  $G$  zu zeigen. Wir betrachten zu  $t \in [0, 1]$  die Familie der Funktionen

$$h_t(z) = f(z) + tg(z) \quad (1.7.11-B)$$

und zeigen, dass die Anzahl der Nullstellen von  $h_t$  in  $G$  unabhängig von  $t$  ist. Da  $h_t$  holomorph in  $U$  und auf  $\partial G$  nach Voraussetzung ungleich Null ist, ist die Anzahl der Nullstellen in  $G$  durch

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz \quad (1.7.11-C)$$

gegeben. Der Integrand hängt dabei stetig vom Parameter  $t$  ab, da  $\partial G$  kompakt ist ist damit auch

$$[0, 1] \ni t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz \quad (1.7.11-D)$$

stetig. Da diese Funktion nur ganzzahlige Werte annimmt, ist sie konstant auf dem Intervall  $[0, 1]$  und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{z \in G \\ f(z)=0}} \text{ord}_z(f) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz = \sum_{\substack{z \in G \\ f(z)+g(z)=0}} \text{ord}_z(f + g). \end{aligned} \quad (1.7.11-E)$$

Genau das war zu zeigen. □

✂ **Ergänzung.** Der Satz von Rouché kann auch symmetrisch formuliert werden. Gilt für alle  $z \in \partial G$  die Ungleichung

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad (1.7.11-F)$$

<sup>20</sup>EUGÈNE ROUCHÉ, 1832–1910

so stimmt die Anzahl der Nullstellen von  $f$  in  $G$  mit der Anzahl an Nullstellen von  $g$  in  $G$  überein. Sind die Funktionen meromorph, stimmt unter der Voraussetzung (1.7.11-F) die Differenz aus der Zahl der Null- und Polstellen für beide Funktionen überein. Um dies zu zeigen, betrachten wir wiederum die Hilfsfunktion

$$h_t(z) = tg(z) + (1-t)f(z), \quad t \in [0, 1]. \tag{1.7.11-G}$$

Da  $h_t(z) = 0$  aber nun  $tg(z) = (t-1)f(z)$  impliziert, folgt für solche  $z \in \partial G$  mit (1.7.11-F) auch  $|f(z)| = t|f(z) - g(z)| < t|f(z)| + t|g(z)|$  und damit  $(1-t)|f(z)| < t|g(z)|$ . Das ist ein Widerspruch und  $h_t$  kann für kein  $t \in [0, 1]$  eine Nullstelle in  $\partial G$  besitzen. Ebenso kann  $h_t(z) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$  auf  $\partial G$  nur gelten, wenn  $f(z) = \infty$  oder  $g(z) = \infty$  gilt, was aber nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Die oben schon im Beweis genutzte Argumentation liefert nun die Behauptung.

**1.7.12.** Der Residuensatz kann auch zur Partialbruchzerlegung von Funktionen genutzt werden. Dazu betrachten wir zuerst eine echt gebrochen rationale Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{1.7.12-A}$$

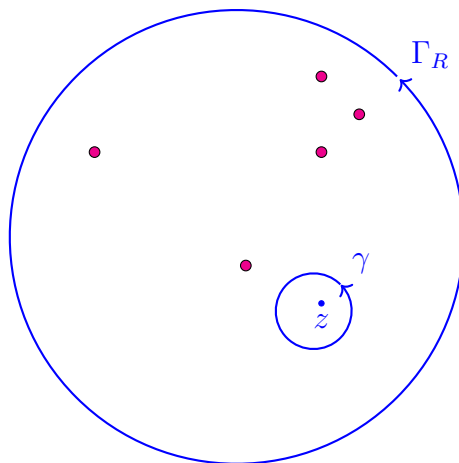
die als Bruch zweier Polynomfunktionen  $p, q$  mit  $\deg q > \deg p \geq 0$  geschrieben ist. Wir nehmen weiter der Einfachheit halber an, dass keine der Nullstellen von  $q$  eine Nullstelle von  $p$  ist, die rationale Funktion also entsprechend maximal gekürzt vorliegt, und dass der führende Koeffizient von  $q$  durch 1 gegeben ist. Dann zerfällt  $q(z)$  nach dem Fundamentalsatz der Algebra in Linearfaktoren

$$q(z) = \prod_j (z - z_j)^{\nu_j} \tag{1.7.12-B}$$

zu den paarweise verschiedenen Nullstellen  $z_j$  von  $q$  mit Vielfachheiten  $\nu_j$ . Dabei gilt  $\sum_j \nu_j = \deg q \geq 1$  und nach Voraussetzung ebenso  $\text{ord}_{z_j} f = -\nu_j$ . Ist nun  $z \neq z_j$ , so gilt nach der Cauchyschen Integralformel (1.3.9-A)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{1.7.12-C}$$

für jeden den Punkt  $z$  einmal positiv umlaufenden Integrationsweg  $\gamma$ , in dessen Inneren keine der Polstellen von  $f$  liegt. Wir verschieben den Integrationsweg nach außen und ersetzen ihn durch einen Kreis  $\Gamma_R$  der alle Polstellen von  $f$  in seinem Inneren enthält.





Der Residuensatz impliziert dann

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_j \operatorname{res}_{\zeta=z_j} \left[ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] \\
 &= f(z) + \sum_j \frac{1}{(\nu_j - 1)!} \lim_{\zeta \rightarrow z_j} \frac{d^{\nu_j-1}}{d\zeta^{\nu_j-1}} (\zeta - z_j)^{\nu_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \\
 &= f(z) + \sum_j \frac{1}{(\nu_j - 1)!} \lim_{\zeta \rightarrow z_j} \frac{d^{\nu_j-1}}{d\zeta^{\nu_j-1}} \frac{p(\zeta)}{(\zeta - z) \prod_{i \neq j} (\zeta - z_i)^{\nu_i}}.
 \end{aligned} \tag{1.7.12-D}$$

Als echt gebrochen rationale Funktion gilt weiterhin für hinreichend großes  $R$  auf  $\Gamma_R$  die Abschätzung

$$\max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \leq CR^{\deg p - \deg q} \leq CR^{-1}, \tag{1.7.12-E}$$

so dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \tag{1.7.12-F}$$

gilt. Damit kann obige Formel nach  $f$  umgestellt werden. Es folgt

$$f(z) = - \sum_j \lim_{\zeta \rightarrow z_j} \frac{d^{\nu_j-1}}{d\zeta^{\nu_j-1}} \frac{p(\zeta)}{(\zeta - z) \prod_{i \neq j} (\zeta - z_i)^{\nu_i}} \tag{1.7.12-G}$$

Dies entspricht der Partialbruchzerlegung von  $f$ . Um dies besser zu sehen, beschränken wir uns auf den Spezialfall, dass alle Nullstellen des Nenners  $q$  einfach sind. Dann folgt

$$f(z) = - \sum_j \lim_{\zeta \rightarrow z_j} \frac{p(\zeta)}{(\zeta - z) \prod_{i \neq j} (\zeta - z_i)} = \sum_j \frac{a_j}{z - z_j} \tag{1.7.12-H}$$

mit

$$a_j = \frac{p(z_j)}{\prod_{i \neq j} (z_j - z_i)}. \tag{1.7.12-I}$$

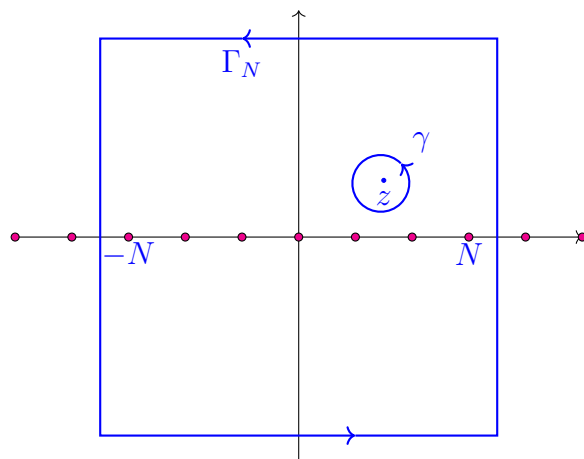
**1.7.13.** Es gibt keinen Grund, sich hier auf rationale Funktionen zu beschränken. Allerdings muss man etwas vorsichtiger mit den Integrationswegen umgehen, wenn die gegebene Funktion unendlich viele Pole besitzt. Wir betrachten nur ein Beispiel und dafür die Cotangensfunktion

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) \tag{1.7.13-A}$$

mit einfachen Polen in  $\mathbb{Z}$ . Sei weiter  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  und  $\gamma$  wiederum eine  $z$  positiv umlaufende geschlossene Kurve ohne Pol in ihrem Inneren. Dann gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\pi \cot(\pi \zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{1.7.13-B}$$

Wir deformieren den Integrationsweg wieder zu einem quadratischen Weg  $\Gamma_N$  für  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, der vertikal entlang  $\pm \operatorname{Re} \zeta = N + \frac{1}{2}$  und ebenso horizontal entlang  $\pm \operatorname{Im} \zeta = N + \frac{1}{2}$  verläuft.



Mit dem Residuensatz gilt

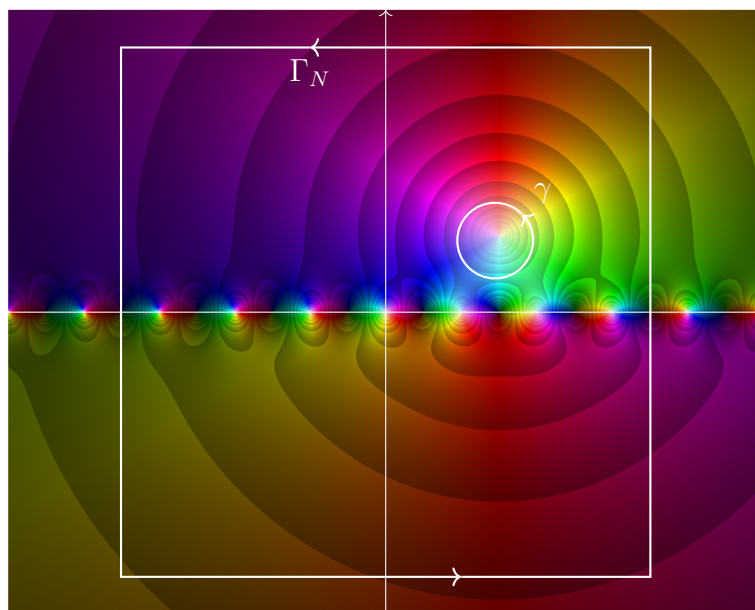
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\pi \cot(\pi \zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\pi \cot(\pi \zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{k=-N}^N \operatorname{res}_{\zeta=k} \left[ \frac{\pi \cot(\pi \zeta)}{\zeta - z} \right] \\ &= \pi \cot(\pi z) - \sum_{k=-N}^N \frac{1}{z - k} \end{aligned} \quad (1.7.13-C)$$

unter Ausnutzung von  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \pi \zeta \cot \pi \zeta = 1$  und der Periodizität der Cotangensfunktion. Wenn wir im nächsten Schritt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\cot(\pi \zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (1.7.13-D)$$

gezeigt haben, folgt die Partialbruchzerlegung der Cotangensfunktion

$$\pi \cot(\pi z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{z - k} = \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - k}. \quad (1.7.13-E)$$



Um (1.7.13-D) zu zeigen, addieren wir geschickt eine Null. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta} &= \sum_{k=1}^N \left( \operatorname{res}_{\zeta=k} \left[ \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta} \right] + \operatorname{res}_{\zeta=-k} \left[ \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta} \right] \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.7.13-F)$$

da

$$\operatorname{res}_{\zeta=0} \left[ \frac{\cot(\pi\zeta)}{\zeta} \right] = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta \cot(\pi\zeta) \right) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(\pi\zeta) - \frac{\pi\zeta}{\sin(\pi\zeta)}}{\sin(\pi\zeta)} \right) = 0 \quad (1.7.13-G)$$

und sich die anderen Residuen wie angegeben gegenseitig aufheben. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \left( \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta - z} - \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta} \right) d\zeta \\ &= \frac{z}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \end{aligned} \quad (1.7.13-H)$$

und da  $\zeta \mapsto \cot(\pi\zeta)$  periodisch ist und ebenso für  $\operatorname{Im} \zeta \rightarrow \pm\infty$  gegen Konstanten strebt, gilt

$$\max_{\zeta \in \Gamma_N} |\cot(\pi\zeta)| \leq M \quad (1.7.13-I)$$

unabhängig von  $N$ . Damit kann der verbleibende Integrand durch

$$\left| \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} \right| \leq \frac{M\pi}{N(N - |z|)} \quad (1.7.13-J)$$

abgeschätzt werden. Zusammen mit der Länge  $\ell(\Gamma_N) = 8N + 4$  erhalten wir damit für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \left| \frac{z}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\cot(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \right| \leq \frac{|z| M\pi(8N + 4)}{2\pi N(N - |z|)} \rightarrow 0 \quad (1.7.13-K)$$

für  $N \rightarrow \infty$  und die Partialbruchzerlegung (1.7.13-E) des Cotangens ist bewiesen.



# 2 Fourierreihen und -integrale

## 2.1 Fourierreihen

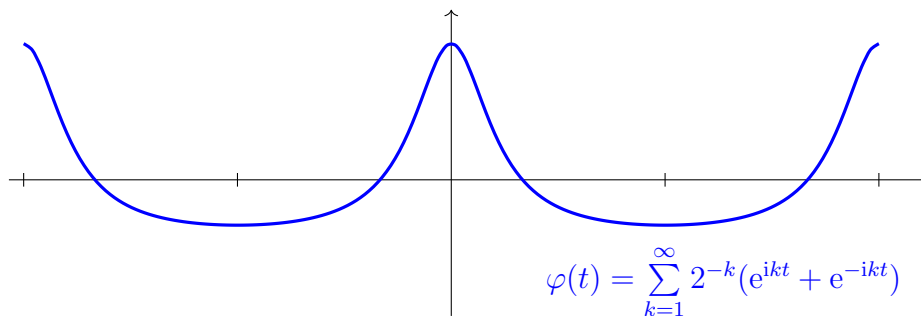
**2.1.1.** (Komplexe) Fourierreihen<sup>1</sup> sind Reihendarstellungen der Form

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad (2.1.1-A)$$

mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ . Die Reihen konvergieren absolut genau dann, wenn die Koeffizienten absolut summierbar sind, also

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty \quad (2.1.1-B)$$

erfüllen. Unter dieser Annahme bestimmen Fourierreihen  $2\pi$ -periodische stetige Funktionen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir wollen nun umgekehrt die Frage stellen, unter welchen Bedingungen Funktionen als Reihen der Form (2.1.1-A) darstellbar sind.



Wir verweisen für elementare Aussagen zu Fourierreihen auf Analysis 2, Kapitel 6. Alle für uns wesentlichen Aussagen werden allerdings hier noch einmal bewiesen.

**2.1.2.** Fourierreihen stehen in engem Zusammenhang zu den im letzten Kapitel diskutierten Laurentreihen. Setzt man  $z = e^{it}$  und nimmt an, dass die beiden Grenzwerte

$$\frac{1}{\rho_+} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k|} < 1 \quad \text{und} \quad \rho_- = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|} < 1 \quad (2.1.2-A)$$

strikt kleiner 1 sind, so konvergiert die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad \rho_- < |z| < \rho_+, \quad (2.1.2-B)$$

---

<sup>1</sup>JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER, 1768–1830

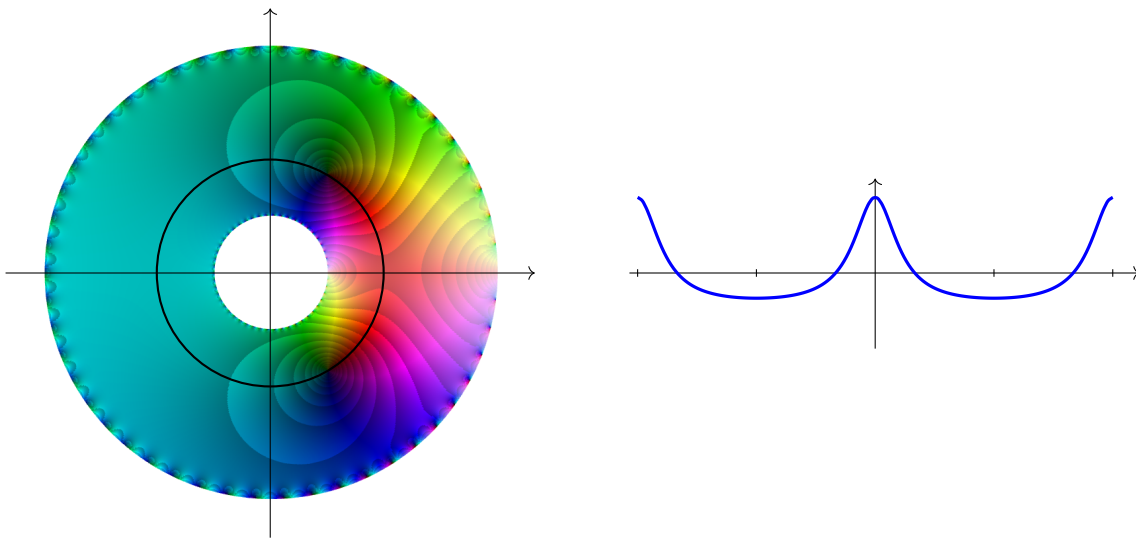
auf dem angegebenen Kreisring  $\mathbb{K}_{\rho_-, \rho_+}(0)$  um den Einheitskreis. Es ergeben sich damit insbesondere die Darstellungen der Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) z^{-k-1} dz \tag{2.1.2-C}$$

als komplexe Kurvenintegrale entlang von innerhalb des Kreisrings verlaufenden Kurven mit Windungszahl 1 um den Ursprung. Es bietet sich an, den positiv orientierten Einheitskreis zu verwenden. Dann folgt durch Einsetzen der Parametrisierung  $z = e^{it}$  für  $t \in [-\pi, \pi]$  mit  $dz = ie^{it} dt$  und  $f(e^{it}) = \varphi(t)$  die *Formel von Euler-Fourier*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt \tag{2.1.2-D}$$

und damit eine Rechenvorschrift zur Bestimmung der Koeffizienten.



Mitunter ist es besser, sich die Funktion Funktion  $f$  als Summe zweier Funktionen

$$f_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{und} \quad f_-(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k} \tag{2.1.2-E}$$

vorzustellen. Falls  $c_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \pm\infty$  (oder allgemeiner  $|c_k| \leq C(1 + |k|)^N$  für ein großes  $N$  gilt), ist die so definierte Funktion  $f_+$  holomorph in  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und  $f_-$  entsprechend holomorph auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ .

**✂ 2.1.3 Beispiel.** Wir betrachten die Reihe

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (e^{ikt} + e^{-ikt}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} \cos(kt). \tag{2.1.3-A}$$

Diese konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir nachfolgend bestimmen wollen. Die zugehörige Laurentreihe besitzt die Konvergenzradien  $\rho_- = \frac{1}{2}$  und  $\rho_+ = 2$  und bestimmt die holomorphe Funktion

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (z^k + z^{-k}), \quad \frac{1}{2} < |z| < 2. \tag{2.1.3-B}$$

Die Summe ist explizit berechenbar. Es gilt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} f_+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z^k = \frac{z/2}{1 - z/2} = \frac{z}{2 - z}, & |z| < 2, \\ f_-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z^{-k} = \frac{1}{2z - 1}, & |z| > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.1.3-C)$$

Damit folgt

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z) = \frac{z}{2 - z} + \frac{1}{2z - 1} = \frac{2z^2 - 2z + 2}{(2 - z)(2z - 1)} = \frac{2z^2 - 2z + 2}{-2z^2 + 5z - 2} \quad (2.1.3-D)$$

für  $\frac{1}{2} < |z| < 2$ . Diese Funktion ist zusammen mit der periodischen Funktion  $\varphi$  oben dargestellt. Einsetzen von  $z = e^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , liefert

$$\varphi(t) = f(e^{it}) = -\frac{2e^{2it} - 2e^{it} + 2}{2e^{2it} - 5e^{it} + 2} = -\frac{2e^{it} - 2 + 2e^{-it}}{2e^{it} - 5 + 2e^{-it}} = \frac{4 \cos t - 2}{5 - 4 \cos t}. \quad (2.1.3-E)$$

und die Euler-Fourierschen Formeln damit

$$c_k = 2^{-|k|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4 \cos t - 2}{5 - 4 \cos t} e^{-ikt} dt, \quad k \neq 0. \quad (2.1.3-F)$$

## 2.2 Harmonische Funktionen und das Poisson-Integral

**2.2.1.** Wir wollen zuerst die Frage beantworten, wie stetige  $2\pi$ -periodische Funktionen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in eine Fourierreihe entwickelt werden können. Für jede solche Funktion  $\varphi$  bestimmt (2.1.2-D) eine Folge  $(c_k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese ist wegen

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)| dt \leq \max_{t \in [-\pi, \pi]} |\varphi(t)| \quad (2.2.1-A)$$

auf Grund der Beschränktheit stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen ebenso beschränkt. Wir ordnen der Folge eine (nicht holomorphe!) Funktion  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  durch die absolut konvergente Reihe

$$g(z) = f_+(z) + f_-(1/\bar{z}) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k z^k + c_{-k} \bar{z}^k), \quad |z| < 1, \quad (2.2.1-B)$$

zu. Diese enthält immer noch alle Informationen über die Koeffizienten  $c_k$  und bestimmt eine *harmonische Funktion* auf  $\mathbb{D}$ . Dies können wir kurz nachrechnen. Es gilt mit den Wirtinger-Ableitungen (1.2.9-B)  $\partial_z$  und  $\partial_{\bar{z}}$  und unter Ausnutzung der Cauchy-Riemann-Gleichung  $\partial_{\bar{z}} f_+(z) = 0$

$$\partial_{\bar{z}} g(z) = \partial_{\bar{z}} \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \bar{z}^k = \sum_{k=1}^{\infty} k c_{-k} \bar{z}^{k-1} \quad (2.2.1-C)$$

und mit dem entsprechenden konjugiert-holomorphen Analogon

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} g(z) = \partial_z \sum_{k=1}^{\infty} k c_{-k} \bar{z}^{k-1} = 0. \quad (2.2.1-D)$$

Ausgeschrieben in reellen partiellen Ableitungen ergibt dies aber wegen

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4} (\partial_x - i\partial_y) (\partial_x + i\partial_y) = \frac{1}{4} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \quad (2.2.1-E)$$

gerade die Bedingung

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) g(x + iy) = 0 \quad (2.2.1-F)$$

und die Funktion  $g$  erfüllt die Laplace<sup>2</sup>-Gleichung und ist damit harmonisch.

**2.2.2.** Setzt man die Definition der Koeffizienten  $c_k$  als Integrale in die Reihendarstellung der Funktion  $g$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( z^k \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta + \bar{z}^k \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) e^{ik\theta} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^k e^{-ik\theta} + \bar{z}^k e^{ik\theta}) \right) d\theta. \end{aligned} \quad (2.2.2-A)$$

Setzt man nun die Polardarstellung  $z = r e^{it}$  ein, so liefert  $\bar{z} = r e^{-it}$  und ein Zusammenfassen der entsprechenden Terme die Darstellung

$$\begin{aligned} g(r e^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (e^{ik(t-\theta)} + e^{-ik(t-\theta)}) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \mathbf{P}_r(t - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.2.2-B)$$

mit dem *Poissonkern*

$$\mathbf{P}_r(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (e^{ikt} + e^{-ikt}) \quad (2.2.2-C)$$

der mit Hilfe der geometrischen Summenformel einfach in geschlossener Form anzugeben ist. Es gilt für alle  $r \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_r(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (e^{ikt} + e^{-ikt}) \\ &= 1 + \frac{r e^{it}}{1 - r e^{it}} + \frac{r e^{-it}}{1 - r e^{-it}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}. \end{aligned} \quad (2.2.2-D)$$

Insbesondere ist der Poissonkern  $2\pi$ -periodisch und erfüllt

$$\mathbf{P}_r(t) > 0, \quad \mathbf{P}_r(0) = \frac{1+r}{1-r} \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t) dt = 2\pi, \quad (2.2.2-E)$$

---

<sup>2</sup>PIERRE-SIMON LAPLACE, MARQUIS DE LAPLACE, 1749–1827

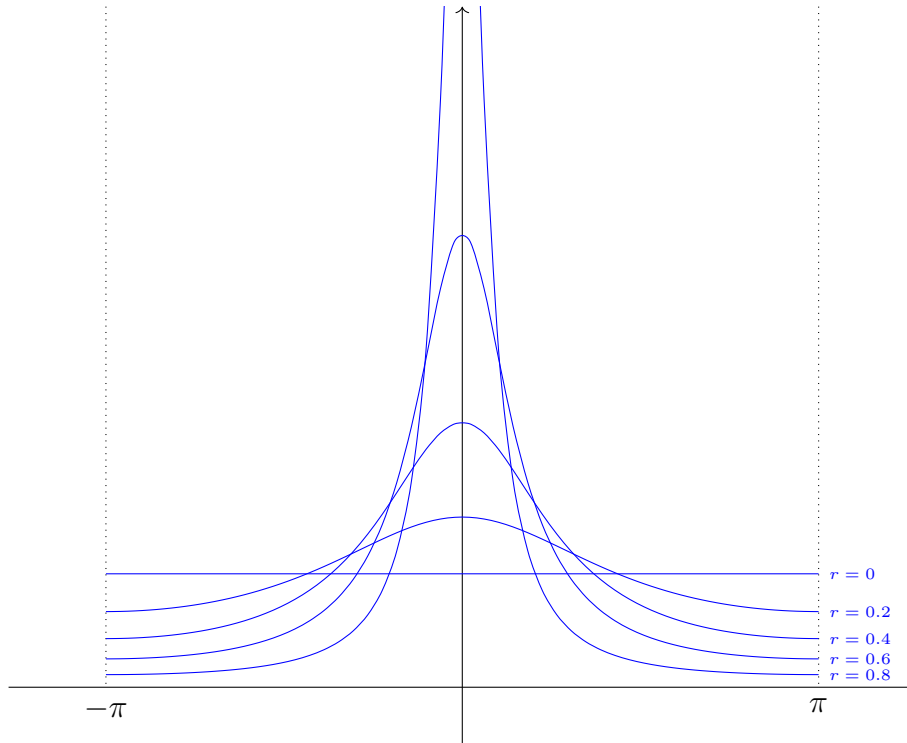


wobei sich letzteres direkt aus der gliedweise integrierten Reihendarstellung ergibt. Weiterhin gilt gleichmäßig bezüglich  $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$

$$\mathbf{P}_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1. \quad (2.2.2-F)$$

Insbesondere gibt es zu jedem  $\delta > 0$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\rho_{\varepsilon, \delta} \in (0, 1)$  mit  $0 < \mathbf{P}_r(t) < \varepsilon$  für  $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  und  $\rho_{\varepsilon, \delta} < r < 1$ .

Nachfolgend ist der Poissonkern für verschiedene Werte von  $r$  dargestellt.



☞ **2.2.3 Satz.** Sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige  $2\pi$ -periodische Funktion und sei  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  die durch

$$g(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k z^k + c_{-k} \bar{z}^k) \quad (2.2.3-A)$$

über die Koeffizientenfolge

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt \quad (2.2.3-B)$$

aus (2.1.2-D) definierte Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ist harmonisch und durch

$$g(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \mathbf{P}_r(t - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t - \theta) \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \quad (2.2.3-C)$$

mit dem Poissonkern  $\mathbf{P}_r$  aus (2.2.2-C) gegen.

(ii) Die Funktion  $g$  ist stetig auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$  und erfüllt

$$\lim_{r \nearrow 1} g(re^{it}) = \varphi(t) \tag{2.2.3-D}$$

gleichmäßig bezüglich  $t$ .

*Beweis.* Es bleibt die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen, die anderen Aussagen haben wir schon vorher zusammengetragen. Sei nun  $M = \max_{t \in [-\pi, \pi]} |\varphi(t)|$ . Sei weiter  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da die periodische Funktion  $\varphi$  gleichmäßig stetig ist, gibt es damit ein  $\delta > 0$  mit

$$|t - \theta| < \delta \implies |\varphi(t) - \varphi(\theta)| < \varepsilon. \tag{2.2.3-E}$$

Damit implizieren die Eigenschaften des Poissonkerns die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - g(re^{it})| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(t) - \varphi(t - \theta)) \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \leq \frac{M}{\pi} \varepsilon + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.2.3-F}$$

für  $r > \rho_{\varepsilon, \delta}$  gleichmäßig bezüglich  $t \in \mathbb{R}$ . Da  $\varepsilon$  beliebig war folgt die gewünschte gleichmäßige Konvergenz.  $\square$

**2.2.4 Korollar** (Poissonsummierbarkeit von Fourierreihen). Sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige  $2\pi$ -periodische Funktion und seien

$$c_k := c_k(\varphi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt \tag{2.2.4-A}$$

die zugeordneten Fourierkoeffizienten. Dann gilt gleichmäßig bezüglich  $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = c_0 + \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}). \tag{2.2.4-B}$$

Die Poissonsummierbarkeit impliziert, dass man jede stetige Funktion beliebig genau durch trigonometrische Polynome, also durch Funktionen der Form

$$t \mapsto \sum_{k=m}^n a_k e^{ikt} \tag{2.2.4-C}$$

zu  $m, n \in \mathbb{Z}$  und Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ , approximieren kann. Wir fassen diese Erkenntnis in einem weiteren Satz zusammen:

**2.2.5 Korollar** (Weierstrassscher Approximationssatz). *Trigonometrische Polynome sind dicht im Raum  $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$  der  $2\pi$ -periodischen stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm.*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine stetige  $2\pi$ -periodische Funktion und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es nach Korollar 2.2.4 ein  $r \in (0, 1)$ , so dass mit  $c_k = c_k(\varphi)$

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \left| \varphi(t) - \sum_{k=1}^{\infty} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2.5-A)$$


Da für  $r < 1$  die Reihe nach dem Weierstrass  $M$ -Test gleichmäßig konvergiert, gibt es weiterhin ein  $N$  mit

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{k > N} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.2.5-B)$$

und

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \left| \varphi(t) - c_0 - \sum_{k=1}^N r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right| < \varepsilon \quad (2.2.5-C)$$

folgt aus der Dreiecksungleichung. Da  $\varepsilon$  beliebig war folgt die Behauptung.  $\square$

 **2.2.6 Lemma (Riemann-Lemma).** Sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $2\pi$ -periodische stetige Funktion. Dann gilt

$$c_k(\varphi) \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \pm\infty. \quad (2.2.6-A)$$

*Beweis.* Für jedes trigonometrische Polynom sind nur endlich viele der Koeffizienten  $c_k$  von Null verschieden. Sei nun  $\varphi_n$  eine Folge trigonometrischer Polynome, die gleichmäßig gegen  $\varphi$  konvergiert. Dann ist wegen

$$|c_k(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{\infty} \quad (2.2.6-B)$$


die Zuordnung der Fourierkoeffizienten stetig und es gilt

$$|c_k(\varphi) - c_k(\varphi_n)| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_{\infty} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.2.6-C)$$

gleichmäßig bezüglich  $k$ . Damit impliziert der Doppelfolgensatz

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} c_k(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} c_k(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(\varphi_n) = 0. \quad (2.2.6-D)$$

$\square$

 **2.2.7 Lemma (Identitätssatz für Fourierreihen).** Die Zuordnung der Fourierkoeffizienten ist injektiv. Für jede stetige  $2\pi$ -periodische Funktion  $\varphi$  gilt

$$\forall_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi) = 0 \quad \iff \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = 0. \quad (2.2.7-A)$$

*Beweis.* Es ist nur die Hinrichtung zu zeigen. Gilt  $c_k(\varphi) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , so ist zugeordnete harmonische Funktion  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  die Nullfunktion und aus Satz 2.2.3 folgt  $\varphi(t) = \lim_{r \rightarrow 1} g(re^{it}) = 0$ .  $\square$

**2.2.8.** Man kann auch allgemeiner vorgehen und statt stetiger  $2\pi$ -periodischer Funktionen allgemeiner  $2\pi$ -periodische (messbare) Funktionen mit

$$\|\varphi\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)| dt < \infty \tag{2.2.8-A}$$

betrachten. Wir bezeichnen die Menge aller dieser Funktionen (oder besser die Vervollständigung von  $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$  bezüglich der  $\|\cdot\|_1$ -Norm) als  $L^1_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ .

Für Funktionen  $\varphi \in L^1_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  können durch (2.1.2-D) wiederum Fourierkoeffizienten  $c_k(\varphi)$  zugeordnet werden, es gilt ebenso  $|c_k(\varphi)| \leq \|\varphi\|_1$ . Damit ist die durch (2.2.3-A) zugeordnete Funktion  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  wohldefiniert und harmonisch und es gilt wiederum die Darstellung als Poissonintegral

$$g(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t - \theta) \mathbf{P}_r(\theta) d\theta. \tag{2.2.8-B}$$

Die Positivität des Poissonkerns impliziert nun (zusammen mit der Definition des Integrals als Grenzwert von Riemannsummen und der Dreiecksungleichung der  $\|\cdot\|_1$ -Norm)

$$\begin{aligned} \|\varphi - g(re^{i\cdot})\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot - \theta)) \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \right\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\varphi - \varphi(\cdot - \theta)\|_1 \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \longrightarrow 0, \quad r \rightarrow 1, \end{aligned} \tag{2.2.8-C}$$

basierend auf der Stetigkeit im Mittel

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi(\cdot - \theta)\|_1 = 0 \tag{2.2.8-D}$$

für Funktionen  $\varphi \in L^1_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ . Damit gilt auch für solche Funktionen der Identitätssatz

$$(\forall_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi) = 0) \iff \|\varphi\|_1 = 0 \tag{2.2.8-E}$$

und das Riemann–Lebesgue–Lemma

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} c_k(\varphi) = 0. \tag{2.2.8-F}$$

Dies verallgemeinert die Aussagen aus Lemma 2.2.6 und Lemma 2.2.7.

## 2.3 Punktweise Konvergenz und Summierbarkeit

**2.3.1.** Für  $2\pi$ -periodische stetige Funktionen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  muss die zugeordnete Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt \tag{2.3.1-A}$$

nicht punktweise konvergieren. Vielmehr gibt es Beispiele stetiger Funktionen, für die die zugeordnete Fourierreihe auf einer beliebigen abzählbaren Teilmenge (z.B. auf  $\mathbb{Q}\pi \subset \mathbb{R}$ ) divergiert. Für Details siehe hierzu auf die Literatur<sup>3</sup> verwiesen.

---

<sup>3</sup>Siehe etwa Kapitel VIII in: A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 2002

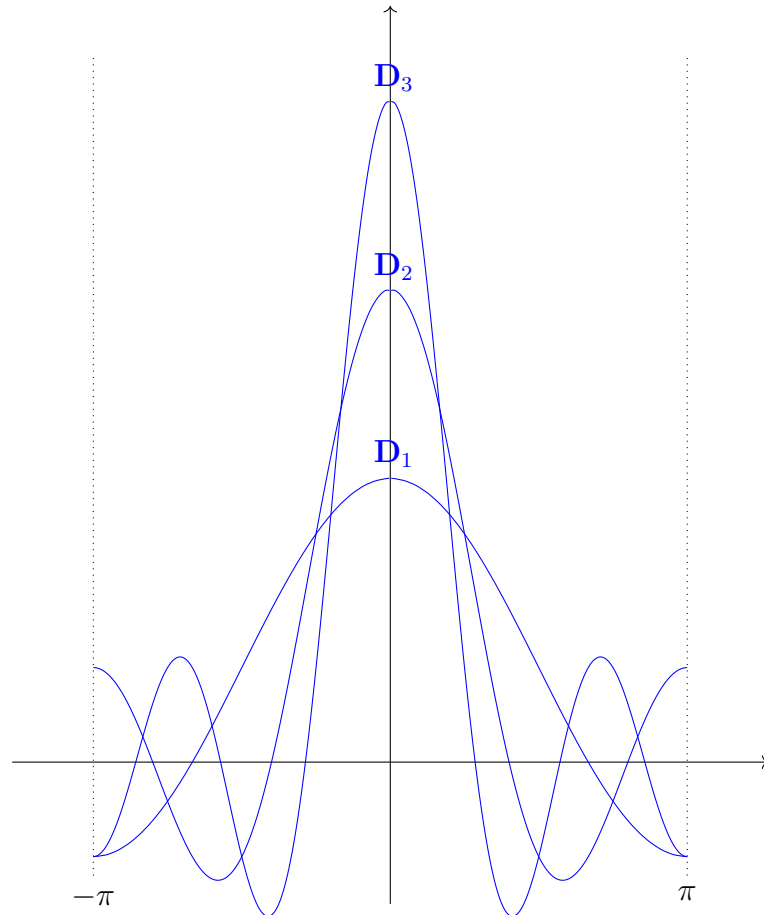
Wir formulieren ein positives Resultat. Dazu betrachten wir die symmetrischen Partialsommen

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) e^{ik(t-\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \mathbf{D}_n(t-\theta) d\theta, \quad (2.3.1-B)$$

die als Integral durch den *Dirichletkern*

$$\mathbf{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \quad (2.3.1-C)$$

dargestellt werden können. Dieser ist nachfolgend für verschiedene  $n$  skizziert.



Im Gegensatz zum Poissonkern wechselt der Dirichletkern sein Vorzeichen. Er erfüllt

$$\mathbf{D}_n(0) = 2n + 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{D}_n(t) dt = 1, \quad |t\mathbf{D}_n(t)| \leq 2 \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \leq \pi. \quad (2.3.1-D)$$

Deshalb benötigen wir weitere Voraussetzungen an  $\varphi$ , um Konvergenz zu erzwingen. Wir sagen,  $\varphi$  ist im Punkt  $t$  lokal *hölderstetig*<sup>4</sup> zum Exponenten  $\alpha \in (0, 1)$ , falls es ein  $\delta > 0$  und eine Konstante  $L$  mit

$$|t - s| \leq \delta \quad \implies \quad |\varphi(t) - \varphi(s)| \leq L|t - s|^\alpha \quad (2.3.1-E)$$

<sup>4</sup>OTTO LUDWIG HÖLDER, 1859–1937

gibt. Wir sagen dazu auch kurz  $\varphi$  ist  $\alpha$ -hölderstetig in  $t$ .

☞ **2.3.2 Satz.** *Angenommen,  $\varphi \in L^1_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  ist in  $t$  lokal  $\alpha$ -hölderstetig und seien  $c_k$  die zugehörigen Fourierkoeffizienten. Dann gilt*

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \mathbf{D}_n(t - \theta) d\theta. \quad (2.3.2-A)$$

*Beweis.* Zum Beweis kombinieren wir die Eigenschaften des Dirichletkerns mit Riemann-Lemma 2.2.6 mit der Hölderabschätzung. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \varphi(t) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(t) - \varphi(t - \theta)) \mathbf{D}_n(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \left( \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) (\varphi(t) - \varphi(t - \theta)) \mathbf{D}_n(\theta) d\theta \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| |\mathbf{D}_n(\theta)| d\theta. \end{aligned} \quad (2.3.2-B)$$

Für das letzte Integral nutzen wir die Hölderabschätzung. Für hinreichend kleines  $\delta$  gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| |\mathbf{D}_n(\theta)| d\theta \leq \frac{L}{2} \int_{-\delta}^{\delta} |\theta|^{\alpha-1} d\theta \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.3.2-C)$$

Wir wählen  $\delta$  so klein, dass dieses Integral kleiner als vorgegebenes  $\varepsilon/3$  ist. Für die verbleibenden beiden Integrale nutzen wir die genaue Form des Dirichletkerns

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} (\varphi(t) - \varphi(t - \theta)) \mathbf{D}_n(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\varphi(t) - \varphi(t - \theta)}{1 - e^{-i\theta}} e^{in\theta} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\varphi(t) - \varphi(t - \theta)}{e^{i\theta} - 1} e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (2.3.2-D)$$

Der Quotient im Integranden ist dabei jeweils stetig auf dem Integrationsintervall. Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma streben damit diese Integrale gegen Null. Wir wählen  $n$  so groß, dass auch diese Integrale jeweils durch  $\varepsilon/6$  abgeschätzt werden können und die Behauptung folgt.  $\square$

✂ **2.3.3 Beispiel.** Es gilt also in allen Punkten  $t$ , in denen eine  $2\pi$ -periodische und lokal integrierbare Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Hölderbedingung erfüllt, die punktweise Gleichheit

$$\varphi(t) = \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \quad (2.3.3-A)$$

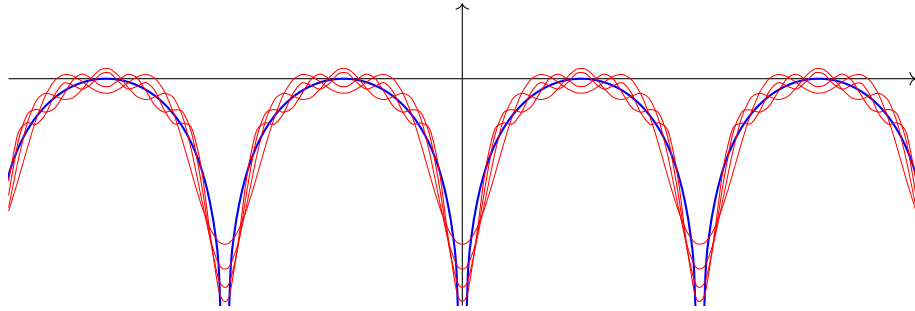
Damit wird die Funktion

$$\varphi(t) = \ln |\sin t| \quad (2.3.3-B)$$

für alle  $t \notin \pi\mathbb{Z}$  durch ihre Fourierreihe dargestellt. Es gilt also punktweise

$$\ln \sin t = -\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kt)}{k}, \quad 0 < t < \pi, \quad (2.3.3-C)$$

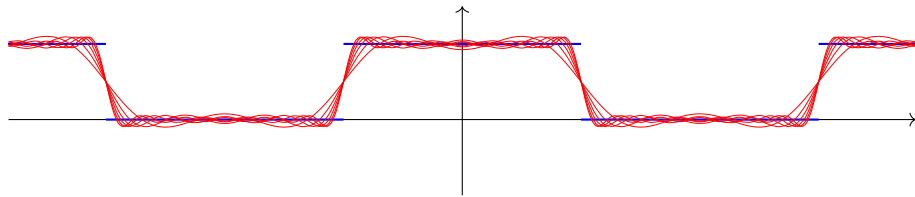
der Nachweis der hier genutzten Fourierkoeffizienten verbleibt als Übungsaufgabe. Die Funktion zusammen mit einigen Partialsummen ist nachfolgend dargestellt:



Die Funktion  $\varphi(t) = 1$  für  $|t| < \frac{\pi}{2}$  besitzt  $2\pi$ -periodisch fortgesetzt die Fourierreihe

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos((2k+1)t)}{(k+\frac{1}{2})\pi} = \begin{cases} 1, & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \quad (2.3.3-D)$$

Diese konvergiert punktweise für alle  $t \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2})$ . Sie ist zusammen mit einigen Partialsummen ist nachfolgend dargestellt:



Fourierreihen stetiger Funktionen sind stets gleichmäßig Cesàro<sup>5</sup>-summierbar, die Mittelwerte der Partialsummen der Reihen konvergieren gegen den Funktionswert. Cesàrosumimation kann auch genutzt werden, um die Konvergenz einer Reihe zu beschleunigen.

☞ **2.3.4 Satz (Fejer<sup>6</sup>).** Sei  $\varphi \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$  stetig. Dann konvergiert

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \quad (2.3.4-A)$$

gleichmäßig gegen die Funktion  $\varphi$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t-\theta) \mathbf{D}_n(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t-\theta) \mathbf{K}_N(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.3.4-B)$$

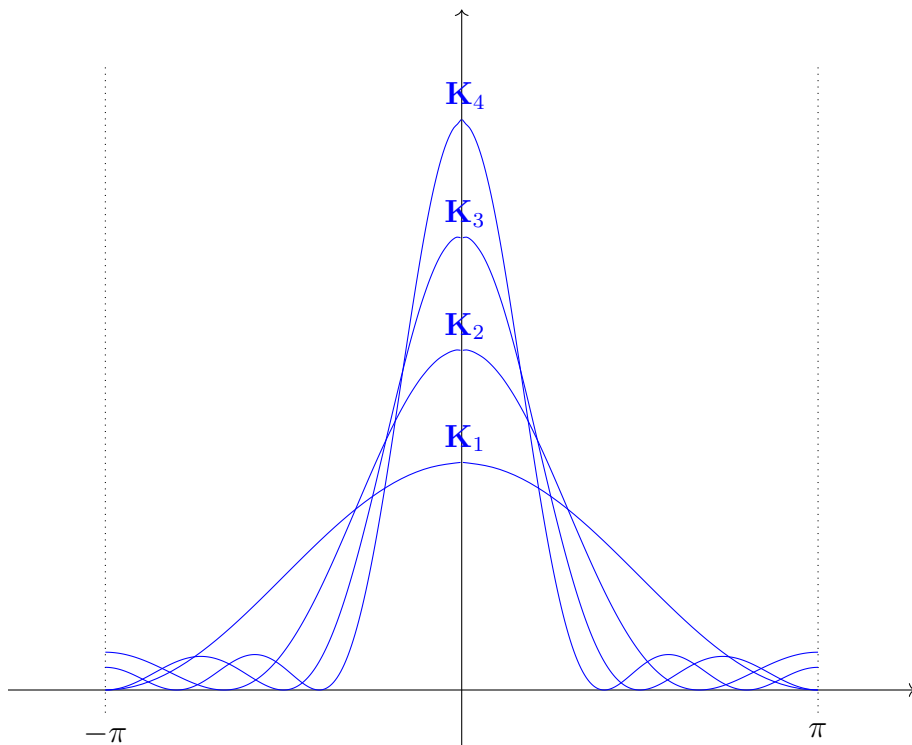
<sup>5</sup>ERNESTO CESÀRO, 1859–1906

<sup>6</sup>LIPÓT FEJÉR, 1880–1959

mit dem Fejérkern

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_N(t) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \mathbf{D}_n(t) \\
 &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} = \frac{1}{N+1} \left( \sum_{l=-N/2}^{N/2} e^{-ilt} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin \frac{(N+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{2.3.4-C}$$

wobei  $l$  für ungerade  $N$  aus  $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  stammt. Der Fejérkern ist im Gegensatz zum Dirichletkern nichtnegativ



und erfüllt

$$\mathbf{K}_N(t) \geq 0, \quad \mathbf{K}_N(0) = N + 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{K}_N(t) dt = 1 \tag{2.3.4-D}$$

zusammen mit der aus  $\sin \frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}$  für  $t \in [0, \pi]$  folgenden Abschätzung

$$\mathbf{K}_N(t) \leq \frac{\pi^2}{\delta^2} \frac{1}{N+1} \tag{2.3.4-E}$$

für  $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ . Damit impliziert die gleichmäßige Stetigkeit von  $\varphi$  wiederum die gleichmäßige Konvergenz. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$|t - s| < \delta \quad \implies \quad |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon \tag{2.3.4-F}$$



und damit folgt

$$\begin{aligned}
 \left| \varphi(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t - \theta) \mathbf{K}_N(\theta) d\theta \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(t) - \varphi(t - \theta)) \mathbf{K}_N(\theta) d\theta \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| \mathbf{K}_N(\theta) d\theta \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| \mathbf{K}_N(\theta) d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi(t) - \varphi(t - \theta)| \mathbf{K}_N(\theta) d\theta \\
 &\leq 2\varepsilon \|\varphi\|_{\infty} + \varepsilon
 \end{aligned} \tag{2.3.4-G}$$

für  $N > 2\delta^2\varepsilon/\pi$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die gleichmäßige Konvergenz.  $\square$

✂ **Ergänzung.** (i) Da der Fejérkern nichtnegativ ist, impliziert für jedes  $2\pi$ -periodische  $\varphi \in L^1_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  die Stetigkeit im Mittel ebenso

$$\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \mathbf{K}_N(\cdot - \theta) d\theta \tag{2.3.4-H}$$

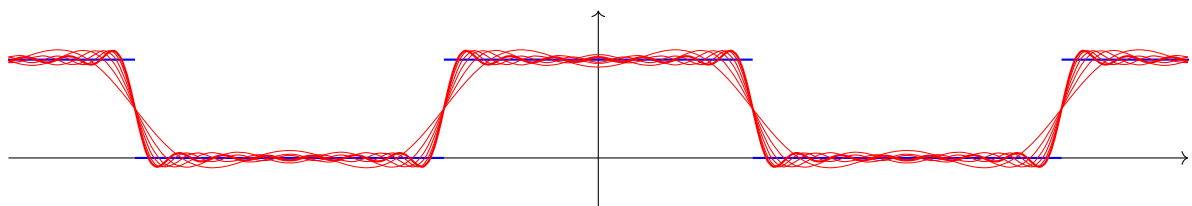
als Konvergenz in der  $\|\cdot\|_1$ -Norm.

(ii) Wenn die Funktion  $\varphi \in L^1_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  in einem Punkt  $t$  stetig ist, so folgt die Cesàro-Konvergenz der Fourierreihe in diesem Punkt. Es gilt also

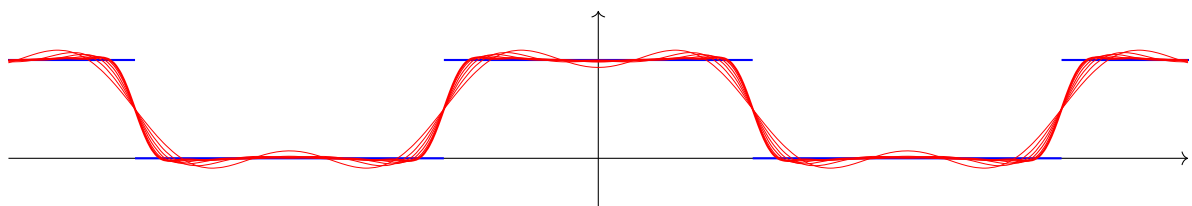
$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \tag{2.3.4-I}$$

für dieses  $t$ . Der Beweis ist analog zum Satz von Fejér.

✂ **2.3.5 Beispiel.** Die Wirkung der Cesàro-Summation sieht man an nachfolgenden Bildern. Während hier wiederum die Partialsummen der Rechteckkurve dargestellt sind



sind in nachfolgendem Bild die zugehörigen Mittelwerte, also die Cesàro-Summen dargestellt. Diese konvergieren in Stetigkeitspunkten deutlich schneller.



## 2.4 Quadratintegrierbare Funktionen und die Parseval-Identität

**2.4.1.** Stetige Funktionen sind nicht die natürlichen Kandidaten zum Entwickeln in Fourierreihen. Wir versehen deshalb die stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktionen mit einer anderen Norm

$$\|\varphi\|_2 := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (2.4.1-A)$$

die von einem Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt \quad (2.4.1-B)$$

erzeugt wird. Der Vektorraum  $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$  der  $2\pi$ -periodischen stetigen Funktionen ist bezüglich dieser Norm nicht vollständig. Wir vervollständigen ihn (indem wir wie zur Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen modulo Nullfolgen bilden) und bezeichnen seine Vervollständigung

$$L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi) = \overline{C_{\text{per}}[-\pi, \pi]}^{\|\cdot\|_2} \quad (2.4.1-C)$$

als den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen<sup>7</sup> auf  $(-\pi, \pi)$ . Bezüglich dieses Skalarproduktes sind die Funktionen

$$\mathbf{e}_k(t) := e^{ikt} \quad (2.4.1-D)$$

paarweise orthonormal, es gilt also  $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = 0$  für  $k \neq l$  und  $\|\mathbf{e}_k\|_2 = 1$ . Weiter sind die Fourierkoeffizienten in (2.1.2-D) durch Skalarprodukte

$$c_k = (\varphi, \mathbf{e}_k)_2 \quad (2.4.1-E)$$

gegeben. Die nachfolgenden zwei Lemmata gelten für jedes gegebene System orthonormaler Vektoren in einem Innenproduktraum.

☞ **2.4.2 Lemma** (Besselsche Ungleichung<sup>8</sup>). Sei  $\varphi \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ . Dann gilt

$$\sum_{k=-N_1}^{N_2} |(\varphi, \mathbf{e}_k)|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 \quad (2.4.2-A)$$

für alle  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \varphi - \sum_{k=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \left( \varphi - \sum_{k=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k, \varphi - \sum_{l=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_l \right) \\ &= \|\varphi\|_2^2 - 2 \sum_{k=-N_1}^{N_2} |(\varphi, \mathbf{e}_k)|^2 + \sum_{k=-N_1}^{N_2} |(\varphi, \mathbf{e}_k)|^2 = \|\varphi\|_2^2 - \sum_{k=-N_1}^{N_2} |(\varphi, \mathbf{e}_k)|^2 \end{aligned} \quad (2.4.2-B)$$

<sup>7</sup>Hier ist Vorsicht angebracht, streng genommen sind die Elemente von  $L^2$  keine Funktionen sondern nur Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen modulo messbaren Funktionen mit Norm Null. Allerdings ist diese Feinheit für die meisten praktischen Rechnungen irrelevant.

<sup>8</sup>FRIEDRICH WILHELM BESSEL, 1784–1846

und die Behauptung folgt.  $\square$

☞ **2.4.3 Lemma** (Bestapproximationseigenschaft). Sei  $\varphi \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ . Dann gilt

$$\|\varphi - \psi\|_2^2 \geq \left\| \varphi - \sum_{k=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \right\|_2^2 \quad (2.4.3-A)$$

für jedes  $\psi \in \text{span}\{\mathbf{e}_k \mid -N_1 \leq k \leq N_2\}$ .

*Beweis.* Wir schreiben

$$\psi = \sum_{k=-N_1}^{N_2} \xi_k \mathbf{e}_k \quad (2.4.3-B)$$

mit  $\xi_k \in \mathbb{C}$ . Dann gilt für jedes solche  $\psi$

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi - \sum_{l=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_l) &= \left( \sum_{k=-N_1}^{N_2} \xi_k \mathbf{e}_k, \varphi - \sum_{l=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_l \right) \\ &= \sum_{k=-N_1}^{N_2} \xi_k (\mathbf{e}_k, \varphi) - \sum_{k=-N_1}^{N_2} \xi_k \overline{(\varphi, \mathbf{e}_k)} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.3-C)$$

und damit auf Grund der Skalarprodukteigenschaften / dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} \left\| \varphi - \sum_{k=-N_1}^{N_2} \xi_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 &= \left\| \varphi - \sum_{k=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \right\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-N_1}^{N_2} ((\varphi, \mathbf{e}_k) - \xi_k) \mathbf{e}_k \right\|_2^2 \\ &\geq \left\| \varphi - \sum_{k=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \right\|_2^2, \end{aligned} \quad (2.4.3-D)$$

was zu zeigen war.  $\square$

☞ **2.4.4 Satz.** Für jedes  $\varphi \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  gilt

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varphi, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \quad (2.4.4-A)$$

als in  $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  konvergente Reihe.

*Beweis.* Die lineare Hülle

$$\text{span}\{\mathbf{e}_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.4.4-B)$$

besteht genau aus den trigonometrischen Polynomen und ist nach Folgerung 2.2.5 dicht in  $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ . Nach Konstruktion ist sie damit auch dicht in  $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ . Damit impliziert Lemma 2.4.3

$$\left\| \varphi - \sum_{k=-N_1}^{N_2} (\varphi, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \right\|_2^2 \rightarrow 0, \quad N_1, N_2 \rightarrow \infty \quad (2.4.4-C)$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

☞ **2.4.5 Korollar** (Parseval<sup>9</sup>-Identität). Sei  $\varphi \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ . Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(\varphi, \mathbf{e}_k)|^2 = \|\varphi\|_2^2. \quad (2.4.5-A)$$

**2.4.6.** Damit gilt für jede quadratintegrierbare Funktion  $\varphi \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  und ihre Fourierkoeffizienten

$$c_k = (\varphi, \mathbf{e}_k) =: \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt \quad (2.4.6-A)$$

die Identität

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt. \quad (2.4.6-B)$$

Gilt umgekehrt für eine komplexe Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \quad (2.4.6-C)$$

so gilt für  $M_1 < N_1$  und  $M_2 < N_2$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k e^{ik \cdot} - \sum_{k=-M_1}^{M_2} c_k e^{ik \cdot} \right\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=-N_2}^{-M_1} c_k e^{ik \cdot} + \sum_{k=M_1}^{N_1} c_k e^{ik \cdot} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=-N_2}^{-M_1} |c_k|^2 + \sum_{k=M_1}^{N_1} |c_k|^2 \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.4.6-D)$$

für  $M_i, N_i \rightarrow \infty$  und die zugehörige Fourierreihe ist Cauchy in  $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$  und bestimmt damit ein  $\varphi \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ .

## 2.5 Laplace- und Fouriertransformation

**2.5.1.** Während holomorphe Funktionen auf Kreisingen durch Laurentreihen beschrieben werden können, erfolgt dies unter natürlichen Wachstumsschranken auf Streifen gebieten

$$\mathbb{S}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \text{Re } z < b\} \quad (2.5.1-A)$$

zu  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , durch Laplaceintegrale. Dies wollen wir zuerst präzisieren. Wir erinnern daran, dass eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  lokal *hölderstetig*<sup>10</sup> zum Exponenten  $\alpha \in (0, 1)$  heißt, falls es zu jedem kompakten Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  eine Konstante  $M_I$  mit

$$\forall_{s,t \in I} \quad |f(s) - f(t)| \leq M_I |s - t|^\alpha \quad (2.5.1-B)$$

gibt. Wir schreiben dafür auch kurz, die Funktion sei lokal  $\alpha$ -hölderstetig.

<sup>9</sup>MARC-ANTOINE PARSEVAL, 1755–1836

<sup>10</sup>OTTO HÖLDER, 1859–1937

☞ **2.5.2 Satz.** Sei  $F : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und gelte  $F(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann existiert eine  $\alpha$ -hölderstetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (e^{-at} + e^{-bt})|f(t)| < +\infty, \quad (2.5.2-A)$$

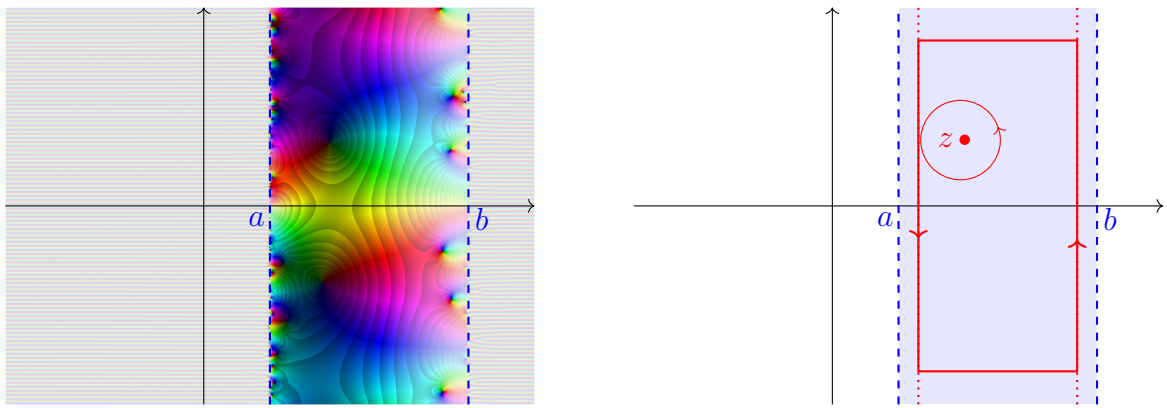
so dass

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt. \quad (2.5.2-B)$$

Diese ist durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\zeta)e^{\zeta t} d\zeta \quad (2.5.2-C)$$

für beliebiges  $c \in (a, b)$  gegeben.



*Beweis.* Sei  $z \in \mathbb{S}_{a,b}$ . Dann gilt mit der Integralformel von Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.5.2-D)$$

für einen den Punkt  $z$  einmal positiv innerhalb  $\mathbb{S}_{a,b}$  umlaufenden Integrationsweg. Wir deformieren den Integrationsweg wie in der Skizze zu einem Rechteck und lassen den oberen und den unteren horizontalen Teil des Integrationsweges gegen Unendlich streben. Da  $F(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$  gilt, streben dabei die horizontalen Wegstücken gegen Null und wir erhalten

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_- - i\infty}^{b_- + i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{a_+ - i\infty}^{a_+ + i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.5.2-E)$$

mit  $a < a_+ < \operatorname{Re} z < b_- < b$ . Wir nutzen nun für  $\operatorname{Re} \zeta = b_- > \operatorname{Re} z$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \int_{-\infty}^0 e^{(\zeta - z)t} dt \quad (2.5.2-F)$$

und entsprechend für  $\operatorname{Re} \zeta = a_+ < \operatorname{Re} z$

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \int_0^{+\infty} e^{(\zeta - z)t} dt \quad (2.5.2-G)$$

und erhalten mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b_- - i\infty}^{b_- + i\infty} F(\zeta) \int_{-\infty}^0 e^{(\zeta - z)t} dt d\zeta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{a_+ - i\infty}^{a_+ + i\infty} F(\zeta) \int_0^{\infty} e^{(\zeta - z)t} dt d\zeta \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{-zt} \frac{1}{2\pi i} \int_{b_- - i\infty}^{b_- + i\infty} F(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta dt \\
 &\quad + \int_0^{+\infty} e^{-zt} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_+ - i\infty}^{a_+ + i\infty} F(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt
 \end{aligned} \tag{2.5.2-H}$$

mit dem nun von  $c \in (a, b)$  unabhängigen Integral aus (2.5.2-C), also mit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} F(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta. \tag{2.5.2-I}$$

Es verbleibt, die Eigenschaften dieser Funktion  $f$  nachzuweisen. Für jedes  $c \in (a, b)$  gilt mit  $\zeta = c + iy$

$$e^{-ct} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(c + iy) e^{iyt} dy \tag{2.5.2-J}$$

und damit

$$e^{-ct} |f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(c + iy)| dy \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} (c^2 + y^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}} dy \tag{2.5.2-K}$$

unabhängig von  $c \in (a, b)$ . Supremumsbildung über  $c$  liefert (2.5.2-A). Für die Hölderstetigkeit betrachten wir ebenso die Funktion  $e^{-ct} f(t)$ . Für diese gilt

$$\begin{aligned}
 e^{-cs} f(s) - e^{-ct} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(c + iy) (e^{iys} - e^{iyt}) dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(c + iy) e^{iys} \frac{e^{iy\frac{s-t}{2}} - e^{iy\frac{t-s}{2}}}{2} e^{iy\frac{t}{2}} dy
 \end{aligned} \tag{2.5.2-L}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 |e^{-cs} f(s) - e^{-ct} f(t)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(c + iy)| \left| \sin \frac{(t-s)y}{2} \right| dy \\
 &\leq |s-t|^\alpha 2M \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(\frac{(t-s)y}{2})|}{|s-t|^\alpha y^\alpha} dy \\
 &= |s-t|^\alpha 2^{1-\alpha} M \int_0^{+\infty} \frac{|\sin \eta|}{\eta^{1+\alpha}} d\eta.
 \end{aligned} \tag{2.5.2-M}$$

Da das Integral konvergiert, folgt die globale  $\alpha$ -Hölderstetigkeit von  $t \mapsto e^{-ct} f(t)$  und damit die  $\alpha$ -Hölderstetigkeit von  $f$ .  $\square$

☞ **2.5.3 Korollar.** Sei  $F : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und gelte  $F(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$ . Dann gibt es holomorphe Funktionen

$$F_- : \mathbb{S}_{-\infty,b} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad F_+ : \mathbb{S}_{a,\infty} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.5.3\text{-A})$$

mit  $F(z) = F_-(z) + F_+(z)$  für alle  $z \in \mathbb{S}_{a,b}$ . Diese sind durch

$$F_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_- - i\infty}^{b_- + i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-zt} dt \quad (2.5.3\text{-B})$$

und

$$F_+(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a_+ - i\infty}^{a_+ + i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt \quad (2.5.3\text{-C})$$

mit der Funktion  $f$  aus (2.5.2-C) gegeben.

**2.5.4.** Die Funktionen  $F_{\pm}$  sind beschränkt und erfüllen  $|F_{\pm}(z)| \leq \mathbf{O}(|\operatorname{Re} z|^{-1})$  für  $\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty$  (beides als Konsequenz der Darstellung als Cauchy-Integral). Unter der leicht schwächeren Voraussetzung  $F_{\pm}(z) = \mathbf{o}(1)$  für  $\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty$  ist die Zerlegung einer gegebenen holomorphen Funktion  $F : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  als Summe  $F(z) = F_-(z) + F_+(z)$  zweier auf  $\mathbb{S}_{-\infty,b}$  beziehungsweise  $\mathbb{S}_{a,\infty}$  beschränkter holomorpher Funktionen eindeutig. Hätte man zwei solcher Zerlegungen  $F = F_- + F_+ = \tilde{F}_- + \tilde{F}_+$ , so wäre  $F_- - \tilde{F}_- = F_+ - \tilde{F}_+$  auf  $\mathbb{S}_{a,b}$  und die Funktionen auf den beiden entgegengesetzten Halbräumen analytische Fortsetzungen voneinander. Damit wäre diese Funktion ganz und da sie ebenso ein  $\mathbf{o}(1)$  ist nach dem Satz 1.4.2 von Liouville die Nullfunktion.

Dies wollen wir nun nutzen, um die Injektivität der durch das Laplace-Integral (2.5.2-C) gegebenen Zuordnung, der *Laplace-Transformation*

$$f \mapsto F, \quad F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt} dt, \quad (2.5.4\text{-A})$$

zu beweisen. Dazu benötigen wir zuerst eine weitere Hilfsaussage.

☞ **2.5.5 Lemma (Weierstrassscher Approximationssatz).** Die Menge der Polynomfunktion ist dicht in  $C[0, 1]$  bezüglich der Supremumsnorm.

*Beweis.* Sei  $\varphi \in C[0, 1]$  stetig auf  $[0, 1]$ . Wir setzen die Funktion stetig fort, so dass sich eine  $2\pi$ -periodische stetige Funktion ergibt. Nach Korollar 2.2.5 sind trigonometrische Polynome dicht in  $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ , es gibt also zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein trigonometrisches Polynom, also ein  $M \in \mathbb{N}$  und Koeffizienten  $c_k$  mit

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \varphi(t) - \sum_{k=-M}^M c_k e^{ikt} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5.5\text{-A})$$

Da trigonometrische Polynome ganze Funktionen sind, konvergieren die zugehörigen Potenzreihen auf insbesondere auf  $[0, 1]$  gleichmäßig. Es gibt also insbesondere ein  $N$  so dass

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=-M}^M c_k e^{ikt} - \sum_{k=-M}^M c_k \sum_{n=0}^N \frac{(ikt)^n}{n!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5.5\text{-B})$$

Der zweite Term ist eine Polynomfunktion und die Behauptung folgt aus der Dreiecksungleichung.  $\square$

☞ **2.5.6 Satz (Lerch<sup>11</sup>).** Angenommen, eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt (2.5.2-A). Gilt dann für alle  $z \in \mathbb{S}_{a,b}$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad (2.5.6-A)$$

so folgt  $f(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Oft wird der Eindeutigkeitsatz anders und etwas stärker formuliert. Dazu verknüpfen wir obigen Satz mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen. Gilt (2.5.6-A) für  $z$  aus einer Menge  $M \subseteq \mathbb{S}_{a,b}$ , die einen Häufungspunkt im Inneren von  $\mathbb{S}_{a,b}$  besitzt, so ist  $f$  die Nullfunktion.

*Beweis des Eindeutigkeitsatzes 2.5.6.* Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit (2.5.2-A). Wir zerlegen

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad (2.5.6-B)$$

wie in 2.5.4 als  $F(z) = F_+(z) + F_-(z)$  mit holomorphen Funktionen  $F_+ : \mathbb{S}_{a,\infty} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $F_- : \mathbb{S}_{-\infty,b} \rightarrow \mathbb{C}$ , die beide eine Abschätzung der Form  $\mathbf{o}(1)$  für  $\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty$  erfüllen. Diese Zerlegung ist eindeutig. Da nach (2.5.6-A) die Funktion  $F$  die Nullfunktion ist, sind  $F_{\pm}$  beide Null und es folgt

$$\begin{aligned} 0 = F_+(z) &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt, & \operatorname{Re} z > a, \\ 0 = F_-(z) &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-zt} dt, & \operatorname{Re} z < b. \end{aligned} \quad (2.5.6-C)$$

Wir zeigen, dass  $F_+(z) = 0$  für  $\operatorname{Re} z > a$  schon  $f(t) = 0$  für  $t \geq 0$  impliziert. Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Dann folgt  $F_+(a + \varepsilon + 1 + n) = 0$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\varepsilon > 0$  und damit

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-(a+\varepsilon)t} e^{-nt} e^{-t} dt = \int_0^1 f(-\ln \theta) \theta^{a+\varepsilon} \theta^n d\theta = \int_0^1 g(\theta) \theta^n d\theta \quad (2.5.6-D)$$

mit der Substitution  $\theta = e^{-t}$ ,  $d\theta = -e^{-t} dt$  und der Hilfsfunktion  $g(\theta) = f(-\ln \theta) \theta^{a+\varepsilon}$ . Diese ist auf  $(0, 1]$  stetig, erfüllt  $g(1) = f(0)$  und nach (2.5.2-A) ebenso

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-at} < \infty \quad (2.5.6-E)$$

und damit

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-at} e^{-\varepsilon t} = 0. \quad (2.5.6-F)$$

Damit ist  $g$  auf  $[0, 1]$  stetig. Weiter impliziert (2.5.6-D)

$$\int_0^1 g(\theta) p(\theta) d\theta = 0 \quad (2.5.6-G)$$

für jede Polynomfunktion  $p$ . Angenommen,  $g(\theta_0) \neq 0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $I$  von  $\theta_0$  auf der  $\operatorname{Re}(\alpha g(\theta)) \geq \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\alpha g(\theta_0)) = \frac{1}{2} |g(\theta_0)| > 0$  mit  $\alpha = \overline{g(\theta_0)} / |g(\theta_0)|$  gilt. Da

<sup>11</sup>MATYÁŠ LERCH, 1860–1921



Polynomfunktionen dicht in  $C[0, 1]$  liegen, finden wir zu  $\varepsilon > 0$  eine Polynomfunktion  $p$  mit

$$|p(\theta)| < \varepsilon, \quad \theta \in [0, 1] \setminus I, \quad \text{und} \quad \int_I p(\theta) \, d\theta \geq 1. \quad (2.5.6-H)$$

Damit folgt mit  $M = \max_{\theta \in [0,1]} |g(\theta)|$

$$0 = \operatorname{Re} \left( \alpha \int_0^1 g(\theta)p(\theta) \, d\theta \right) \geq \frac{1}{2}|g(\theta_0)| - M\varepsilon, \quad (2.5.6-I)$$

was für  $\varepsilon$  hinreichend klein einen Widerspruch darstellt.

Analog impliziert  $F_-(z) = 0$  für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re} z < b$  auch  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .  $\square$

✂ **Ergänzung.** Der Eindeutigkeitssatz von Lerch impliziert, dass die zweiseitige Laplacetransformation

$$\{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \text{ erfüllt (2.5.2-A)}\} \longrightarrow \{F : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C} \mid F \text{ holomorph}\} \quad (2.5.6-J)$$

injektiv ist. Dies lässt sich verallgemeinern. Nimmt man an, dass  $0 \notin \mathbb{S}_{a,b}$  gilt, so ist auch  $z \mapsto z^{-k}F(z)$  holomorph. Diese Funktion kann als Laplacebild einer stetigen Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aufgefasst werden. Ist  $F$  selbst Laplacetransformierte<sup>12</sup>, so ist  $F$  damit der  $k$ -ten Ableitung  $f = g^{(k)}$  zugeordnet. Der Eindeutigkeitssatz von Lerch impliziert nun ebenso, dass  $f = 0$  gelten muss.

✂ **Ergänzung.** Oft findet man in Anwendungen die einseitige Laplacetransformation definiert für (stetige) Funktionen  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \infty$  mit einer exponentiellen Wachstumsschranke  $\sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-at}|f(t)| < \infty$  und zugehörigem Laplacebild

$$\mathcal{L}_+[f](z) := F_+(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} \, dt, \quad z \in \mathbb{S}_{a,\infty} \quad (2.5.6-K)$$

als holomorpher Funktion in einer entsprechenden rechten Halbebene. Die Zuordnung  $f \mapsto \mathcal{L}_+[f]$  ist nach dem Eindeutigkeitssatz von Lerch wiederum injektiv. Die einseitige Laplacetransformation hilft beim Lösen von Anfangswertproblemen für Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten. Für (stetig) differenzierbare Funktionen  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^n$ , deren Ableitung wiederum exponentiell beschränkt ist, gilt (komponentenweise verstanden)

$$\mathcal{L}_+[f'](z) = -f(0_+) + z \int_0^\infty f(t)e^{-zt} \, dt = f(0_+) + z\mathcal{L}_+[f](z). \quad (2.5.6-L)$$

Erfüllt nun  $f$  ein Differentialgleichungssystem  $f'(t) = Af(t)$  mit Anfangsbedingung  $f(0) = f_0 \in \mathbb{C}^n$  und gegebener Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , so folgt

$$A\mathcal{L}_+[f](z) = \mathcal{L}_+[Af](z) = \mathcal{L}_+[f'](z) = -f_0 + z\mathcal{L}_+[f](z) \quad (2.5.6-M)$$

und damit

$$\mathcal{L}_+[f](z) = (z - A)^{-1}f_0, \quad (2.5.6-N)$$

also insbesondere für  $c > \max \operatorname{Re} \operatorname{spec} A$  zusammen mit der Inversionsformel (2.5.2-C)

$$f(t) = e^{tA}f_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta t} (\zeta - A)^{-1} f_0 \, d\zeta. \quad (2.5.6-O)$$

Diese Integraldarstellung besitzt Verallgemeinerungen auf Anfangswertprobleme für partielle Differentialgleichungen.

<sup>12</sup>Wir zeigen später, dass dies der Fall sein wird. Dazu müssen wir die Laplacetransformation allerdings von stetigen Funktionen  $f$  auf (exponentiell beschränkte) Distributionen erweitern.

☞ **2.5.7 Satz (Faltungssatz).** Sei  $a < 0 < b$  und seien  $F, G : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $F(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$  und  $G(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$ . Seien weiter  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die darstellenden Funktionen aus Satz 2.5.2. Dann gilt

$$F(z)G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)e^{-zt} dt \quad (2.5.7-A)$$

mit der Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds. \quad (2.5.7-B)$$

*Beweis.* Die darstellenden Funktionen  $f$  und  $g$  erfüllen beide (2.5.2-A). Damit folgt für den Integranden der Faltung

$$\begin{aligned} |f(t-s)g(s)| &\leq C(e^{-as} + e^{-bs})^{-1}(e^{-a(t-s)} + e^{-b(t-s)})^{-1} \\ &= C(e^{-at} + e^{-(a-b)s}e^{-bt} + e^{-(b-a)s}e^{-at} + e^{-bt})^{-1} \end{aligned} \quad (2.5.7-C)$$

und somit gilt für  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)g(s)| ds \\ &\leq Ce^{at} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + e^{(b-a)(s-t)} + e^{-(b-a)s} + e^{-(b-a)t})^{-1} ds \\ &\leq Ce^{at} \left( \int_t^{+\infty} (1 + e^{(b-a)(s-t)})^{-1} ds + t + \int_{-\infty}^0 (1 + e^{-(b-a)s})^{-1} ds \right) \end{aligned} \quad (2.5.7-D)$$

und entsprechend für  $t \leq 0$

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)g(s)| ds \\ &\leq Ce^{bt} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{(b-a)t} + e^{(b-a)s} + e^{(b-a)(t-s)} + 1)^{-1} ds \\ &\leq Ce^{bt} \left( \int_0^{+\infty} (1 + e^{(b-a)s})^{-1} ds - t + \int_{-\infty}^t (1 + e^{(b-a)(t-s)})^{-1} ds \right). \end{aligned} \quad (2.5.7-E)$$

Da die verbleibenden Integrale konvergieren und gleichmäßig in  $t$  beschränkt sind, konvergiert das Faltungsintegral (2.5.7-B) absolut und erfüllt

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|)^{-1} (e^{-at} + e^{-bt}) |(f * g)(t)| < \infty. \quad (2.5.7-F)$$

Damit ist  $f * g$  laplacetransformierbar und es folgt wegen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)e^{-zt} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds e^{-zt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)e^{-z(t-s)} dt g(s)e^{-zs} ds = F(z)G(z) \end{aligned} \quad (2.5.7-G)$$

die Behauptung. Insbesondere gilt für  $f * g$  auch (2.5.2-A). □

Das Fallen von  $F$  und  $G$  haben wir nur genutzt, um die Funktionen  $f$  und  $g$  zu erhalten. Gezeigt haben wir damit auch

☞ **2.5.8 Korollar.** Seien  $f$  und  $g$  stetige Funktionen mit (2.5.2-A) für  $a < 0 < b$ . Dann sind  $f$  und  $g$  faltbar und die Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds \quad (2.5.8-A)$$

erfüllt (2.5.7-F) und ist damit laplacetransformierbar. Weiter gilt für alle  $z \in \mathbb{S}_{a,b}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)e^{-zt} dt = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-zt} dt \right). \quad (2.5.8-B)$$

☞ **2.5.9 Korollar (Plancherel).** (i) Sei  $a < 0 < b$  und sei weiter  $F : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $F(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$ . Dann gilt für die darstellende Funktion  $f$  aus Satz 2.5.2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(iy)|^2 dy. \quad (2.5.9-A)$$

(ii) Sei  $a < 0 < b$  und gelte (2.5.2-A) für eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und ihre Ableitung. Dann gilt für die Laplacetransformierte  $F : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  aus (2.5.2-B)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(iy)|^2 dy. \quad (2.5.9-B)$$

*Beweis.* Aus dem Faltungssatz folgt zusammen mit der Inversionsformel (2.5.2-C) für den Spezialfall  $c = 0$

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(z)G(z)e^{tz} dz \quad (2.5.9-C)$$

für holomorphe Funktionen  $F, G : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F(z)G(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$ . Dies nutzen wir nun zum Beweis. Ist  $F : \mathbb{S}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so auch  $z \mapsto G(z) := \overline{F(-\bar{z})}$  auf dem gespiegelten Streifen  $\mathbb{S}_{-b,-a}$ . Bezeichnet nun  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die darstellende Funktion zu  $F$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die zu  $G$ , so gilt  $g(t) = \overline{f(-t)}$  und mit  $t = 0$  folgt aus (2.5.9-C)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = (f * g)(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(z)G(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(iy)|^2 dy. \quad (2.5.9-D)$$

Die zweite Aussage folgt entsprechend mit Korollar 2.5.8. Sei dazu  $F$  die Laplacetransformierten von  $f$ . Diese erfüllt wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-zt} dt = z \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt \quad (2.5.9-E)$$

und der Abschätzung (2.5.2-A) für  $f'$  insbesondere  $F(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1})$ . Sei wieder  $g(t) = \overline{f(-t)}$ , so dass  $G(z) = \overline{F(-\bar{z})}$ . Dann gilt die Inversionsformel wiederum für  $F(z)G(z) = \mathbf{O}(|z|^{-2})$ , liefert  $f * g(t)$  und damit wiederum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(iy)|^2 dy. \quad (2.5.9-F)$$

Genau das war zu zeigen. □

**2.5.10.** Der Satz von Plancherel ist fundamental für die Theorie der Fouriertransformation. Dazu definieren wir uns auf der Menge der exponentiell fallenden Funktionen

$$C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R}) := \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \exists a < 0 < b \quad f \text{ und } f' \text{ erfüllen (2.5.2-A)}\} \quad (2.5.10\text{-A})$$

die Norm

$$\|f\|_2 := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (2.5.10\text{-B})$$

und das zugehörige Innenprodukt

$$(f, g)_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (2.5.10\text{-C})$$

Der sich ergebende normierte normierte Raum  $C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})$  ist wiederum nicht vollständig. Deshalb gehen wir zur Vervollständigung, also den Raum der auf  $\mathbb{R}$  quadratintegrierbaren Funktionen,

$$L^2(\mathbb{R}) := \overline{C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_2}, \quad (2.5.10\text{-D})$$

über. Dieser ist der natürliche Definitionsbereich der *Fouriertransformation*  $\mathcal{F}$ , die sich durch stetiges Fortsetzen des Laplaceintegrals (mit  $z = 2\pi i\omega$ )

$$\widehat{f}(\omega) := \mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i t \omega} dt := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)e^{-2\pi i t \omega} dt \quad (2.5.10\text{-E})$$

für  $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolgen  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $f_k \in C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})$ , ergibt. Auf Grund des Satzes von Plancherel konvergiert (2.5.10-E) in  $L^2(\mathbb{R})$  und liefert einen von der Äquivalenzklasse der Cauchyfolgen modulo Nullfolgen unabhängigen Grenzwert. Damit ist  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  wohldefiniert und es gilt nach dem Satz von Plancherel

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_2 = (f, g)_2. \quad (2.5.10\text{-F})$$

Damit ist  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  injektiv. Weiterhin gilt auf Grund der Inversionsformel (2.5.2-C) der Laplacetransformation (zumindest für alle  $f \in C_{\text{exp}}^2(\mathbb{R})$ )

$$\mathcal{F}\mathcal{F}f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{-2\pi i \omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(2\pi\zeta)e^{-t\zeta} d\zeta = f(-t). \quad (2.5.10\text{-G})$$

Auch dies setzt sich stetig  $L^2(\mathbb{R})$  fort und impliziert, dass  $\mathcal{F}$  surjektiv ist. Wäre  $f$  nicht surjektiv, gäbe es ein  $g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  mit

$$0 = (\mathcal{F}f, g)_2 = (\mathcal{F}\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_2 = (f(-\cdot), \mathcal{F}g)_2. \quad (2.5.10\text{-H})$$

Daraus folgt  $\mathcal{F}g = 0$  und damit  $g = 0$ . Widerspruch. Also ist  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  bijektiv.

## 2.6 Harmonische Fortsetzung und Poissonintegral

**2.6.1.** Angenommen eine Funktion  $F$  ist holomorph auf  $\{z \mid -a < \operatorname{Im} z < a\}$  für ein  $a > 0$  und erfüllt dort  $F(z) = \mathbf{O}(|z|^{-1-\alpha})$ . Dann können wir die Funktion  $F$  entsprechend zu Korollar 2.5.3 zerlegen als

$$F(z) = F_+(z) + F_-(z), \quad (2.6.1-A)$$

wobei  $F_-$  holomorph auf der Menge  $\{z \mid \operatorname{Im} z < a\}$  und  $F_+$  entsprechend holomorph auf  $\{z \mid \operatorname{Im} z > -a\}$  ist. Eingeschränkt auf die jeweiligen oberen und unteren Halbebenen ergibt sich dabei

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{t-z} dt, & \operatorname{Im} z > 0 \\ F_-(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{t-z} dt, & \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (2.6.1-B)$$

Betrachtet man nun stattdessen auf der oberen Halbebene  $\mathbb{C}_+$  die Funktion

$$G(z) = F_+(z) + F_-(\bar{z}), \quad (2.6.1-C)$$

so erfüllt diese die Laplacegleichung

$$\frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2)G(x+iy) = \partial_z \partial_{\bar{z}} G(z) = \partial_z(\partial_{\bar{z}} F_+(z)) + \partial_{\bar{z}}(\partial_z F_-(\bar{z})) = 0 + 0 = 0. \quad (2.6.1-D)$$

Also ist  $G(x+iy)$  harmonisch. Für reelle  $x$  gilt weiterhin  $G(x) = F_+(x) + F_-(x) = F(x)$  und  $G$  liefert eine harmonische Fortsetzung der Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in die obere Halbebene  $\mathbb{C}_+$ .

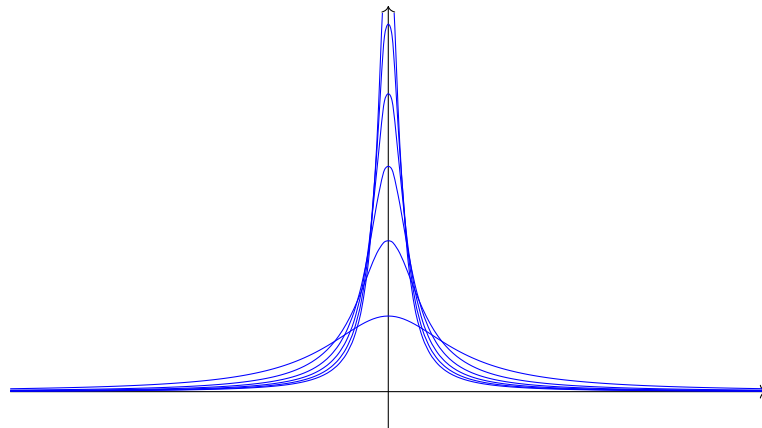
Für diese harmonische Fortsetzung liefert (2.6.1-B) die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} G(x+iy) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \left( \frac{1}{t-x-iy} - \frac{1}{t-x+iy} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \mathbf{P}_y(x-t) dt \end{aligned} \quad (2.6.1-E)$$

mit dem zugehörigen *Poissonkern*

$$\mathbf{P}_y(x) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.6.1-F)$$

der oberen Halbebene. Dieser ist nachfolgend für verschiedene  $y$  dargestellt



Der Poissonkern erfüllt für alle  $y > 0$

$$\mathbf{P}_y(x) \geq 0, \quad \mathbf{P}_y(0) = \frac{1}{y}, \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_y(x) dx = \pi \quad (2.6.1-G)$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\delta} \mathbf{P}_y(x) dx &= \int_{\delta}^{+\infty} \mathbf{P}_y(x) dx = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{dx}{y} = \int_{\delta/y}^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(\delta y^{-1}) \rightarrow 0, \quad y \searrow 0 \end{aligned} \quad (2.6.1-H)$$

für jedes  $\delta > 0$ . Dies impliziert ein Konvergenzresultat (in Analogie zu Satz 2.2.3):

☞ **2.6.2 Satz.** Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und gleichmäßig stetig und  $G$  durch (2.6.1-E) gegeben. Dann ist  $G : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  harmonisch und auf der Halbebene beschränkt und es gilt

$$\lim_{y \searrow 0} G(x + iy) = F(x) \quad (2.6.2-A)$$

gleichmäßig bezüglich  $x \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Da  $F$  gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|s - t| < \delta \quad \implies \quad |F(s) - F(t)| < \varepsilon. \quad (2.6.2-B)$$

Damit liefert

$$F(x) - G(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - F(x - t)) \mathbf{P}_y(t) dt \quad (2.6.2-C)$$

wiederum

$$\begin{aligned} |F(x) - G(x + iy)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - F(x - t)| \mathbf{P}_y(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \right) |F(x) - F(x - t)| \mathbf{P}_y(t) dt \\ &\quad + \int_{-\delta}^{\delta} |F(x) - F(x - t)| \mathbf{P}_y(t) dt \\ &\leq 2\|F\|_{\infty} \varepsilon + \varepsilon \end{aligned} \quad (2.6.2-D)$$

für  $y$  so klein, dass  $\mathbf{P}_y(t) < \varepsilon$  für  $|t| > \delta$ . Da  $\varepsilon$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**2.6.3.** Ein entsprechendes Resultat gilt für  $F \in L^2(\mathbb{R})$  mit Konvergenz in  $\|\cdot\|_2$ . Dies zeigen wir etwas allgemeiner und definieren für  $f \in C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})$  für  $p \in [1, \infty)$  die  $p$ -Norm

$$\|f\|_p := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.6.3-A)$$

Für diese gilt die *Hölder-Ungleichung*<sup>13</sup>

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (2.6.3-B)$$

für  $f, g \in C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})$  und  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und ebenso die *Minkowski-Ungleichung*<sup>14</sup>

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (2.6.3-C)$$

für  $f, g \in C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})$  und  $p \in [1, \infty)$ . Auf Grund der Minkowski-Ungleichung handelt es sich tatsächlich um eine Norm. Da  $C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})$  nicht vollständig in diesen Normen ist, definieren wir

$$L^p(\mathbb{R}) := \overline{C_{\text{exp}}^1(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_p} \quad (2.6.3-D)$$

wiederum als Vervollständigung. Im Rahmen der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie zeigt man wiederum, dass es sich bei den Elementen von  $L^p(\mathbb{R})$  um Äquivalenzklassen messbarer Funktionen modulo fast-überall-Nullfunktionen handelt. Dies ist für uns und das Weitere unerheblich. Sowohl Hölder- als auch Minkowski-Ungleichung gelten dann für alle Elemente aus  $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$  beziehungsweise  $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ .

Der Vollständigkeit halber zeigen wir zuerst die beiden genannten Ungleichungen

☞ **2.6.4 Lemma.** (i) *Es gilt für  $p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , die Hölder-Ungleichung*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt \right| \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.6.4-A)$$

(ii) *Es gilt für jedes  $p \in (1, \infty)$  die Minkowski-Ungleichung*

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.6.4-B)$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Hölderungleichung und auch nur für stetige schnell genug fallende Funktionen  $f$  und  $g$ . Gilt  $\|f\|_p = 0$ , so folgt  $f = 0$  und die Ungleichung ist trivialerweise erfüllt. Sei also von nun an  $\|f\|_p > 0$  und  $\|g\|_q > 0$ . Wir setzen  $\tilde{f}(t) = \|f\|_p^{-1} f(t)$  und  $\tilde{g}(t) = \|g\|_q^{-1} g(t)$ . Dann gilt mit der Youngschen Ungleichung  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$  für nichtnegative Zahlen

$$|\tilde{f}(t)\tilde{g}(t)| \leq \frac{|\tilde{f}(t)|^p}{p} + \frac{|\tilde{g}(t)|^q}{q} \quad (2.6.4-C)$$

und damit nach Integration

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(t)\tilde{g}(t)| dt \leq \frac{\|\tilde{f}\|_p^p}{p} + \frac{\|\tilde{g}\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (2.6.4-D)$$

<sup>13</sup>OTTO LUDWIG HÖLDER, 1859–1937

<sup>14</sup>HERMANN MINKOWSKI, 1864–1909

und nach Multiplikation beider Seiten mit  $\|f\|_p \|g\|_q$  folgt die Behauptung. Die Minkowski-Ungleichung für  $1 < p < \infty$  kann auf die Hölder-Ungleichung zurückgeführt werden. Es gilt falls  $f + g$  nicht die Nullfunktion ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) + g(t)|^p dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) + g(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} dt + \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} dt \quad (2.6.4-E) \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) + g(t)|^{q(p-1)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

und damit wegen  $q(p-1) = p$  und  $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (2.6.4-F)$$

Ist  $f + g$  die Nullfunktion, so ist die Aussage trivial. □

☞ **2.6.5 Satz.** Angenommen,  $f \in L^p(\mathbb{R})$  für  $1 \leq p < \infty$ . Dann ist

$$G(x + iy) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathbf{P}_y(x - t) dt \quad (2.6.5-A)$$

auf der offenen Halbebene  $\mathbb{C}_+$  harmonisch und es gilt

$$\lim_{y \searrow 0} \|f - G(\cdot + iy)\|_p = 0 \quad (2.6.5-B)$$

und damit  $G(\cdot + iy) \rightarrow f$  in  $L^p(\mathbb{R})$ .

*Beweisskizze.* Der Beweis folgt mehreren schon geführten Beweisen. Es gibt basierend auf der Stetigkeit im Mittel

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f - f(\cdot - t)\|_p = 0 \quad (2.6.5-C)$$

für  $f \in L^p(\mathbb{R})$  zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $\|f - f(\cdot - t)\|_p < \varepsilon$  für  $|t| \leq \delta$ . Damit implizieren die Eigenschaften des Poissonkerns

$$\begin{aligned} \|f - G(\cdot + iy)\|_p &= \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (f - f(\cdot - t)) \mathbf{P}_y(t) dt \right\| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|f - f(\cdot - t)\|_p \mathbf{P}_y(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \|f - f(\cdot - t)\|_p \mathbf{P}_y(t) dt \quad (2.6.5-D) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \|f - f(\cdot - t)\|_p \mathbf{P}_y(t) dt \\ &\leq 2\|f\|_p \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

für  $y$  so klein, dass  $\mathbf{P}_y(t) < \varepsilon$  für  $|t| > \delta$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung. □



**2.6.6.** Wir wollen das Poissonintegral nun nutzen, um weitere Aussagen über die Inversion der Fouriertransformation zu zeigen. Sei dazu  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann ist die Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \omega} f(t) dt \quad (2.6.6-A)$$

für jedes  $\omega \in \mathbb{R}$  definiert, stetig und erfüllt

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1. \quad (2.6.6-B)$$

Definiert man nun die beiden Funktionen

$$F_+(z) = \int_0^{\infty} e^{2\pi i \omega z} \widehat{f}(\omega) d\omega, \quad \text{Im } z > 0 \quad (2.6.6-C)$$

und

$$F_-(z) = \int_{-\infty}^0 e^{2\pi i \omega z} \widehat{f}(\omega) d\omega, \quad \text{Im } z < 0 \quad (2.6.6-D)$$

so sind diese in den angegebenen Halbebenen holomorph und die daraus zusammengesetzte Funktion

$$G(z) = F_+(z) + F_-(\bar{z}) \quad (2.6.6-E)$$

harmonisch auf  $\mathbb{C}_+$ . Diese ist (nach Konstruktion!) durch das Poissonintegral

$$G(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathbf{P}_y(x - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega x - 2\pi y |\omega|} \widehat{f}(\omega) d\omega \quad (2.6.6-F)$$

gegeben und Grenzwertbildung für  $y \rightarrow 0$  in  $L^1(\mathbb{R})$  rekonstruiert  $f$ . Es gilt also die folgende  $L^1$ -Version der Fourierschen Inversionsformel

$$\lim_{y \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t - 2\pi y |\omega|} \widehat{f}(\omega) d\omega \right| dt = 0 \quad (2.6.6-G)$$

also

$$f = \lim_{y \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega \cdot - 2\pi y |\omega|} \widehat{f}(\omega) d\omega \quad (2.6.6-H)$$

mit Konvergenz in  $L^1(\mathbb{R})$ .



**Ergänzung.** Varianten dieser Inversionsformel gelten auch für Fouriertransformierte  $\widehat{f} \in L^q(\mathbb{R})$  zu Funktionen  $f \in L^p(\mathbb{R})$  mit  $1 < p \leq 2$  und zugehörigem dualen  $q$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt  $G(\cdot + iy) \rightarrow f$  in  $L^p$ , also

$$\lim_{y \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t - 2\pi y |\omega|} \widehat{f}(\omega) d\omega \right|^p dt = 0. \quad (2.6.6-I)$$

Ist  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$  so gilt die Konvergenz gleichmäßig auf Kompakta. Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$  stetig in einem Punkt  $t \in \mathbb{R}$ , so folgt für dieses  $t$  entsprechend

$$f(t) = \lim_{y \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t - 2\pi y |\omega|} \widehat{f}(\omega) d\omega. \quad (2.6.6-J)$$



# 3 Distributionen

## 3.1 Testfunktionenräume und Distributionen

3.1.1. Wir bezeichnen mit<sup>1</sup>

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ beliebig oft differenzierbar}\} \quad (3.1.1-A)$$

den Vektorraum *der glatten Funktionen* auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir führen auf diesem zuerst einen Konvergenzbegriff ein, wir sagen eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $\varphi_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert in  $\mathcal{E}$  gegen  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ , falls alle Ableitungen auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig konvergieren, also

$$\forall K \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.1.1-B)$$

gilt. Um dies in Zukunft etwas einfacher schreiben zu können führen wir eine Notation ein und schreiben für  $\mathcal{E}$ -Konvergenz kurz  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$  für  $k \rightarrow \infty$ . Weiter vereinbaren wir für  $K \in \mathbb{R}^n$  die Bezeichnung

$$\|\varphi\|_{\infty, K} := \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \quad (3.1.1-C)$$

für die Supremumsnorm auf der Menge  $K$ .

Diese ist auf  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  keine Norm, da  $\|\varphi\|_{\infty, K} = 0$  nicht  $\varphi = 0$  impliziert (sondern nur  $\varphi|_K = 0$  für die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $K$ ). Da alle anderen Normeigenschaften gelten, handelt es sich um eine Seminorm.

✂ **Ergänzung.** Ein Vektorraum  $V$ , auf dem Konvergenzbegriff und Topologie durch eine Familie von Seminormen

$$\mathbf{p}_j : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad j \in J, \quad (3.1.1-D)$$

bestimmt wird, heißt ein lokalkonvexer Raum. Dabei fordert man für alle  $j$ , alle  $\varphi, \psi \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{p}_j(\varphi) \geq 0, \quad \mathbf{p}_j(\lambda\varphi) = |\lambda| \mathbf{p}_j(\varphi), \quad \mathbf{p}_j(\varphi + \psi) \leq \mathbf{p}_j(\varphi) + \mathbf{p}_j(\psi) \quad (3.1.1-E)$$

zusammen mit

$$(\forall j \in J \quad \mathbf{p}_j(\varphi) = 0) \quad \implies \quad \varphi = 0. \quad (3.1.1-F)$$

Für unendliche Familien von Seminormen verallgemeinert dies normierte Räume, für endliche Familien ergibt sich dabei einfach ein (kompliziert aufgeschriebener) normierter Raum.

<sup>1</sup>Die Bezeichnungen  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  für Testfunktionenräume und  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  für die zugehörigen Distributionenräume, sowie der Großteil der Distributionentheorie gehen auf Laurent Schwartz<sup>2</sup> zurück.

<sup>2</sup>LAURENT SCHWARTZ, 1915–2002

Eine Folge  $(\varphi_k)$  aus  $V$  konvergiert im lokalkonvexen Raum  $V$  genau dann gegen ein  $\varphi$ , wenn

$$\forall_{j \in J} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}_j(\varphi_k - \varphi) = 0 \tag{3.1.1-G}$$

gilt. Ist die Familie der Seminormen abzählbar und durch  $\mathbf{p}_j$  zu  $j \in \mathbb{N}$  gegeben, so bestimmt

$$\mathbf{d}(\varphi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\mathbf{p}_j(\varphi - \psi)}{1 + \mathbf{p}_j(\varphi - \psi)} \tag{3.1.1-H}$$

auf  $V$  eine Metrik, die denselben Konvergenzbegriff induziert. Lokalkonvexe Räume mit abzählbarer Familie von Seminormen, die als metrische Räume vollständig sind, bezeichnet man als Fréchet<sup>3</sup>-Räume.

Der Raum  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  ist ein Fréchet-Raum. Wir haben die  $\mathcal{E}$ -Konvergenz durch die Seminormen

$$\varphi \longmapsto \mathbf{p}_{K,\alpha}(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} \tag{3.1.1-I}$$

für  $K \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  charakterisiert. Hier genügt eine abzählbare Teilfamilie: Die Menge der Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ist abzählbar. Da weiterhin für  $K \in L \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{p}_{K,\alpha}(\varphi) \leq \mathbf{p}_{L,\alpha}(\varphi) \tag{3.1.1-J}$$

gilt, genügt eine abzählbare Folge  $K_j$  kompakter Teilmengen mit  $\bigcup_j K_j = \mathbb{R}^n$  zu zur Beschreibung der  $\mathcal{E}$ -Konvergenz. Es ist leicht zu sehen, dass der sich ergebende Raum vollständig und damit Fréchet ist.

Wir geben noch die Topologie eines lokalkonvexen Vektorraumes an. Seien die Seminormen dazu wieder allgemein durch  $\mathbf{p}_j$  für eine beliebige Indexmenge  $J$  gegeben. Eine Teilmenge  $U \subseteq V$  ist genau dann offen, wenn es um jeden Punkt  $\varphi \in U$  eine in  $U$  enthaltene Umgebung der Form

$$\{\psi \mid \mathbf{p}_j(\varphi - \psi) < \varepsilon, j \in I\} \tag{3.1.1-K}$$

für ein  $\varepsilon > 0$  und eine *endliche* Teilmenge  $I \subset J$  gibt.

**3.1.2.** Für  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir mit

$$\text{supp } \varphi = \text{clos}\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\} \tag{3.1.2-A}$$

den *Träger* der Funktion  $\varphi$ . Wir bezeichnen  $\varphi$  als *kompakt getragen*, falls  $\text{supp } \varphi \in \mathbb{R}^n$  gilt und definieren den Vektorraum *der kompakt getragenen glatten Funktionen*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } \varphi \in \mathbb{R}^n\}. \tag{3.1.2-B}$$

Auf diesem führen wir ebenso einen Konvergenzbegriff ein. Wir sagen eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert in  $\mathcal{D}$  gegen ein  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , falls

$$\exists_{K \in \mathbb{R}^n} \quad \text{supp } \varphi_k \subseteq K \quad \wedge \quad \text{supp } \varphi \subseteq K \tag{3.1.2-C}$$

zusammen mit

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \quad \|\partial^\alpha \varphi_k - \partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \tag{3.1.2-D}$$

gilt. Wir schreiben dafür kurz  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**✂ 3.1.3 Beispiel.** Die Bedingung (3.1.2-D) impliziert  $\mathcal{E}$ -Konvergenz. Allerdings ist  $\mathcal{D}$ -Konvergenz stärker als  $\mathcal{E}$ -Konvergenz, da sie zusätzlich die Trägerbedingung (3.1.2-C) besitzt.

Die  $\mathcal{E}$ -Konvergenz ist für  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  nicht geeignet, da es zu jedem  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  eine Folge  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$  gibt. Dazu genügt ein  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\chi(x) = 1$  in einer Umgebung des Ursprungs. Dann gilt für jedes  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  schon  $\varphi \chi(\cdot/k) \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$ .

<sup>3</sup>RENÉ MAURICE FRÉCHET, 1878–1973

**3.1.4.** Eine *Distribution* ist ein stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , also eine lineare Abbildung

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C} \tag{3.1.4-A}$$

mit

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \implies \langle T, \varphi_k \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle. \tag{3.1.4-B}$$

Dies ist durch eine Abschätzung charakterisierbar. Es muss dafür zu jedem  $K \Subset \mathbb{R}^n$  ein  $m \in \mathbb{N}_0$  und ein  $C > 0$  mit

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K} \tag{3.1.4-C}$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq K$  geben. Die Menge aller Distributionen auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Das kleinste  $m$  für das obige Abschätzung gilt, bezeichnen wir als die (lokale) *Ordnung* der Distribution  $T$  auf  $K$ .

✂ **3.1.5 Beispiele.** Distributionen gibt es viele. Wir geben einige typische Beispiele zusammen mit der oben geforderten Abschätzung.

(i) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann können wir  $f$  durch das Integral

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt \tag{3.1.5-A}$$

für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  eine Distribution  $T_f$  zuordnen. Diese erfüllt für jedes  $K = [a, b] \Subset \mathbb{R}$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq [a, b]$  (diese reichen offensichtlich hier aus)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt \right| \leq (b - a) \|f\|_{\infty, K} \|\varphi\|_{\infty, K}. \tag{3.1.5-B}$$

Die Zuordnung der Distribution  $T_f$  zu  $f$  ist dabei injektiv. Für  $f \neq 0$  gibt es ein  $t_* \in \mathbb{R}$  mit  $f(t_*) \neq 0$  und wegen Stetigkeit von  $f$  damit eine Umgebung von  $t_*$  mit  $\text{Re}(\alpha f(t)) \geq \frac{1}{2}|f(t_*)|$ . Wählt man nun ein nichtnegatives und in dieser Umgebung getragenes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit Integral 1, so folgt  $\text{Re}\langle T_f, \varphi \rangle \geq \frac{1}{2} \text{Re } \alpha |f(t_*)| > 0$  und damit  $T_f \neq 0$ .

Wir bezeichnen im Weiteren die Distribution  $T_f$  einfach mit  $f$ .

(ii) Das Beispiel kann man weiter verallgemeinern. Wir bezeichnen zu  $K \Subset \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{1}_K$  die *Indikatorfunktion* der Menge  $K$ , also  $\mathbf{1}_K(x) \in \{0, 1\}$  und  $\mathbf{1}_K(x) = 1$  genau dann, wenn  $x \in K$ .

Erfüllt eine messbare Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  für jedes  $K \Subset \mathbb{R}^n$

$$\int_K |f(x)| dx < \infty, \tag{3.1.5-C}$$

gilt also  $\|f\|_{1, K} := \|f\mathbf{1}_K\|_1 < \infty$ , so kann diesem  $f$  ebenso durch

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \tag{3.1.5-D}$$

eine Distribution zugeordnet werden. Es gilt dabei für jedes  $K \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq K$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \right| \leq \|f\|_{1,K} \|\varphi\|_{\infty,K}, \quad (3.1.5-E)$$

$T_f$  ist also eine Distribution. Die Zuordnung  $f \mapsto T_f$  ist wiederum injektiv und wir identifizieren  $T_f$  mit  $f$ . Die Injektivität folgt dabei aus der Dichtheit der stetigen Funktionen auf  $K$  in  $L^1(K)$  und ist eine Variante des Fundamentallemmas der Variationsrechnung.

Distributionen dieser Form werden als *regulär* bezeichnet. Wir erhalten damit Einbettungen

$$C(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (3.1.5-F)$$

Da ebenso  $L^p(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in [1, \infty]$  gilt, sind auch die  $L^p$ -Funktionen als Distributionen interpretierbar.

**(iii)** Die Dirac<sup>4</sup>-Distribution

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0) \quad (3.1.5-G)$$

ist eine Distribution. Hier ist die Abschätzung offensichtlich, für jedes  $K \in \mathbb{R}^n$  und jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq K$  gilt falls  $0 \in K$

$$|\langle \delta_0, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{\infty,K} \quad (3.1.5-H)$$

und andernfalls wegen  $\varphi(0) = 0$  dieselbe Abschätzung. Wir schreiben etwas allgemeiner  $\delta_x$  für die durch  $\langle \delta_x, \varphi \rangle := \varphi(x)$  gegebene in den Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  verschobene Dirac-Distribution.

**(iv)** Jedes positive Borelmaß  $\mu$  mit  $\mu(K) < \infty$  für  $K \in \mathbb{R}^n$ , bestimmt durch das Lebesgueintegral

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \mu(dx) \quad (3.1.5-I)$$

eine Distribution. Es gilt dabei wiederum

$$|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq \mu(K) \|\varphi\|_{\infty,K}. \quad (3.1.5-J)$$

Schränkt man sich auf reguläre Borelmaße (also Radonmaße) ein, so ist die Zuordnung der Distribution zum Maß wiederum injektiv. Für Details sei dazu auf die Vorlesung zur Funktionalanalysis verwiesen.

**(v)** Alle bisher gezeigten Distributionen waren Distributionen *nullter Ordnung*, da die Stetigkeitsabschätzung keine Ableitungen der Testfunktion  $\varphi$  benötigt. Anders ist dies bei folgender Distribution. Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{v.p.} \frac{1}{t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad (3.1.5-K)$$

die Abbildung

$$\varphi \mapsto \left\langle \mathbf{v.p.} \frac{1}{t}, \varphi \right\rangle := \mathbf{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(t)}{t} dt. \quad (3.1.5-L)$$

---

<sup>4</sup>PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC, 1902–1984

Für diese ergibt sich durch Einsetzen  $\varphi(t) = \varphi(0) + t\psi(t)$  mit  $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  und  $\text{supp } \varphi \subseteq [-a, a]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \right) \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \right) \psi(t) dt = \int_a^a \psi(t) dt. \quad (3.1.5-M)$$

Die Funktion  $\psi$  kann durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung abgeschätzt werden. Es gilt für reellwertige  $\varphi$

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(\eta) \quad (3.1.5-N)$$

mit einem  $\eta$  zwischen 0 und  $t$ . Damit folgt

$$|\psi(t)| \leq 2\|\varphi'\|_{\infty, [-a, a]}, \quad \left| \left\langle \mathbf{v.p.} \frac{1}{t}, \varphi \right\rangle \right| \leq 4a\|\varphi'\|_{\infty, [-a, a]} \quad (3.1.5-O)$$

und es handelt sich bei  $\mathbf{v.p.} \frac{1}{t}$  um eine Distribution *erster Ordnung*.

**3.1.6.** Seien  $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  Distributionen. Wir sagen  $T_k$  konvergiert in  $\mathcal{D}'$  gegen eine Distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , falls für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_k, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad (3.1.6-A)$$

in  $\mathbb{C}$  konvergiert. Dafür schreiben wir auch kurz  $T_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ .

✂ **Ergänzung.** Distributionen sind vollständig bezüglich dieses Konvergenzbegriffs. Gilt also für eine Folge von Distributionen  $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  die Cauchybedingung

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad |\langle T_k, \varphi \rangle - \langle T_l, \varphi \rangle| = |\langle T_k - T_l, \varphi \rangle| \longrightarrow 0, \quad k, l \rightarrow \infty, \quad (3.1.6-B)$$

so existiert ein  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $T_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ . Dies ist praktisch zu wissen, wird für uns im Weiteren aber nicht von Bedeutung sein.

✂ **3.1.7 Beispiele.** (i) Die Einbettung  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ist (folgen-) stetig, da

$$f_k \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}} f \iff \forall K \in \mathbb{R}^n \quad \|f_k - f\|_{1, K} \longrightarrow 0 \quad (3.1.7-A)$$

und damit

$$|\langle f_k, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| = |\langle f_k - f, \varphi \rangle| \leq \|f_k - f\|_{1, K} \|\varphi\|_{\infty, K} \longrightarrow 0. \quad (3.1.7-B)$$

(ii) Konvergiert eine Folge von Punkten  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , gilt also  $x_k \longrightarrow x, k \rightarrow \infty$ , so folgt

$$\delta_{x_k} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_x, \quad (3.1.7-C)$$

da für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \delta_{x_k}, \varphi \rangle = \varphi(x_k) \longrightarrow \varphi(x) = \langle \delta_x, \varphi \rangle, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.1.7-D)$$

(iii) Der *Dirac-Kamm*

$$\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \quad (3.1.7-E)$$

ist durch eine in  $\mathcal{D}'$  konvergente Reihe gegeben. Konvergenz der Reihe folgt, da für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  Zahlen  $M, N \in \mathbb{Z}$  mit  $M < N$  und  $\text{supp } \varphi \subseteq [M, N]$  existieren und deshalb die Summe

$$\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, \varphi \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{k=M}^N \varphi(k) \quad (3.1.7-F)$$

endlich ist. Weiter gilt

$$|\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle| \leq \sum_{k=M}^N |\varphi(k)| \leq (N - M + 1) \|\varphi\|_{\infty, K} \quad (3.1.7-G)$$

und damit  $\delta_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

✂ **3.1.8 Beispiel.** Sei  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\chi(x) \geq 0$  für alle  $x$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) \, dx = 1. \quad (3.1.8-A)$$

Sei weiter zu  $\varepsilon > 0$  die Funktion  $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi(\varepsilon^{-1}x)$  definiert. Dann gilt

$$\chi_\varepsilon \longrightarrow \delta_0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.1.8-B)$$

da für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \chi_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) \varepsilon^{-n} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) \varphi(\varepsilon x) \, dx \quad (3.1.8-C)$$

und da für  $x \in \text{supp } \chi$  die Punkte  $\varepsilon x$  in einer Umgebung der Null liegen und für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen Null streben, gibt es auf Grund der Stetigkeit von  $\varphi$  zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\varepsilon_0$ , so dass für  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\forall_{x \in \text{supp } \chi} \quad |\varphi(0) - \varphi(\varepsilon x)| \leq \delta \quad (3.1.8-D)$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \varphi(0) - \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) \varphi(\varepsilon x) \, dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) (\varphi(0) - \varphi(\varepsilon x)) \, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) |\varphi(0) - \varphi(\varepsilon x)| \, dx \leq \delta \end{aligned} \quad (3.1.8-E)$$

basierend auf der Nichtnegativität von  $\chi$  gilt. Dies beweist die  $\mathcal{D}'$ -Konvergenz.



## 3.2 Rechnen mit Distributionen

**3.2.1.** Für Distributionen definiert man die *distributionelle Ableitung* als Verallgemeinerung der partiellen Integration. Dazu setzt man für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  und  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle. \quad (3.2.1-A)$$

Für durch stetig differenzierbare Funktionen gegebene reguläre Distributionen stimmt die distributionelle Ableitung stets mit der (klassischen) Ableitung überein.

Die Differentiation  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist als Abbildung zwischen Testfunktionen (folgen-) stetig. Nach Konstruktion ist damit jede distributionelle Ableitung linear und stetig

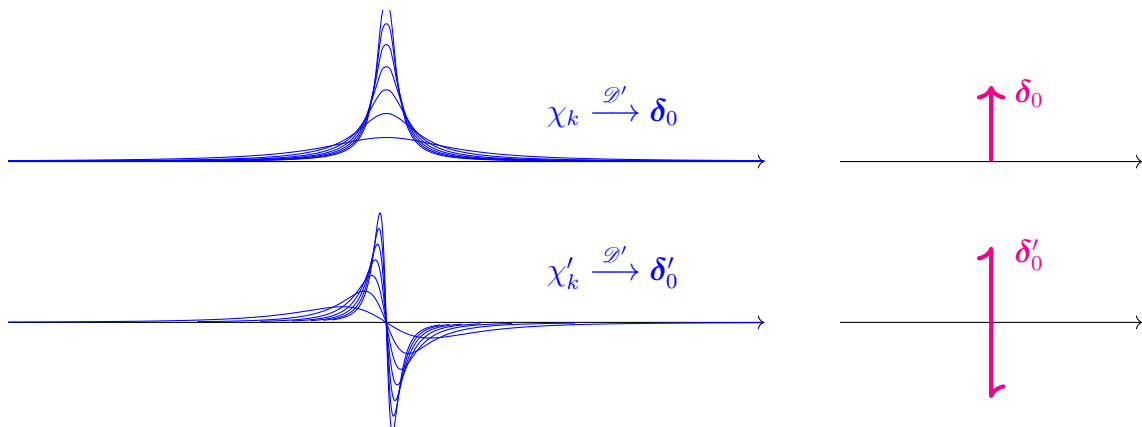
$$\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad (3.2.1-B)$$

und Distributionen sind in distributionellem Sinne beliebig oft differenzierbar.

✂ **3.2.2 Beispiel.** Wir berechnen zuerst die distributionelle Ableitung  $\delta'_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  der Dirac-Distribution. Diese ist durch

$$\langle \delta'_0, \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0). \quad (3.2.2-A)$$

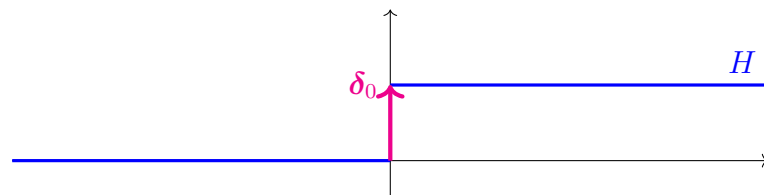
für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  gegeben.



Die distributionelle Ableitung der Heaviside<sup>5</sup>-Funktion  $H := \mathbf{1}_{[0, \infty)}$  ist durch  $H' = \delta_0$  gegeben. Dies folgt direkt durch partielles Integrieren, es gilt

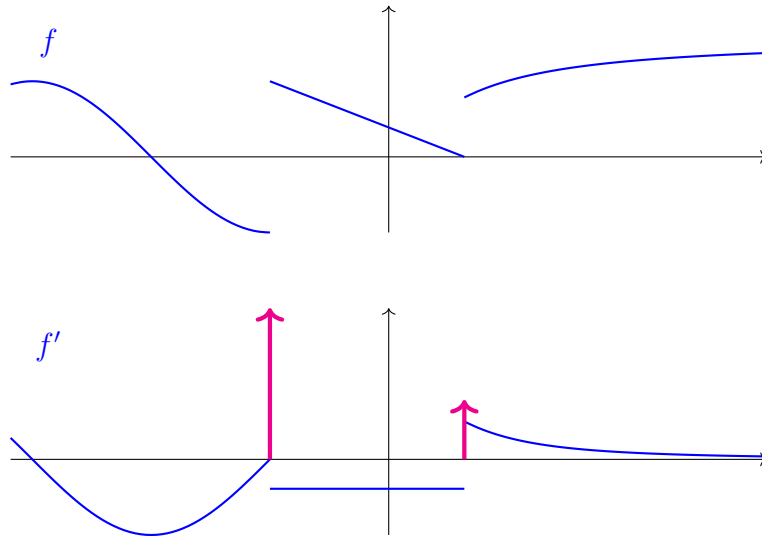
$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(t) dt = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad (3.2.2-B)$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .



<sup>5</sup>OLIVER HEAVISIDE, 1850–1925

Dies gilt auch allgemeiner, im Eindimensionalen werden Sprünge beim distributionellen Ableiten zu Vielfachen der  $\delta$ -Distribution mit der Sprunghöhe als Vorfaktor.



Distributionelle Stammfunktionen sind bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Dies zeigen wir in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  zuerst.

**3.2.3 Lemma.** *Angenommen, für ein  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  gilt  $T' = 0$ . Dann ist  $T$  konstant, es gibt also ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $T = c\mathbf{1}$ .*

*Beweis.* Die Bedingung  $T' = 0$  impliziert

$$0 = \langle T', \psi \rangle = -\langle T, \psi' \rangle \tag{3.2.3-A}$$

für alle Testfunktionen  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Wir versuchen deshalb, Testfunktionen modulo Ableitungen zu beschreiben. Sei dazu ein  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) dt = 1 \tag{3.2.3-B}$$

gegeben. Dann erfüllt für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\varphi - \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{3.2.3-C}$$

nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(\tau) - \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle \chi(\tau)) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau - \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau) d\tau \\ &= \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle - \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.2.3-D}$$

und die Stammfunktion

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t (\varphi(\tau) - \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle \chi(\tau)) d\tau \tag{3.2.3-E}$$

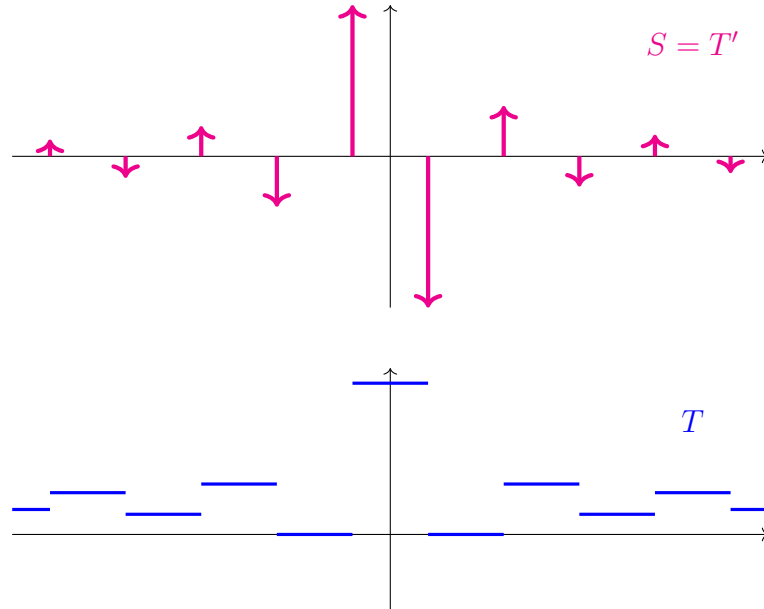
ist (da  $\psi$  für  $t > \max(\text{supp } \varphi \cup \text{supp } \chi)$  konstant) kompakt getragen. Also gilt  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  und

$$\varphi = \psi' + \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle \chi. \quad (3.2.3-F)$$

Damit folgt aber

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi' \rangle + \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle \langle T, \chi \rangle \quad (3.2.3-G)$$

und damit  $T = c\mathbf{1}$  mit  $c = \langle T, \chi \rangle$ . □



Zu jeder Distribution  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  gibt es eine distributionelle *Stammfunktion*. Dies zeigen wir als nächstes.

**3.2.4 Lemma.** *Zu jedem  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  gibt es ein  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  mit  $T' = S$ .*

*Beweis.* Wir folgen dem vorherigen Beweis. Die Distribution

$$\langle T, \varphi \rangle := -\langle S, \psi \rangle \quad (3.2.4-A)$$

erfüllt das Gewünschte. Ersetzt man in (3.2.3-E)  $\varphi$  durch  $\varphi'$ , so wird dieser die Funktion  $\psi = \varphi$  zugeordnet. Also folgt

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \text{also } T' = S \quad (3.2.4-B)$$

und damit die Behauptung. □

**3.2.5.** Zwei Distributionen kann man im Allgemeinen nicht miteinander multiplizieren. Allerdings können Distributionen mit glatten Funktionen multipliziert werden. Sei dazu  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ . Dann definieren wir  $fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle. \quad (3.2.5-A)$$

*Multiplikation mit einer glatten Funktion* liefert damit wiederum eine lineare Abbildung

$$m_f : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ni T \mapsto fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (3.2.5-B)$$

Diese ist stetig, da  $m_f : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  stetig ist.

✂ **3.2.6 Beispiel.** Multipliziert man  $\delta_0$  mit  $t : t \mapsto t$ , so ergibt sich  $t\delta_0 = 0$ , da

$$\langle t\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, t\varphi \rangle = t(0)\varphi(0) = 0 \quad (3.2.6-A)$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  gilt.

Ebenso ergibt sich  $t\delta'_0 = -\delta_0$ , da

$$\langle t\delta'_0, \varphi \rangle = \langle \delta'_0, t\varphi \rangle = -t'(0)\varphi(0) - t(0)\varphi'(0) = -\varphi(0) \quad (3.2.6-B)$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  gilt.

✂ **3.2.7 Beispiel.** Als weiteres Beispiel betrachten wir dazu  $\mathbf{v.p.} \frac{1}{t}$ . Hier gilt

$$t \mathbf{v.p.} \frac{1}{t} = 1, \quad (3.2.7-A)$$

da für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left\langle t \mathbf{v.p.} \frac{1}{t}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathbf{v.p.} \frac{1}{t}, t\varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle. \quad (3.2.7-B)$$

✂ **Ergänzung.** Die Multiplikation regulärer Distributionen ist (soweit sinnvoll definiert) kommutativ und assoziativ. Wenn dabei einzelne Faktoren nicht regulär sind, gilt dies nicht. Dazu ein Beispiel, es gilt

$$0 = 0 \mathbf{v.p.} \frac{1}{t} = (t\delta_0) \mathbf{v.p.} \frac{1}{t} = (\delta_0 t) \mathbf{v.p.} \frac{1}{t} \stackrel{?}{=} \delta_0 (t \mathbf{v.p.} \frac{1}{t}) = \delta_0. \quad (3.2.7-C)$$

Multiplikationen sind kommutativ und assoziativ, falls es um jedes  $t$  eine Umgebung gibt, auf der höchstens einer der Faktoren nicht regulär ist.

**3.2.8.** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  eine Distribution. Wir sagen  $T$  verschwindet auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$ , falls

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{supp } \varphi \in U \quad \implies \quad \langle T, \varphi \rangle = 0 \quad (3.2.8-A)$$

gilt. Wir definieren den *Träger*  $\text{supp } T$  einer Distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  als das Komplement der größten offenen Menge, auf der  $T$  verschwindet.

Diese eher umständlich wirkende Definition ist notwendig. Für stetige Funktionen stimmt der Träger als Funktion mit dem gerade definierten distributionellen Träger überein. Für reguläre Distributionen ist der distributionelle Träger der wesentliche Träger der Funktion.

✂ **3.2.9 Beispiele.** Es gilt

$$\text{supp } \delta_0 = \{0\}. \quad (3.2.9-A)$$

Ebenso impliziert  $\text{supp } T = \emptyset$  stets  $T = 0$  in distributionellem Sinne. Dazu ebenso ein Beispiel, die Funktion  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  bestimmt also Distribution

$$\langle \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t)\varphi(t) dt = 0 \quad (3.2.9-B)$$

da  $\mathbb{Q}$  als abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$  eine Lebesgue-Nullmenge ist<sup>6</sup>. Also gilt

$$\text{supp } \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = \emptyset. \quad (3.2.9-D)$$

Ebenso gilt

$$\text{supp v.p. } \frac{1}{t} = \mathbb{R}, \quad (3.2.9-E)$$

da für jedes  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und jede wie in Beispiel 3.1.8 konstruierte  $\delta$ -Folge  $\chi_n \rightarrow \delta_x$  kompakt getragener nichtnegativer Funktionen  $\chi_n(t) = n\chi(n(t-x))$  mit  $\int \chi = 1$

$$\text{dist}_H(\text{supp } \chi_n, \{x\}) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \text{v.p. } \frac{1}{t}, \chi_n \right\rangle \rightarrow \frac{1}{x} \neq 0 \quad (3.2.9-F)$$

gilt.

☞ **3.2.10 Lemma.** *Angenommen für  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\text{supp } T \subseteq \{0\}$ . Dann existieren ein  $m \in \mathbb{N}_0$  und Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  zu  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| \leq m$ , so dass*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0. \quad (3.2.10-A)$$

*Beweisskizze.* Sei  $m$  die Ordnung der Distribution  $T$  in Umgebungen des Ursprungs. Dann gilt für jedes  $K$  mit  $\{0\} \Subset K \Subset \mathbb{R}^n$  und alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq K$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\varphi\|_{\infty, K}. \quad (3.2.10-B)$$

Da ebenso  $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi + \psi \rangle$  für jedes  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 \notin \text{supp } \psi$  gilt, kann der Wert von  $\langle T, \varphi \rangle$  damit nur von den Taylorkoeffizienten von  $\varphi$  bis zur Ordnung  $m$  im Ursprung abhängen. Genau dies war zu zeigen.  $\square$

☞ **3.2.11 Korollar.** *Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Gilt dann  $tT = 0$ , so folgt  $T = c\delta_0$  mit einem  $c \in \mathbb{C}$ .*

**3.2.12.** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  kompakt getragen, gelte also  $\text{supp } T \Subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jede Abschneidefunktion  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , die in einer Umgebung von  $\text{supp } T$  konstant gleich 1 ist,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle \chi T, \varphi \rangle = \langle T, \chi \varphi \rangle, \quad (3.2.12-A)$$

da nach Wahl von  $\chi$  und der Definition des Trägers  $(1 - \chi)T = 0$  gilt.

Damit kann  $T$  insbesondere auch für beliebige  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \chi \varphi \rangle \quad (3.2.12-B)$$

<sup>6</sup>Das Integral existiert *nicht* als Riemann-Integral. Um ein R-integrierbares Beispiel gleichen Resultats zu erhalten, kann man sich die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus 0, \quad \text{ggT}(p, q) = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.2.9-C)$$

konstruieren, die ebenso auf  $\mathbb{Q}$  von Null verschieden ist und für die obiges Integral ebenso Null liefert. Damit gilt  $\text{supp } f = \emptyset$  im distributionellen Sinne.

definiert werden, der Wert von  $\langle T, \varphi \rangle$  hängt dabei nicht von der speziellen Wahl der Abschneidefunktion  $\chi$  ab. Die Abbildung

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \longmapsto \langle T, \chi\varphi \rangle \in \mathbb{C} \tag{3.2.12-C}$$

ist linear und stetig, wir können kompakt getragene Distributionen damit als Elemente von  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  auffassen. Andererseits ist jedes stetige lineare Funktional auf  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  kompakt getragen, da es eine Abschätzung der Form

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K} \tag{3.2.12-D}$$

für ein  $K \in \mathbb{R}^n$ , ein  $n \in \mathbb{N}_0$  und ein  $C > 0$  erfüllen muss. In diesem Sinne gilt

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } T \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.2.12-E}$$

und wir bezeichnen  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  als den *Raum der kompakt getragenen Distributionen*.

✂ **3.2.13 Beispiel.** Sei  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  eine kompakt getragene Distribution. Da

$$e_\xi : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto e^{-2\pi i x \cdot \xi} \in \mathbb{C} \tag{3.2.13-A}$$

für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  eine glatte Funktion ist, können wir die Fouriertransformierte der Distribution  $T$  einfach durch

$$\mathcal{F}[T](\xi) := \langle T, e_\xi \rangle \tag{3.2.13-B}$$

definieren. Da die Zuordnung

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \longmapsto e_\xi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2.13-C}$$

stetig ist, ist die durch (3.2.13-B) definierte Funktion  $\mathcal{F}[T] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Sie ist sogar beliebig oft differenzierbar, da (3.2.13-C) differenzierbar ist und wir erhalten eine verallgemeinerte Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2.13-D}$$

für beliebige kompakt getragene Distributionen.

✂ **Ergänzung.** Wir können dies sogar noch allgemeiner auffassen. Dazu verwenden wir für komplexe Vektoren  $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$  die Notation

$$z \cdot \zeta = \sum_{j=1}^n z_j \zeta_j \tag{3.2.13-E}$$

(was mit Absicht nicht das Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$  darstellt). Die Funktionen  $e_\zeta(x) := e^{-2\pi i x \cdot \zeta}$  sind dann immer noch beliebig oft differenzierbar, erfüllen also  $e_\zeta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $\zeta \in \mathbb{C}^n$ . Ebenso ist die Zuordnung  $\mathbb{C}^n \ni \zeta \mapsto e_\zeta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  stetig und komplex differenzierbar. Damit ist die oben definierte Fouriertransformation auffassbar als Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C}^n) \tag{3.2.13-F}$$

in die auf ganz  $\mathbb{C}^n$  holomorphen und damit analytischen Funktionen. Der Träger von  $T$  impliziert dabei Wachstumsbeschränkungen an die Funktion  $\mathcal{F}[T]$  auf  $\mathbb{C}^n$  in imaginäre Richtungen. Dies präzisiert der Satz von Paley<sup>7</sup>–Wiener<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>RAYMOND PALEY, 1907–1933

<sup>8</sup>NORBERT WIENER, 1894–1964

**Satz (Paley–Wiener).** Sei  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann sind äquivalent

(i)  $\text{supp } T \subseteq K$  für die konvexe Menge

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad x \cdot y \geq h_K(y)\} \quad (3.2.13\text{-G})$$

bestimmt durch ihre Stützfunktion  $h_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h_K(y) = \inf\{x \cdot y \mid x \in K\}$ ;

(ii) die Funktion  $\mathcal{F}[T] : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph und erfüllt die Abschätzung

$$|\mathcal{F}[T](\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{h_K(\text{Im } \zeta)} \quad (3.2.13\text{-H})$$

für ein  $N \in \mathbb{N}$  und alle  $\zeta \in \mathbb{C}^n$ .

Es gilt eine entsprechende Aussage für glatte Funktionen mit kompaktem Träger. Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  sind äquivalent  $\text{supp } \varphi \subseteq K$  und die Abschätzung (3.2.13-H) für alle  $N \in \mathbb{N}$  mit einer von  $N$  abhängenden Konstanten  $C$ .

**3.2.14.** Um die Definition der Faltung zweier (faltbarer) Distributionen zu motivieren, betrachten wir zuerst die Faltung zweier stetiger und hinreichend schnell fallender Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese ist durch das Integral

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) \, ds \quad (3.2.14\text{-A})$$

definiert. Interpretiert man die sich ergebende Funktion als reguläre Distribution, so gilt damit

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) \, ds \varphi(t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(s)\varphi(t+s) \, ds \, dt = \langle f \otimes g, \tilde{\varphi} \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.14\text{-B})$$

letzteres kann als Anwendung der regulären Distribution  $f \otimes g(t, s) = f(t)g(s)$  auf die neue zweidimensionale Testfunktion  $\tilde{\varphi}(t, s) = \varphi(t+s)$  interpretiert werden. Allerdings ist  $\tilde{\varphi}$  nicht kompakt getragen, was nachfolgend zur Bedingung der Faltbarkeit führt.

Wir übertragen obige Konstruktion schrittweise auf Distributionen. Sei dazu zuerst  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1})$  und  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_2})$ . Dann definieren wir das *Tensorprodukt*  $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$  als diejenige Distribution, die für spezielle Testfunktionen der Form

$$\psi_1 \otimes \psi_2(x, y) = \psi_1(x)\psi_2(y) \quad (3.2.14\text{-C})$$

zu  $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$  und  $\psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$

$$\langle S \otimes T, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle S, \psi_1 \rangle \langle T, \psi_2 \rangle \quad (3.2.14\text{-D})$$

erfüllt. Das bestimmt  $S \otimes T$  eindeutig, da

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}) = \text{span}\{\psi_1 \otimes \psi_2 \mid \psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}), \psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})\} \quad (3.2.14\text{-E})$$

(folgen-) dicht in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$  ist und die Stetigkeit der linearen Abbildungen  $S$  und  $T$  die von  $S \otimes T$  impliziert.

Beides zeigen wir kurz, der Einfachheit halber aber nur für  $n_1 = n_2 = 1$ .

**Lemma.**  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R})$  ist (folgen-) dicht in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ .

*Beweis.* Sei  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Dann gibt es ein hinreichend großes Quadrat, so dass  $\text{supp } \psi$  echt darin enthalten ist. Durch Skalieren und Verschieben können wir erreichen, dass dieses Quadrat durch  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  gegeben ist. Wir setzen  $\psi$  periodisch fort und entwickeln die periodisch fortgesetzte Funktion  $\psi_{\text{per}}$  in beiden Variablen in eine Fourierreihe

$$\psi_{\text{per}}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(y) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} e^{ikx} e^{ily} \quad (3.2.14-F)$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_k(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x, y) e^{-ikx} dx, \\ c_{k,l} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_k(y) e^{-ily} dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x, y) e^{-ikx-ily} dx dy. \end{aligned} \quad (3.2.14-G)$$

Die erste Reihe konvergiert, da  $\psi$  für festes  $y$  beliebig oft differenzierbar ist; die zweite konvergiert, da die Koeffizienten  $c_k(y)$  ebenso beliebig oft differenzierbar bezüglich  $y$  sind. Ist  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  eine Abschneidefunktion, die auf  $[-\pi, \pi]$  den Wert 1 annimmt und die in einer hinreichend kleinen Umgebung des Intervalls getragen ist, so gilt

$$\psi(x, y) = \chi(x)\chi(y)\psi_{\text{per}}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} \chi(x) e^{ikx} \chi(y) e^{ily} \quad (3.2.14-H)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz für alle Ableitungen. Da  $x \mapsto \chi(x)e^{ikx}$  und  $y \mapsto \chi(y)e^{ily}$  kompakt getragene glatte Funktionen sind, folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar.** Seien  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Dann bestimmt (3.2.14-D) genau ein  $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .

*Beweis.* Sei  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Gilt nun  $\text{supp } \psi \Subset [-\pi, \pi]^2$ , so können wir  $\psi$  wiederum als

$$\psi(x, y) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l}(\psi) \psi_k(x) \psi_l(y), \quad \psi_k(x) = \chi(x) e^{ikx} \quad (3.2.14-I)$$

schreiben. Da diese Reihe in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  konvergiert, impliziert (3.2.14-D)

$$\langle S \otimes T, \psi \rangle = \left\langle S \otimes T, \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l}(\psi) \psi_k \otimes \psi_l \right\rangle = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l}(\psi) \langle S, \psi_k \rangle \langle T, \psi_l \rangle \quad (3.2.14-J)$$

und es bleibt, die Konvergenz der Reihe sowie die Stetigkeit von  $S \otimes T$  zu zeigen. Partielles Integrieren in (3.2.14-G) liefert für jedes  $M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (1 + |k| + |l|)^M |c_{k,l}| \\ & \leq \left( \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |k| + |l|)^3} \right) \sup_{k,l \in \mathbb{Z}} (1 + |k| + |l|)^{M+3} |c_{k,l}(\psi)| \\ & \leq \left( \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |k| + |l|)^3} \right) \sup_{k,l \in \mathbb{Z}} \sum_{|\alpha| \leq M+3} \binom{M+3}{\alpha} |c_{k,l}(\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \psi)| \\ & \leq C_M \sum_{|\alpha| \leq M+3} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \psi\|_{\infty, [-\pi, \pi]^2} \end{aligned} \quad (3.2.14-K)$$



mit einer Konstanten  $C_M$ . Weiterhin gilt für Distributionen  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$|\langle S, \psi_k \rangle| \leq C_1 \sum_{j=0}^{m_1} \|\psi_k^{(j)}\|_{\infty, [-\pi-\delta, \pi+\delta]} \leq \tilde{C}_1 (1 + |k|)^{m_1},$$

$$|\langle T, \psi_l \rangle| \leq C_2 \sum_{j=0}^{m_2} \|\psi_l^{(j)}\|_{\infty, [-\pi-\delta, \pi+\delta]} \leq \tilde{C}_2 (1 + |l|)^{m_2}$$
(3.2.14-L)

mit Konstanten  $C_i > 0$  und Ordnungen  $m_i \in \mathbb{N}_0$ . Beides kombiniert liefert die Stetigkeitsabschätzung des Tensorprodukts  $S \otimes T$  zusammen mit der absoluten Konvergenz obiger Reihe. Es gilt

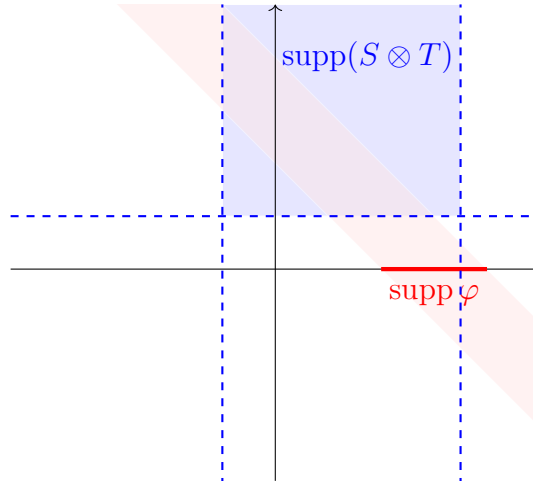
$$|\langle S \otimes T, \psi \rangle| = \left| \left\langle S \otimes T, \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} \psi_k \otimes \psi_l \right\rangle \right| \leq \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} |c_{k,l}| |\langle S, \psi_k \rangle| |\langle T, \psi_l \rangle|$$

$$\leq \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} |c_{k,l}| (1 + |k|)^{m_1} (1 + |l|)^{m_2} \leq \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (1 + |k| + |l|)^M |c_{k,l}|$$
(3.2.14-M)

$$\leq \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 C_M \sum_{|\alpha| \leq M+3} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \psi\|_{\infty, [-\pi, \pi]^2}$$

mit  $M \geq m_1 + m_2$ .

Für  $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  mit größerem Träger wählt man einen größeren Würfel und entwickelt in eine Fourierreihe zu größerer Periode.  $\square$



Wir bezeichnen nun  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  als *faltbar*, falls  $\text{supp}(S \otimes T) \subseteq \text{supp } S \times \text{supp } T$  mit jedem Streifen der Form  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x + y \in K\}$  zu  $K \Subset \mathbb{R}^n$  einen kompakten Schnitt besitzt. Sind  $S$  und  $T$  faltbar, so definieren wir *Faltung*  $S * T$  durch

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x + y) \rangle = \left\langle S(x) \otimes T(y), \chi \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R} \right) \varphi(x + y) \right\rangle$$
(3.2.14-N)

mit einer Abschneidefunktion  $\chi$ , die in der Nähe des Ursprungs konstant 1 ist und für hinreichend großes  $R$ , so dass

$$(\text{supp } S \times \text{supp } T) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x + y \in \text{supp } \varphi\} \subseteq \{(x, y) \mid \chi \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R} \right) = 1\}$$
(3.2.14-O)

gilt.

✂ **3.2.15 Beispiel.** Besitzen beide Distributionen  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  kompakten Träger, so ist  $\text{supp } S \times \text{supp } T$  kompakt und  $S$  und  $T$  sind faltbar.

In diesem Fall gilt wegen  $e_\xi(x+y) = e_\xi(x)e_\xi(y)$  der Faltungssatz

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[S * T](\xi) &= \langle S(x) \otimes T(y), e_\xi(x+y) \rangle \\ &= \langle S(x), e_\xi(x) \rangle \langle T(y), e_\xi(y) \rangle = \mathcal{F}[S](\xi) \mathcal{F}[T](\xi) \end{aligned} \quad (3.2.15-A)$$

für die verallgemeinerte Fouriertransformation.

✂ **3.2.16 Beispiel.** Für Faltbarkeit genügt es, wenn eine der beiden Distributionen kompakten Träger besitzt.

Die Faltung zweier  $L^1(\mathbb{R})$ -Funktionen benötigt keine Faltbarkeit in obigem Sinne. Sind die Funktionen allerdings als reguläre Distributionen faltbar, so stimmt die distributionelle Faltung mit der Faltung als  $L^1$ -Funktionen überein.

✂ **3.2.17 Beispiel.** Es gilt  $\delta_0 * T = T$  für jede Distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Dies rechnen wir kurz nach. Dazu nutzen wir

$$\langle \delta_0 \otimes T, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \delta_0, \psi_1 \rangle \langle T, \psi_2 \rangle = \psi_1(0) \langle T, \psi_2 \rangle \quad (3.2.17-A)$$

und erhalten damit

$$\langle \delta_0(x) \otimes T(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle T, \varphi(0, \cdot) \rangle \quad (3.2.17-B)$$

also auch

$$\langle \delta_0 * T, \varphi \rangle = \langle \delta_0(x) \otimes T(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad (3.2.17-C)$$

für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

✂ **3.2.18 Lemma.** Seien  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  faltbar. Dann gilt für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T). \quad (3.2.18-A)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha(S * T), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle S * T, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S(x) \otimes T(y), (\partial^\alpha \varphi)(x+y) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle S(x) \otimes T(y), \partial_x^\alpha \varphi(x+y) \rangle = \langle (\partial^\alpha S) * T, \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle S(x) \otimes T(y), \partial_y^\alpha \varphi(x+y) \rangle = \langle S * (\partial^\alpha T), \varphi \rangle \end{aligned} \quad (3.2.18-B)$$

und die Behauptung folgt. □

**3.2.19.** Letzteres ist praktisch, um Differentialgleichungen distributionell zu lösen. Sei dazu

$$p(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \quad (3.2.19-A)$$

ein *Differentialoperator* der Ordnung  $m$  mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ . Gibt es nun eine Distribution  $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit

$$p(\partial)\mathcal{E} = \delta_0 \quad (3.2.19-B)$$

so bezeichnet man diese als eine *Fundamentallösung* von  $p(\partial)$ . Fundamentallösungen erlauben es, zu gegebenem  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  Lösungen  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  zu

$$p(\partial)S = T \quad (3.2.19-C)$$

anzugeben. Da  $T$  kompakt getragen ist, sind  $\mathcal{E}$  und  $T$  faltbar und  $S = \mathcal{E} * T$  erfüllt nach obigem Lemma

$$p(\partial)S = p(\partial)(\mathcal{E} * T) = (p(\partial)\mathcal{E}) * T = \delta_0 * T = T. \quad (3.2.19-D)$$

In  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  bestimmt die Heaviside-Funktion  $H = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$  eine Fundamentallösung der ersten Ableitung. Damit bestimmt für kompakt getragene Distributionen  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  die Faltung  $H * T$  eine distributionelle Stammfunktion, allerdings war die Konstruktion in Lemma 3.2.4 allgemeiner.

### 3.3 Fouriertransformation im Schwartzraum

**3.3.1.** Wir führen einen weiteren Testfunktionenraum ein, der besser zur Definition der Fouriertransformation geeignet ist. Wir sagen eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  gehört zum *Schwartzraum*  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , falls für alle Multiindices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \quad (3.3.1-A)$$

zu  $L^2(\mathbb{R}^n)$  gehört. Dies bestimmt wiederum eine abzählbare Familie von Seminormen

$$\mathbf{p}_{\alpha,\beta}(\varphi) := \|(\cdot)^\alpha \partial^\beta \varphi\|_2 = \left( \int |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.3.1-B)$$

und einen zugehörigen Konvergenzbegriff. Wir sagen, eine Folge  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert in  $\mathcal{S}$  gegen ein  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , falls für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$\mathbf{p}_{\alpha,\beta}(\varphi_m - \varphi) \longrightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \quad (3.3.1-C)$$

gilt.

✂ **3.3.2 Beispiel.** Die Funktion

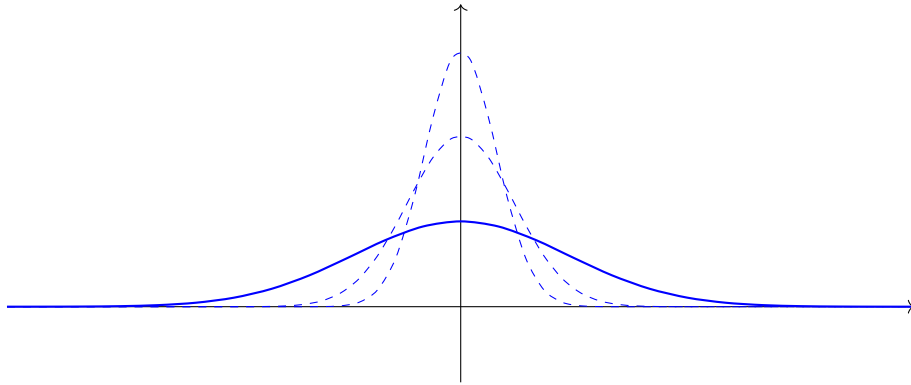
$$\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2} = e^{-\pi x \cdot x} \quad (3.3.2-A)$$

gehört zum Schwartzraum und erfüllt darüberhinaus  $\varphi(x) \geq 0$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_j^2} dy_j = 1. \quad (3.3.2-B)$$

Die Funktion erfüllt ebenso

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x_j \xi_j - \pi x_j x_j} dx_j = e^{-\pi \xi \cdot \xi} = \varphi(\xi). \quad (3.3.2-C)$$



☞ **3.3.3 Satz.** Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ist bijektiv und stetig als Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.3.3-A}$$

*Beweis.* Dies folgt im Wesentlichen aus dem Satz von Plancherel. Ist  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , dann ist

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \tag{3.3.3-B}$$

für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  als absolut konvergentes Integral wohldefiniert. Weiterhin gilt für alle Multiindizes  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \partial_\xi^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \tag{3.3.3-C}$$

und damit weiterhin

$$\begin{aligned} (2\pi i \xi)^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha \varphi(x) (2\pi i \xi)^\beta e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\beta (-2\pi i x)^\alpha \varphi(x)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \end{aligned} \tag{3.3.3-D}$$

Mit der Produktregel folgt daraus in Kombination mit Plancherel

$$\mathbf{p}_{\alpha, \beta}(\widehat{\varphi}) \leq C \sum_{\gamma \leq \alpha, \delta \leq \beta} \mathbf{p}_{\gamma, \delta}(\varphi) \tag{3.3.3-E}$$

und damit die Stetigkeit von  $\mathcal{F}$ . Aus  $\mathcal{F}\mathcal{F}[\varphi](x) = \varphi(-x)$  folgt die Bijektivität und damit die Behauptung.  $\square$

**3.3.4.** Wir sagen eine Distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ist *temperiert*, falls sie sich zu einem stetigen linearen Funktional auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen lässt. Temperierte Distributionen bestimmen also lineare Abbildungen

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}, \tag{3.3.4-A}$$

für die

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \implies \langle T, \varphi_k \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \tag{3.3.4-B}$$

gilt. Dies kann man wiederum als Ungleichung formulieren. Es muss eine Konstante  $C > 0$  und ein  $m \in \mathbb{N}_0$  existieren, so dass

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \mathbf{p}_{\alpha, \beta}(\varphi) \quad (3.3.4-C)$$

gilt. Die Menge der temperierten Distributionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Wir versehen diese ebenso mit einem Konvergenzbegriff. Eine Folge temperierter Distributionen  $T_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  konvergiert in  $\mathcal{S}'$  gegen ein  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , falls

$$\langle T_k, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad (3.3.4-D)$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert. Dafür schreiben wir auch kurz  $T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T, k \rightarrow \infty$ .

✂ **Ergänzung.** Der Vektorraum  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  der temperierten Distributionen ist ebenso vollständig bezüglich dieses Konvergenzbegriffs. Gilt für eine Folge temperierter Distributionen  $T_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  die Cauchybedingung

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad |\langle T_k, \varphi \rangle - \langle T_l, \varphi \rangle| = |\langle T_k - T_l, \varphi \rangle| \longrightarrow 0, \quad k, l \rightarrow \infty, \quad (3.3.4-E)$$

so existiert ein  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ .

✂ **3.3.5 Beispiel.** Durch stetige Funktionen  $f$  gegebene reguläre Distributionen sind temperiert, falls sie höchstens polynomiell wachsen. Durch lokal integrierbare Funktionen  $f$  gegeben reguläre Distributionen sind temperiert, falls es ein  $C > 0$  und ein  $M > 0$  mit

$$\int_{|x| < R} |f(x)| dx \leq C(1 + R)^M \quad (3.3.5-A)$$

für alle  $R > 0$  gibt.

✂ **3.3.6 Beispiel.** Die Reihe

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k \quad (3.3.6-A)$$

konvergiert in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  genau dann, wenn die Koeffizienten polynomiell beschränkt sind, also wenn es ein  $C > 0$  und ein  $M > 0$  mit

$$|a_k| \leq C(1 + |k|)^M \quad (3.3.6-B)$$

gibt.

**3.3.7.** Die *Fouriertransformierte*  $\mathcal{F}[T]$  einer temperierten Distribution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  definieren wir durch

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad (3.3.7-A)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

✂ **3.3.8 Korollar.** Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ist bijektiv und stetig als Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (3.3.8-A)$$

*Beweis.* Dies folgt aus der entsprechenden Aussage für den Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Die Zuordnung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \in \mathbb{C} \tag{3.3.8-B}$$

ist gerade die Verkettung  $T \circ \mathcal{F}$  stetiger Abbildungen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  und damit stetig. Sie ist bijektiv, da

$$\langle \mathcal{F}[\mathcal{F}[T]], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi]] \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle \tag{3.3.8-C}$$

und damit  $\mathcal{F}^2$  bis auf eine Spiegelung am Ursprung die Identität ist. □

✂ **Ergänzung.** Mit dem Testfunktionenraum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  hätte obige Definition nicht funktioniert. Ist die Fouriertransformierte  $\widehat{\varphi}$  eines  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  kompakt getragen, gilt also  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $\varphi$  analytisch und es folgt automatisch  $\varphi = 0$ . Um dies zu umgehen, könnte man zu  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  versuchen, die Fouriertransformierte via

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T, \chi_\varepsilon \mathcal{F}[\varphi] \rangle \tag{3.3.8-D}$$

für eine Abschneidefunktion  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\chi(x) = 1$  in einer Umgebung des Ursprungs und  $\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x)$  zu definieren. Auch dies schlägt im Allgemeinen fehl, da keine Konvergenz vorliegt und/oder der Grenzwert von der Wahl der Abschneidefunktion abhängt. Für  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  folgt Konvergenz in  $\mathcal{S}'$  und wir erhalten dieselbe Fouriertransformierte wie oben schon definiert.

✂ **3.3.9 Beispiel.** Die Reihe

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k t} \tag{3.3.9-A}$$

konvergiert in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  genau dann, wenn die Koeffizienten polynomiell beschränkt sind, also wenn es ein  $C > 0$  und ein  $M > 0$  mit

$$|a_k| \leq C(1 + |k|)^M \tag{3.3.9-B}$$

gibt. Dies folgt, da  $S = \mathcal{F}[T]$  mit  $T$  aus Beispiel 3.3.6 gilt.

✂ **Ergänzung.** Es bietet sich an, Kapitel 2 noch einmal anzuschauen. Viele der dort gezeigten Aussagen können ebenso in

$$\mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R}) = \{ \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \mid \varphi(\cdot + 2\pi) = \varphi \} \tag{3.3.9-C}$$

und

$$\mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R}) = \{ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid T(\cdot + 2\pi) = T \} \tag{3.3.9-D}$$

beziehungsweise in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  formuliert und gezeigt werden. Wir beginnen mit den periodischen Distributionen und ergänzen dabei auch die Dualität zwischen  $\mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$ . Sei dazu eine Abschneidefunktion  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\chi > 0$  und

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(t + 2k\pi) \tag{3.3.9-E}$$

gegeben. Die Fourierkoeffizienten  $c_k(\varphi)$  einer Funktion  $\varphi \in \mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$  erfüllen dann

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) \varphi(t) e^{-ikt} dt \tag{3.3.9-F}$$

und fallen schneller als polynomiell. Letzteres folgt direkt aus partieller Integration. Es gibt also zu jedem  $M > 0$  ein  $C_M > 0$  mit

$$|c_k(\varphi)| \leq C_M (1 + |k|)^{-M} \tag{3.3.9-G}$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Entsprechend gilt für Distributionen  $T \in \mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$  und mit der Interpretation des obigen Integrals als Anwendung auf eine Testfunktion

$$c_k(T) = \frac{1}{2\pi} \langle T, \chi \mathbf{e}_{-k} \rangle, \quad \mathbf{e}_{-k}(t) = e^{-ikt}, \quad (3.3.9-H)$$

auf Grund der Endlichkeit der Ordnung von  $T$

$$|c_k(T)| \leq C(1 + |k|)^N \quad (3.3.9-I)$$

für ein  $N > 0$  und zugehöriges  $C$ . Damit kann die harmonische Funktion  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  über die konvergente Reihe

$$g_T(z) = c_0(T) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k(T)z^k + c_{-k}(T)\bar{z}^k) \quad (3.3.9-J)$$

definiert werden. Wie in Abschnitt 2.1 schon bemerkt konvergiert diese in  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  absolut. Das Randverhalten ist dabei wie erwartet, es gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$

$$g_\varphi(re^{i\cdot}) \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi, \quad r \nearrow 1 \quad (3.3.9-K)$$

und entsprechend für alle  $T \in \mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$

$$g_T(re^{i\cdot}) \xrightarrow{\mathcal{S}'} T, \quad r \nearrow 1. \quad (3.3.9-L)$$

Bewiesen haben wir dies schon, es genügt dass der Poissonkern  $\mathbf{P}_r(t) \xrightarrow{\mathcal{S}'} 2\pi\delta_{2\pi\mathbb{Z}}$  erfüllt.

Die beiden Räume  $\mathcal{E}_{\text{per}}(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$  sind zueinander dual, dazu nutzen wir

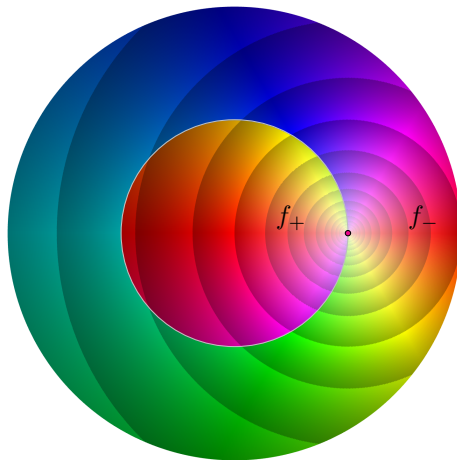
$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \chi\varphi \rangle \quad (3.3.9-M)$$

für  $T \in \mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$  und  $\varphi \in \mathcal{E}_{\text{per}}(\mathbb{R})$ . Ebenso folgt, dass  $\mathcal{E}_{\text{per}}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$  (folgen-) dicht ist.

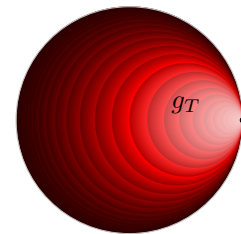
Allerdings hätten wir uns den Umweg über die Summierbarkeit hier sparen können. Die Fourierreihen

$$\sum_{k=-M}^N c_k(T)e^{ik\cdot} \xrightarrow{\mathcal{S}'} T, \quad M, N \rightarrow \infty, \quad (3.3.9-N)$$

konvergieren für alle  $T \in \mathcal{E}'_{\text{per}}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .



$f_{\pm}(z)$  zu  $T = \delta_0$



$g_T(z)$  zu  $T = \delta_0$

✂ **Ergänzung.** Auch bei der Diskussion der Fouriertransformation in Abschnitt 2.6 hätten wir Distributionen nutzen können. Sei dazu nun  $\chi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  eine Abschneidefunktion mit  $\chi(t) \in [0, 1]$  und  $\chi(t) = 1$  für  $t > 1$  und  $\chi(t) = 0$  für  $t < -1$ . Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist die Fouriertransformierte  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  eine Schwartzfunktion und die beiden Funktionen

$$F_+(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\omega) \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega z} d\omega, \quad \text{Im } z > 0 \tag{3.3.9-O}$$

und

$$F_-(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \chi(\omega)) \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega z} d\omega, \quad \text{Im } z < 0 \tag{3.3.9-P}$$

sind holomorph in den entsprechenden Halbebenen, die daraus zusammengesetzte Funktion

$$G_f(z) = F_+(z) + F_-(\bar{z}) \tag{3.3.9-Q}$$

ist damit harmonisch auf  $z > 0$ . Da für  $y > 0$  die Funktionen

$$\omega \mapsto \chi(\omega) \widehat{f}(\omega) e^{-2\pi y \omega} \quad \text{und} \quad \omega \mapsto (1 - \chi(\omega)) \widehat{f}(\omega) e^{2\pi y \omega} \tag{3.3.9-R}$$

nach Konstruktion Schwartz sind, sind  $x \mapsto F_+(x + iy)$  und  $x \mapsto F_-(x - iy)$  als Fouriertransformierte wiederum Schwartz und  $G_f(\cdot + iy) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Weiter gilt für  $x \in \mathbb{R}$  stets  $G(x) = F_+(x) + F_-(x) = f(x)$  und es kann gezeigt werden, dass

$$G_f(\cdot + iy) \xrightarrow{\mathcal{S}} f, \quad y \searrow 0. \tag{3.3.9-S}$$

Gilt andererseits  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , so bestimmen

$$F_+(z) = \langle \mathcal{F}[T], \chi e_z \rangle, \quad \text{Im } z > 0, \tag{3.3.9-T}$$

und

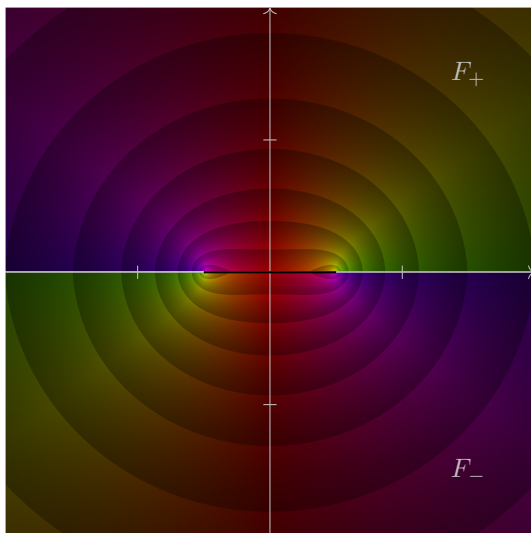
$$F_-(z) = \langle \mathcal{F}[T], (1 - \chi) e_z \rangle, \quad \text{Im } z < 0 \tag{3.3.9-U}$$

holomorphe Funktionen und die daraus zusammengesetzte Funktion

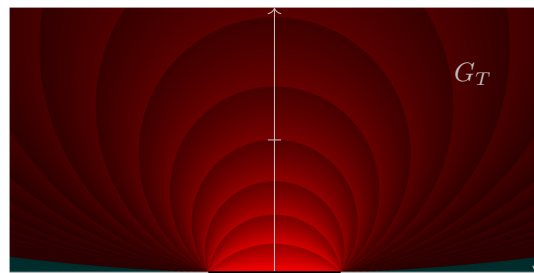
$$G_T(z) = F_+(z) + F_-(\bar{z}) \tag{3.3.9-V}$$

ist für  $\text{Im } z > 0$  harmonisch. Es sind dabei  $F_+(\cdot + iy)$ ,  $F_-(\cdot - iy)$  und  $G_T(\cdot + iy)$  für jedes  $y > 0$  polynomiell beschränkt (als Kombination von Fouriertransformierten temperierter Distributionen muss es temperiert sein, als harmonische Funktion bleibt dafür nur die polynomielle Schranke) und es gilt

$$G_T(\cdot + iy) \xrightarrow{\mathcal{S}'} T, \quad y \searrow 0. \tag{3.3.9-W}$$



$F_{\pm}(z)$  zu  $T = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$



$G_T(z)$  zu  $T = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$



# Index

- Differentialoperator, 106
  - Fundamentallösung, 107
- Distribution, 93
  - Dirac-Distribution, 94
  - Dirac-Kamm, 96
  - distributionelle Ableitung, 97
  - erster Ordnung, 95
  - faltbar, 105
  - Faltung, 105
  - Fouriertransformierte, 109
  - Multiplikation mit einer glatten Funktion, 99
  - nullter Ordnung, 94
  - Ordnung, 93
  - Raum der kompakt getragenen Distributionen, 102
  - regulär, 94
  - Stammfunktion, 99
  - temperiert, 108
  - Tensorprodukt, 103
  - Träger, 100
- Formel von Euler–Fourier, 62
- Fouriertransformation, 84
- Funktion
  - Ableitung, 13
  - analytisch, 26
  - analytisch fortsetzbar, 40
  - analytische Landschaften, 28
  - ganze Funktionen, 33
  - harmonische Funktion, 63
  - holomorph, 18
  - hölderstetig, 69, 76
  - Indikatorfunktion, 93
  - komplex differenzierbar, 13
  - meromorph, 38
  - Nullstelle
    - Ordnung, 54
  - Polstelle
    - Ordnung, 37
  - Riemannsche Fläche, 44
  - Träger, 92
- Gebiet
  - einfach zusammenhängend, 24
  - Kreisring, 34
  - Kreisscheibe, 11
- Hölder-Ungleichung, 87
- Integraldarstellung
  - Cauchysche Integralformel, 26
- Kern
  - Dirichletkern, 69
  - Fejérkern, 72
  - Poissonkern, 64
- Kreiskettenverfahren, 40
- Kurve, 18
  - Anfangspunkt, 18
  - Endpunkt, 18
  - geschlossen, 18
  - homolog, 24
  - homotop, 42, 43
  - Homotopie, 42
  - nullhomolog, 24
  - nullhomotop, 42
  - Parametrisierung, 18
  - rektifizierbar, 19
  - Windungszahl, 42
- Kurvenintegral, 19
  - Riemannsummen, 19
- Laplacetransformation, 79
- Laurentreihe, 36

- Hauptteil, 36
- Minkowski-Ungleichung, 87
- Poissonkern, 85
- Potenzreihe, 11
  - geometrische Reihe, 11
  - komplexe Exponentialfunktion, 12
  - Konvergenzradius, 11
- Singularität
  - hebbare Singularität, 37
  - isolierte Singularität, 37
  - Polstelle, 37
  - Residuum, 46
  - wesentliche Singularität, 37
- Testfunktionenraum
  - der glatten Funktionen, 91
  - der kompakt getragenen glatten Funktionen, 92
  - Schwartzraum, 107
- Wirtinger-Ableitungen, 17
- Zerlegung, 19
  - Feinheit, 19
  - gemeinsame Verfeinerung, 19
  - Teilintervalle, 19