Prof. Dr. Jens Wirth
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart

Analysis 3

Inhaltsverzeichnis

Literatur (-empfehlungen)

[1a] Konrad Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, 2004
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-18490-1`

[1b] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, Springer-Verlag, 2004
`https://doi.org/10.1007/3-540-35077-2`

[2a] Vladimir A. Zorich, *Analysis I*, Springer-Verlag, 2015
`https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1`

[2b] Vladimir A. Zorich, *Analysis II*, Springer-Verlag, 2016
`https://doi.org/10.1007/978-3-662-48993-2`

[3a] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis*, Band 1, Springer-Verlag, 2003
`https://doi.org/10.1007/978-3-322-96828-9`

[3b] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis*, Band 2, Springer-Verlag, 2003
`https://doi.org/10.1007/978-3-322-96826-5`

[4a] Grigori M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, Band 1, Verlag Harri Deutsch, 2006

[4b] Grigori M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, Band 2, Verlag Harri Deutsch, 2009

[4c] Grigori M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, Band 3, Verlag Harri Deutsch, 2011

[5] Tom Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974

[6] Wolfgang Rudin, *Analysis*, Oldenbourg, 2009

[7] Pólya, Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Springer-Verlag, 1998
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-61983-0`

[8a] Hans von Mangoldt, Konrad Knopp, *Einführung in die Höhere Mathematik*, Band 1, S. Hirzel Verlag, 1963

[8b] Hans von Mangoldt, Konrad Knopp, *Einführung in die Höhere Mathematik*, Band 2, S. Hirzel Verlag, 1965

[9a] Richard Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Band 1, Springer-Verlag, 1971
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-61988-5`

[9b] Richard Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Band 2, Springer-Verlag, 1955
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-61973-1`

[10a] Henri Cartan, *Differentialrechnung*, BI Wissenschaftsverlag, 1974

[10b] Henri Cartan, *Differentialformen*, BI Wissenschaftsverlag, 1974

[11] Serge Lang, *Analysis*, Amsterdam: Inter European Editions. XII, 1977.

Zeitplan Analysis 3

Woche	Themen	
1	Typen, Separation der Veränderlichen	8.1 8.2
2	Exakte Differentialgleichungen, Kurvenscharen	8.2
3	Existenz- und Eindeutigkeit	8.3
4	Lineare Differentialgleichungssysteme	8.4
5	Matrixexponential, Jordanform	8.4
6	Vektorfelder und Normalformen	8.5
7	Differentialformen in der Ebene, Integralsatz von Green	9.2
8	Transformationssatz	9.2
9	Differentialformen im Raum und Flächenintegrale	9.3
10	Integralsätze von Stokes und Gauss	9.3
11	Differentialformenkalkül im $\mathbb{R}^n$	9.4
12	Untermannigfaltigkeiten und Satz von Stokes	9.4
13	Vektorfelder und Differentialoperatoren	9.5
14	Extremwerte unter Nebenbedingungen, Variationsprobleme	10.1, 10.2
15	Variationsprobleme mit Nebenbedingungen	10.3

8 Differentialgleichungen

8.1 Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen

8.1.1 (Implizite und explizite Gleichungen). Eine gewöhnliche *Differentialgleichung* ist eine Gleichung für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ (oder allgemeiner $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^m$ mit einem $m \geq 1$), die Werte der Funktion und deren Ableitungen an jeder Stelle t miteinander verknüpft. Abstrakt kann man sich dies als Gleichung

$$F(t, f(t), \dots, f^{(n)}(t)) = 0 \tag{8.1.1-A}$$

mit einer Funktion

$$F : I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \tag{8.1.1-B}$$

vorstellen. Eine solche Gleichung wollen wir als *implizite Differentialgleichung* bezeichnen. Nimmt man darüberhinaus an, dass F stetig differenzierbar ist und die partielle Ableitung nach der letzten Komponente

$$\partial_{y_n} F(t, y_0, \dots, y_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \tag{8.1.1-C}$$

für gegebenes t, $y_0 = f(t)$,..., $y_n = f^{(n)}(t)$ invertierbar ist, so kann der Satz über die implizite Funktion angewandt werden. Es gibt also eine auflösende Funktion G mit

$$F(t, y_0, \dots, y_{n-1}, G(t, y_0, \dots y_{n-1})) = 0 \tag{8.1.1-D}$$

und wir können zumindest lokal die Differentialgleichung (8.1.**1-A**) als

$$f^{(n)}(t) = G(t, f(t), \dots, f^{(n-1)}(t)) \tag{8.1.1-E}$$

schreiben. Eine solche Differentialgleichung wird als *explizite Differentialgleichung* bezeichnet. Wir werden uns in diesem Kapitel vorrangig mit dem Lösen expliziter Differentialgleichungen beschäftigen. Im Prinzip reicht dies auch aus, selbst wenn die Auflösung impliziter Gleichungen zu expliziten Gleichungen nur selten direkt berechenbar ist.

Die Zahl n nennen wir die *Ordnung* der Differentialgleichung. Erhöhung der *Dimension* m erlaubt Erniedrigung von n, das schauen wir uns als nächstes an.

8.1.2 (Systeme erster Ordnung). Explizite Differentialgleichungen

$$f^{(n)}(t) = G(t, f(t), \dots, f^{(n-1)}(t)) \tag{8.1.2-A}$$

der Ordnung n lassen sich durch Einführung der neuen Variablen

$$x(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn} \tag{8.1.2-B}$$

zu einer Differentialgleichung erster Ordnung machen. Um das zu sehen, leiten wir einfach ab. Es gilt

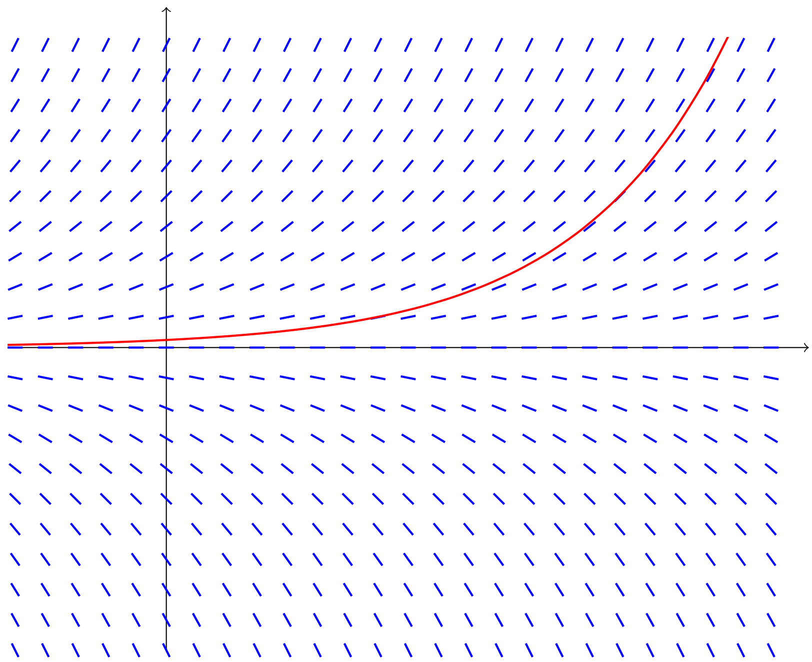
$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \\ f^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \\ G(t, f(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)) \end{bmatrix} = H(t, x(t)) \qquad (8.1.\mathbf{2\text{-}C})$$

mit der angegebenen Funktion $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{mn}$. Ist $mn > 1$, so spricht man von einem *System erster Ordnung*.

✂ **Ergänzung.** Eine Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{x} = H(t, x)$ mit $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ kann man sich graphisch als ein *Richtungsfeld* vorstellen. Jedem Punkt $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+m}$ wird durch H eine Richtung

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} + \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ H(t, x) \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^{1+m} \qquad (8.1.\mathbf{2\text{-}D})$$

zugeordnet, so dass der Graph der Lösung $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{1+m}$ jeweils tangential ist.



Diese bildhafte Vorstellung hilft nur selten beim Lösen, sie liefert allerdings ein einfaches numerisches Verfahren zum Approximieren einer Lösung durch Polygonzüge.

8.1.3. Sind Differentialgleichungen unabhängig von t, gilt also in obigen Beispielen $\partial_t F = 0$ beziehungsweise $\partial_t G = 0$ oder $\partial_t H = 0$, so bezeichnet man die Differentialgleichung als *autonom*. Für autonome Differentialgleichungen sind mit Funktionen f auch stets die verschobenen Funktionen

$$t \mapsto f(t - t_0) \qquad (8.1.\mathbf{3\text{-}A})$$

für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ Lösungen.

8.1.4. Eine Differentialgleichung oder ein System von Differentialgleichungen heißt *linear*, falls die Gleichung linear bezüglich der unbekannten Funktion ist. Für Systeme ist dies besonders einfach hinzuschreiben. Ein lineares Differentialgleichungssystem der Dimension n ist von der Form

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{8.1.4-A}$$

mit einer matrixwertigen Funktion

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{8.1.4-B}$$

Da differenzierbare Funktionen stetig sind, ist es sinnvoll zumindest Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto A(t)$ zu fordern. Für autonome lineare Differentialgleichungssysteme ist A von t unabhängig, also einfach eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Für eine lineare Differentialgleichung oder ein lineares Differentialgleichungssystem bildet die Menge der Lösungsfunktionen einen Vektorraum

$$\{x : I \to \mathbb{R}^n \mid \dot{x}(t) = A(t)x(t)\}, \tag{8.1.4-C}$$

den *Lösungsraum*. Wir werden zeigen, dass dieser stets endlichdimensional ist.

Oft bezeichnet man ein System der Form (8.1.4-A) als *homogen*, um es von

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{8.1.4-D}$$

mit gegebenem $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zu unterscheiden. Letzteres bezeichnet man als *inhomogen*. Die Differenz zweier Lösungen eines inhomogenen Systems ist Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

8.2 Elementare Lösungsverfahren

⚒ **8.2.1 Beispiel.** Mitunter sind Differentialgleichungen erster Ordnung für skalarwertige Funktionen durch elementare Umformungen direkt lösbar. Wir betrachten zuerst zwei vorbereitende Beispiele.

(i) Die lineare Differentialgleichung

$$f'(t) = f(t) \tag{8.2.1-A}$$

besitzt die Lösungen $f(t) = ce^t$ mit Parametern $c \in \mathbb{R}$. Wir wollen dies direkt nachrechnen. Ist $f(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so gilt auch $f(t) \neq 0$ auf einer Umgebung $I = (a, b)$, $t_0 \in I$, und wir können die Gleichung umformen und auf beiden Seiten integrieren. Es folgt also

$$1 = \frac{f'(t)}{f(t)}, \qquad t \in I, \tag{8.2.1-B}$$

und damit

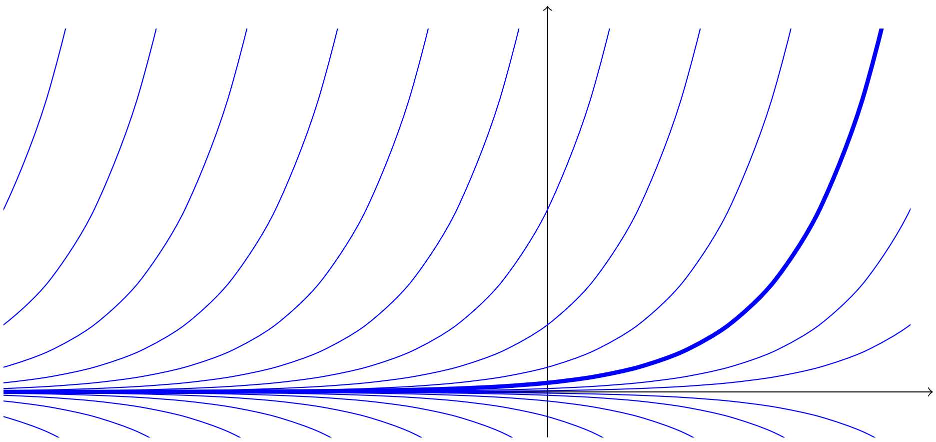
$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\theta = \int_{t_0}^{t} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \big[\ln|f(\theta)|\big]_{\theta=t_0}^{t} = \ln|f(t)| - \ln|f(t_0)| \tag{8.2.1-C}$$

für alle $t \in I$. Letzteres kann direkt nach $f(t)$ umgestellt werden. Es folgt

$$f(t) = \pm \mathrm{e}^{\ln|f(t)|} = \pm \mathrm{e}^{t - t_0 + \ln|f(t_0)|} = c\mathrm{e}^t \tag{8.2.1-D}$$

mit der sich ergebenden Konstanten $c \neq 0$. Es folgt insbesondere, das f unter den Voraussetzungen nie Null wird und $I = \mathbb{R}$ gewählt werden kann. Ist andererseits $f(t_0) = 0$ so ist damit aber auch $f(t) = 0$ die einzige Lösung. Es ergibt sich als Lösungsraum der linearen Differentialgleichung also

$$\operatorname{span}\{t \mapsto \mathrm{e}^t\}. \tag{8.2.1-E}$$



(ii) Die Differentialgleichung

$$f'(t) = t(1 + (f(t))^2) \tag{8.2.1-F}$$

ist ebenso explizit lösbar. Wir nehmen an, dass wir für einen Wert t_0 den Funktionswert $f(t_0)$ kennen. Da $1 + (f(t))^2 \geq 1 > 0$ gilt, können wir wiederum die Gleichung umformen und integrieren. Es folgt

$$t = \frac{f'(t)}{1 + (f(t))^2} \tag{8.2.1-G}$$

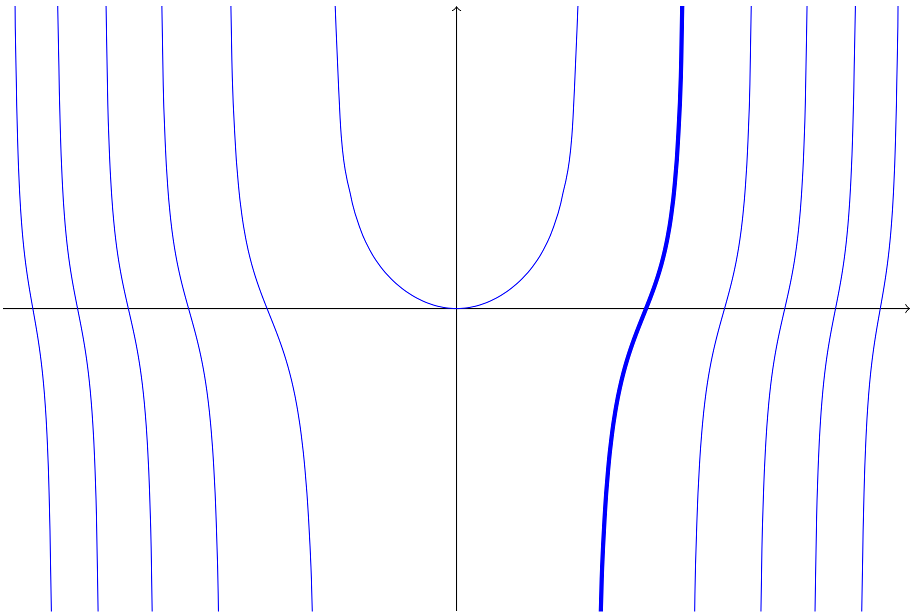
und damit

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - t_0^2}{2} &= \int_{t_0}^{t} \theta \,\mathrm{d}\theta = \int_{t_0}^{t} \frac{f'(\theta)}{1 + (f(\theta))^2} \,\mathrm{d}\theta = \big[\arctan f(\theta)\big]_{\theta = t_0}^{t} \\ &= \arctan f(t) - \arctan f(t_0). \end{aligned} \tag{8.2.1-H}$$

Nach $f(t)$ umgestellt folgt

$$f(t) = \tan\left(\frac{t^2 - t_0^2}{2} + \arctan f(t_0)\right) = \tan\left(\frac{t^2}{2} - c\right) \tag{8.2.1-I}$$

für das entsprechende $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist in der Nähe von t_0 definiert, das größtmögliche Intervall ergibt sich aus der Lage der Polstellen der Tangensfunktion in Abhängigkeit des Parameters c. Speziell mit $c = 0$ ergeben sich Abschnitte aus dem folgenden Bild.



Das gerade skizzierte Verfahren funktioniert allgemeiner und kann auf Differentialgleichungen der Form

$$f'(t) = \varphi(t)\psi(f(t)) \tag{8.2.1-J}$$

mit stetigen Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angewendet werden.

☞ **8.2.2 Satz** (Separation der Veränderlichen)**.** *Seien $\varphi : I \to \mathbb{R}$ und $\psi : J \to \mathbb{R}$ auf offenen Intervallen definierte stetige Funktionen, $t_0 \in I$ und $f_0 \in J$. Gilt dann $\psi(f_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung von t_0 in I und eine eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung*

$$f'(t) = \varphi(t)\psi(f(t)), \qquad f(t_0) = f_0, \tag{8.2.2-A}$$

und diese ist durch

$$f(t) = \Psi^{-1}\big(\Phi(t) - \Phi(t_0) + \Psi(f_0)\big) \tag{8.2.2-B}$$

mit

$$\Phi(t) = \int \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \Psi(f) = \int \frac{\mathrm{d}f}{\psi(f)} \tag{8.2.2-C}$$

bestimmt.

Beweis. Da die Rechnung der obigen entspricht, geben wir nur die fehlenden Begründungen. Da $\psi(f_0) \neq 0$ gilt, ist $\frac{1}{\psi(f)}$ auf einer Umgebung von f_0 wohldefiniert und entweder positiv oder negativ. Damit ist die zugehörige Stammfunktion

$$\Psi(f) = \int_{f_0}^{f} \frac{\mathrm{d}f}{\psi(f)} \tag{8.2.2-D}$$

streng monoton, erfüllt $\Psi(f_0) = 0$ und die Gleichung

$$\Psi(f(t)) - \Psi(f(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{f'(\theta)}{\psi(f(\theta))}\,\mathrm{d}\theta = \int_{t_0}^{t} \phi(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Phi(t) - \Phi(t_0) \tag{8.2.2-E}$$

ist eindeutig nach f auflösbar. Die Behauptung folgt. □

8.2.3. Andere Differentialgleichungen lassen sich mitunter durch *Substitution* auf Gleichungen mit separierbaren Veränderlichen zurückführen. Ein Beispiel dafür sind *Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen* in der Ebene. Wir verwenden dafür im $\mathbb{R}^2$ die Koordinaten x und y und suchen nach einer Funktion $y = y(x)$ die

$$y'(x) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x \neq 0, \tag{8.2.3-A}$$

erfüllt. Der Anstieg der Funktion hängt also stets vom Quotienten $\frac{y}{x}$ ab, ist damit also entlang von Geraden durch den Ursprung konstant. Dies hat zur Folge, dass mit einer Lösung $y = y(x)$ insbesondere auch die reskalierte Funktion $x \mapsto \lambda y(\lambda^{-1}x)$, also die Funktion die an der Stelle λx den Funktionswert $\lambda y(x)$ hat, eine Lösung ist.

Führt man die neue Funktion $f(x) = \frac{y(x)}{x}$ ein, so folgt

$$f'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{\varphi(f(x)) - f(x)}{x} \tag{8.2.3-B}$$

und wir erhalten eine Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen. Wir betrachten ebenso ein Beispiel.

8.2.4 Beispiel. Die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{2y - x}{2x - y} \tag{8.2.4-A}$$

ist eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, da die rechte Seite nur vom Quotienten y/x abhängt. Mit der Substitution $f(x) = \frac{y(x)}{x}$ kann diese zu

$$f'(x) = \frac{1}{x}\frac{2y - x}{2x - y} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{2f(x) - 1 - f(x)(2 - f(x))}{2 - f(x)} = \frac{1}{x}\frac{(f(x))^2 - 1}{2 - f(x)} \tag{8.2.4-B}$$

umgeformt werden. Die sich ergebende Differentialgleichung hat trennbare Veränderliche und führt damit für $f(x) \neq \pm 1$ auf

$$\int \frac{f(x) - 2}{1 - (f(x))^2} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + \mathrm{C}. \tag{8.2.4-C}$$

und wegen

$$\frac{s - 2}{1 - s^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - s} - \frac{3}{2}\frac{1}{1 + s} \tag{8.2.4-D}$$

folgt

$$\int \frac{f(x) - 2}{1 - (f(x))^2} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|1 - f(x)| - \frac{3}{2}\ln|1 + f(x)| + \mathrm{C}. \tag{8.2.4-E}$$

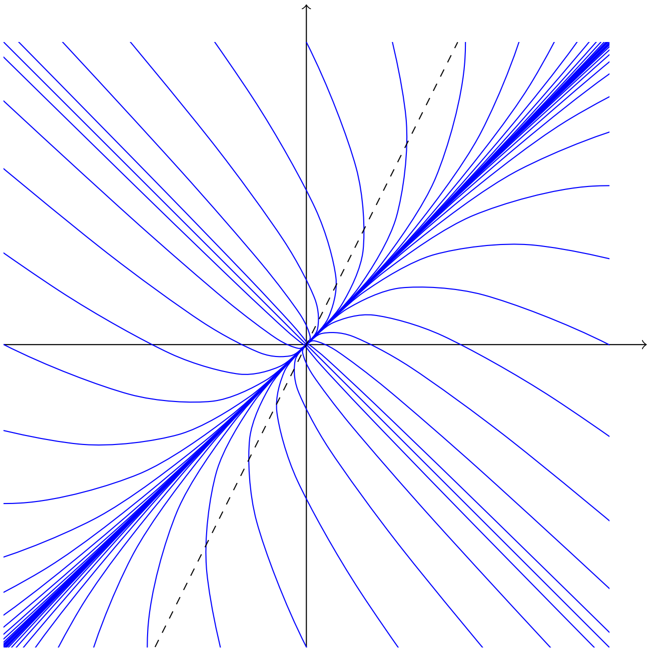
Also folgt nach Gleichsetzen und Anwenden der Exponentialfunktion

$$\mathrm{C}|x| = \frac{\sqrt{|1 - f(x)|}}{|1 + f(x)|\sqrt{|1 + f(x)|}} = \frac{|x|\sqrt{|x - y|}}{|x + y|\sqrt{|x + y|}}. \tag{8.2.4-F}$$

Quadrieren und elementares Umformen führt damit auf

$$(x+y)^3 = c(x-y) \tag{8.2.4-G}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, Auflösen der Gleichung führt zur gewünschten Form der Lösung. Für $f(x) = \pm 1$ an einer Stelle ergibt sich $f(x) = \pm 1$ für alle x und daraus die weiteren Lösungen $y = x$ und $y = -x$.



Entlang der gestrichelten Linie $y = 2x$ sind die Lösungskurven nicht differenzierbar als Funktion $y(x)$ auflösbar. Es ist besser, sich die Familie der Lösungen als *Kurvenschar* mit einem Scharparameter $c \in \mathbb{R}$ vorzustellen. Für $c \to \pm\infty$ ergibt sich die weitere Lösung $y = x$.

8.2.5. Mitunter sind Lösungskurven einer Differentialgleichung erster Ordnung Niveaulinien einer skalarwertigen Funktion. Dies führt zu einem weiteren elementaren Lösungsverfahren. Ist der Graph einer Funktion $y = y(x)$ Niveaulinie einer differenzierbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$, gilt also auf Ω

$$y = y(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi(x,y) = c, \tag{8.2.5-A}$$

so folgt durch Differenzieren

$$\partial_x \Phi(x,y) + y'(x)\partial_y \Phi(x,y) = 0 \tag{8.2.5-B}$$

und damit für $y = y(x)$ die Differentialgleichung

$$y'(x) = -\frac{\partial_x \Phi(x,y)}{\partial_y \Phi(x,y)}. \tag{8.2.5-C}$$

Wir wollen Differentiale nutzen, um diese Differentialgleichung anders aufzuschreiben. Für jede Parametrisierung des Graphen

$$\Gamma \quad : \quad x = x(t), \quad y = y(t), \qquad \text{für } t \in I, \tag{8.2.5-D}$$

folgt aus $\Phi(x(t), y(t)) = c$ durch Differenzieren

$$\partial_x \Phi(x,y)\dot{x}(t) + \partial_y \Phi(x,y)\dot{y}(t) = 0. \tag{8.2.5-E}$$

Mit der Notation $\mathrm{d}x = \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}y = \dot{y}(t)\,\mathrm{d}t$ folgt damit auf Γ

$$\mathrm{d}\Phi\big|_\Gamma = \big(\partial_x \Phi(x,y)\,\mathrm{d}x + \partial_y \Phi(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\big|_\Gamma = 0. \tag{8.2.5-F}$$

Jeder zum Graphen Γ im Punkt $(x,y)^\top$ tangentiale Vektor liegt also in $\ker \mathrm{d}\Phi$.

✂ **Ergänzung.** Mitunter schreibt man deshalb auch kurz

$$\partial_x \Phi(x,y)\,\mathrm{d}x + \partial_y \Phi(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{8.2.5-G}$$

für die sich ergebende Differentialgleichung, auch wenn diese Identität nur eingeschränkt auf den Graphen der Lösung gilt.

8.2.6 (Exakte Differentialgleichungen)**.** Wir betrachten Gleichungen der gerade diskutierten Form

$$\big(a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\big|_\Gamma = 0 \tag{8.2.6-A}$$

mit zwei Funktionen $a, b : \Omega \to \mathbb{R}$ als Koeffizienten. Die Gleichung (8.2.6-A) heißt *exakt*, falls es eine (Fréchet-) differenzierbare Funktion Φ, das *Potential*, mit

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{8.2.6-B}$$

also mit $a(x,y) = \partial_x \Phi(x,y)$ und $b(x,y) = \partial_y \Phi(x,y)$ gibt. Lösungen einer exakten Differentialgleichung ergeben sich durch Auflösen der Gleichung $\Phi(x,y) = c$. Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen es eine solche Funktion Φ gibt. Nach dem Satz von Schwarz ist für differenzierbare a und b dafür zumindest

$$\partial_y a(x,y) = \partial_y \partial_x \Phi(x,y) = \partial_x \partial_y \Phi(x,y) = \partial_x b(x,y) \tag{8.2.6-C}$$

notwendig. Dies ist auf einfach zusammenhängenden Gebieten auch hinreichend, wir zeigen die Aussage der Einfachheit halber nur für sternförmige Gebiete.

☞ **8.2.7 Satz** (Integrabilitätskriterium)**.** *Angenommen, Ω ist sternförmig bezüglich eines Punktes (x_0, y_0) und die Funktionen a und b sind stetig differenzierbar. Gilt dann*

$$\partial_y a(x,y) = \partial_x b(x,y) \tag{8.2.7-A}$$

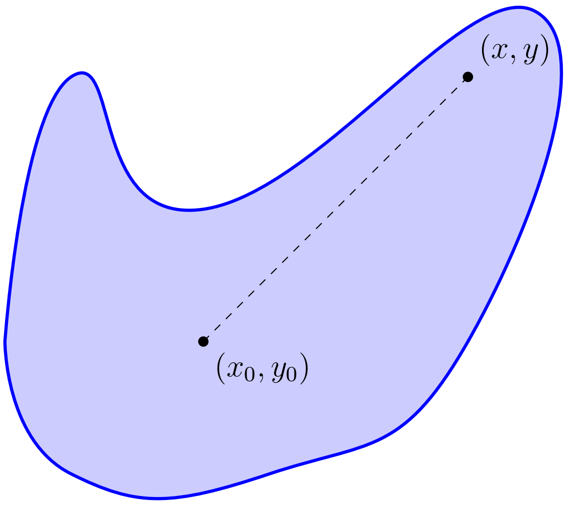
für alle $x, y \in \Omega$, so ist die Gleichung (8.2.6-A) *exakt.*

Beweis. Es genügt, die Funktion Φ zu konstruieren. Dazu nutzen wir für jeden Punkt (x,y) eine Parametrisierung der Verbindungsgerade zu (x_0, y_0)

$$\gamma_{(x,y)} \quad : \quad x(t) = tx + (1-t)x_0, \quad y(t) = ty + (1-t)y_0 \tag{8.2.7-B}$$

zu $t \in [0,1]$ mit $\dot{x} = x - x_0$ und $\dot{y} = y - y_0$ und definieren

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \int_{\gamma_{(x,y)}} \big(a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y\big) \\ &= \int_0^1 \big(a(x(t),y(t))(x-x_0) + b(x(t),y(t))(y-y_0)\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{8.2.7-C}$$



Dann gilt unter Ausnutzung der Leibnizschen Regel (Korollar 6.3.4) zusammen mit $\partial_x x(t) = t$ und der Integrabilitätsbedingung $\partial_y a(x, y) = \partial_x b(x, y)$

$$\begin{aligned}
\partial_x \Phi(x, y) &= \int_0^1 \big((\partial_x a)(x(t), y(t))\, t(x - x_0) + a(x(t), y(t)) \\
&\qquad + (\partial_x b)(x(t), y(t))\, t(y - y_0)\big)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\big(\underbrace{(\partial_x a)(x(t), y(t))(x - x_0) + (\partial_y a)(x(t), y(t))(y - y_0)}_{=\partial_t a(x(t), y(t))}\big) \\
&\qquad + a(x(t), y(t))\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \partial_t (t a(x(t), y(t)))\, \mathrm{d}t = a(x, y)
\end{aligned} \tag{8.2.7-D}$$

und entsprechend

$$\partial_y \Phi(x, y) = b(x, y). \tag{8.2.7-E}$$

Da a und b stetig sind, ist Φ stetig partiell differenzierbar, also insbesondere (Fréchet-) differenzierbar. Damit ist Φ das gesuchte Potential und der Satz ist bewiesen. □

⚒ **8.2.8 Beispiel.** Die Differentialform

$$(4x^3 - 2x)\, \mathrm{d}x + 2y\, \mathrm{d}y \tag{8.2.8-A}$$

und die zugeordnete Differentialgleichung

$$2yy' = -4x^3 + 2x \tag{8.2.8-B}$$

sind exakt, da $\partial_y (4x^3 - 2x) = 0 = \partial_x (2y)$. Zur Bestimmung eines Potentials integrieren wir. Wegen

$$\Phi(x, y) = \int \partial_x \Phi(x, y)\, \mathrm{d}y = \int 4x^3 - 2x\, \mathrm{d}x = x^4 - x^2 + \mathrm{C}(y) \tag{8.2.8-C}$$

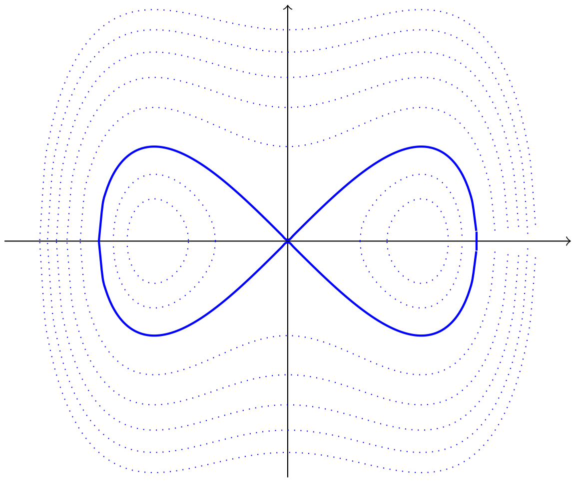
und damit $\mathrm{C}'(y) = \partial_y \Phi(x, y) \overset{!}{=} 2y$ folgt $\mathrm{C}(y) = y^2 + \mathrm{C}$ und wir erhalten

$$\Phi(x, y) = x^4 - x^2 + y^2. \tag{8.2.8-D}$$

Die Lösungen der exakten Differentialgleichungen sind also durch die Gleichung

$$x^4 - x^2 + y^2 = c \tag{8.2.8-E}$$

für verschiedene Konstanten c gegeben. Für $c = 0$ ergibt sich als Lösungskurve eine Lemniskate.



Das gerade gerechnete Beispiel hätte man auch mit Separation der Veränderlichen lösen können.

8.2.9 (Integrierende Faktoren)**.** Wenn

$$a(x, y)\,\mathrm{d}x + b(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{8.2.9-A}$$

nicht exakt ist, so kann man diese gelegentlich mit einem Faktor $\mu(x, y)$ multiplizieren, der

$$\mu(x, y)a(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu(x, y)b(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{8.2.9-B}$$

zu einer exakten Differentialform macht. Da beide dieselbe Differentialgleichung liefern, ergibt dies ein Lösungsverfahren. Das Verfahren geht auf Euler zurück und ist nur dann praktikabel, wenn μ nur von einer Variablen abhängt und damit einfach berechnet werden kann. Spezielle Ansätze der Form $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x+y)$ oder $\mu(xy)$ sind dabei mitunter hilfreich.

⚒ **8.2.10 Beispiele.** **(i)** Die Differentialform

$$3x^2y\,\mathrm{d}x + (x^3 + 2y)\,\mathrm{d}y \tag{8.2.10-A}$$

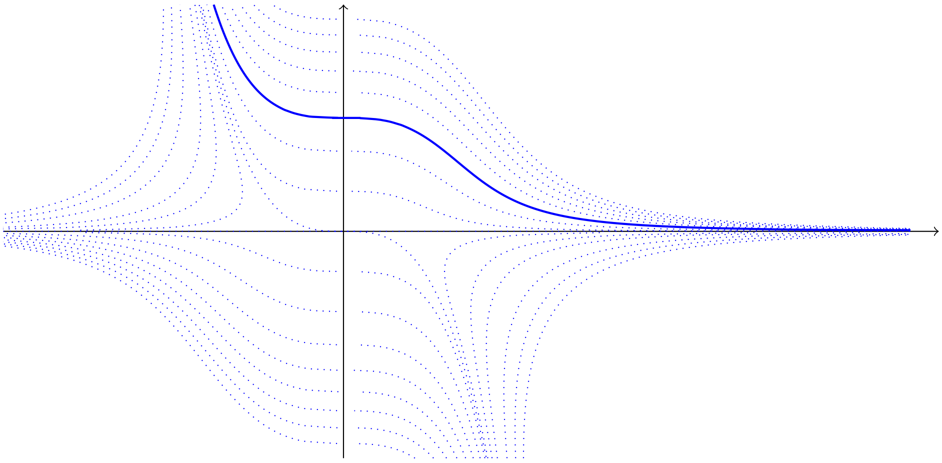
ist exakt, da $\partial_y(3x^2y) = 3x^2 = \partial_x(x^3 + 2y)$ gilt. Integration liefert als Potential

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int 3x^2y\,\mathrm{d}x = x^3y + \mathrm{C}(y), \\ \Longrightarrow \qquad x^3 + C'(y) &\overset{!}{=} x^3 + 2y, \\ \Longrightarrow \qquad \mathrm{C}(y) &= \int 2y\,\mathrm{d}y = y^2 + \mathrm{C} \end{aligned} \tag{8.2.10-B}$$

die Funktion $\Phi(x,y) = x^3y+y^2$. Damit sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$3x^2y + (x^3+2y)y' = 0 \tag{8.2.10-C}$$

durch $x^3y + y^2 = c$ für Parameter c gegeben.



(ii) Die Differentialform

$$xy^3\,\mathrm{d}x + (1+2x^2y^2)\,\mathrm{d}y \tag{8.2.10-D}$$

ist nicht exakt, da $\partial_y xy^3 = 3xy^2 \neq 4xy^2 = \partial_x(1+2x^2y^2)$ gilt. Wir suchen einen integrierenden Faktor $\mu(x,y)$. Damit nach Multiplikation mit μ die Form exakt wird, muss

$$xy^3\partial_y\mu(x,y)+\mu(x,y)\partial_y xy^3 = (1+2x^2y^2)\partial_x\mu(x,y)+\mu(x,y)\partial_x(1+2x^2y^2) \tag{8.2.10-E}$$

und damit

$$xy^3\partial_y\mu(x,y) - (1+2x^2y^2)\partial_x\mu(x,y) = xy^2\mu(x,y) \tag{8.2.10-F}$$

gelten. Es genügt, ein μ zu finden. Damit versuchen wir, möglichst viele Terme durch einen geeigneten Ansatz zu eliminieren. Nimmt man an, dass μ nur von y abhängt, so folgt

$$y\partial_y\mu(y) = \mu(y) \tag{8.2.10-G}$$

und damit zum Beispiel $\mu(y) = y$. Die sich ergebende Form

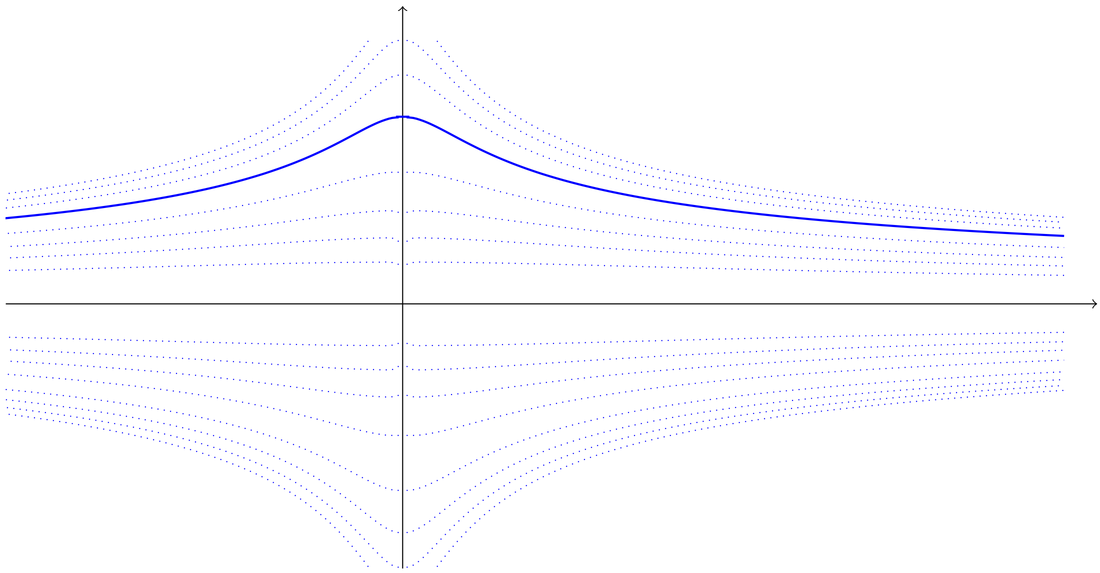
$$xy^4\,\mathrm{d}x + (y+2x^2y^3)\,\mathrm{d}y \tag{8.2.10-H}$$

ist exakt. Also besitzt die zugehörige Differentialgleichung

$$xy^4 + (y+2x^2y^3)y' = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy^3 + (1+2x^2y^2)y' = 0 \tag{8.2.10-I}$$

die implizit gegebenen Lösungen $\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\big(y^2+x^2y^4\big) = c$, also

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1+8cx^2}-1}{2x^2}}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{8.2.10-J}$$



✂ **Ergänzung.** Es gibt allgemeine Regeln, um integrierende Faktoren zu bestimmen. Gegeben sei

$$a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{8.2.10-K}$$

Wir untersuchen Bedingungen dafür, dass integrierende Faktoren μ der oben angegebenen speziellen Formen existieren.

(i) Für nur von x abhängende Faktoren $\mu(x)$ ergibt sich

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\partial_y a(x,y) - \partial_x b(x,y)}{b(x,y)}, \tag{8.2.10-L}$$

insbesondere muss der Ausdruck auf der rechten Seite unabhängig von der Variablen y sein.

(ii) Für nur von y abhängende Faktoren $\mu(y)$ ergibt sich

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{\partial_y a(x,y) - \partial_x b(x,y)}{a(x,y)} \tag{8.2.10-M}$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite muss unabhängig von x sein.

(iii) Für integrierende Faktoren der Form $\mu(x+y)$ ergibt sich

$$\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)} = -\frac{\partial_y a(x,y) - \partial_x b(x,y)}{a(x,y) - b(x,y)} \tag{8.2.10-N}$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite darf nur von der Summe $x+y$ abhängen.

(iv) Für integrierende Faktoren der Form $\mu(xy)$ ergibt sich

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} = -\frac{\partial_y a(x,y) - \partial_x b(x,y)}{xa(x,y) - yb(x,y)} \tag{8.2.10-O}$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite darf nur vom Produkt xy abhängen.

(v) Für integrierende Faktoren der Form $\mu(x^2+y^2)$ ergibt sich

$$\frac{\mu'(x^2+y^2)}{\mu(x^2+y^2)} = -\frac{\partial_y a(x,y) - \partial_x b(x,y)}{2(ya(x,y) - xb(x,y))} \tag{8.2.10-P}$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite darf nur von x^2+y^2 abhängen.

Wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, dann ergibt sich μ durch Integration der Funktion auf der rechten Seite.

8.2.11 (Kurvenscharen in der Ebene). Eine ebene Kurvenschar ist eine Familie von Kurven Γ_c, die von einem Parameter c abhängen und sich beim Verändern des Parameters c stetig (beziehungsweise differenzierbar) ändern. Oft beschreibt man diese implizit durch Gleichungen, aber ebenso wäre eine explizite Beschreibung durch eine von c abhängende Parametrisierung

$$\Gamma_c : \quad x = x(t,c), \quad y = y(t,c), \quad t \in I \tag{8.2.11-A}$$

denkbar.

Beschrieben wird eine ebene Kurvenschar damit (lokal) durch eine Gleichung

$$F(x,y,c) = 0. \tag{8.2.11-B}$$

Gilt dabei $\partial_c F \neq 0$, so kann man diese Gleichung lokal mit dem Satz über implizite Funktionen zu $G(x,y) = c$ auflösen, die Kurvenschar wird also durch die exakte Differentialgleichung

$$\big(\partial_x G(x,y)\,\mathrm{d}x + \partial_y G(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\big|_{\Gamma_c} = 0 \tag{8.2.11-C}$$

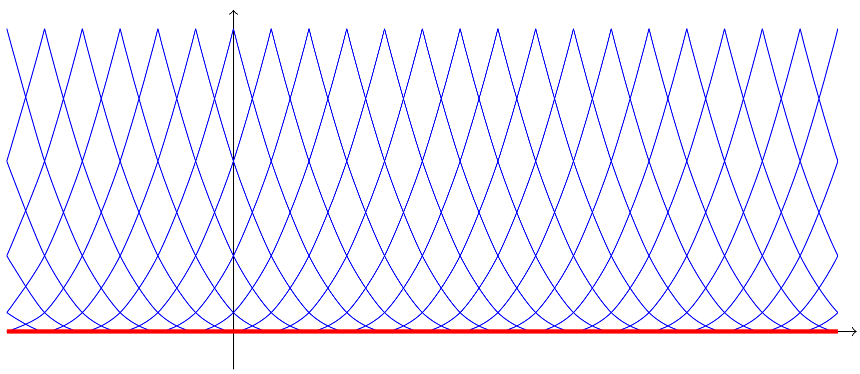
beschrieben. Kurven der Schar sind also lokal Höhenlinien einer differenzierbaren Funktion. Gilt umgekehrt $\partial_c F(x,y,c) = 0$ für einen Punkt $(x,y) \in \Gamma_c$, so spricht man von einem *singulären Punkt* der Schar. Dabei kann es sich um nichtreguläre Kurvenpunkte handeln (Spitzen oder Ecken), aber auch um reguläre Kurvenpunkte, die auf einer besonderen Menge liegen.

⚒ **8.2.12 Beispiel.** Wir betrachten dazu ein einfaches Beispiel. Die Menge der Parabeln

$$\Gamma_c \quad : \quad y = (x-c)^2 \tag{8.2.12-A}$$

bilden eine Schar, die durch die Gleichung $F(x,y,c) = y - (x-c)^2 = 0$ beschrieben wird.

Da die partielle Ableitung $\partial_c F(x,y,c) = 2(x-c)c$ erfüllt, gilt $\partial_c F(x,y,c) = 0$ für $x = c$ und damit für $y = 0$. Als singuläre Punkte der Kurvenschar Γ_c ergibt sich damit die Einhüllende $\{y = 0\}$.



Für $y > 0$ ist die Gleichung $F(x,y,c) = 0$ lokal nach c auflösbar. Dabei ergeben sich zwei mögliche Auflösungen, mit der quadratischen Lösungsformel folgt aus $c^2 - 2cx + x^2 - y = 0$

$$c = x \pm \sqrt{y} \tag{8.2.12-B}$$

und damit für die Kurvenschar selbst das paar exakter Differentialgleichungen

$$\mathrm{d}x \pm \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{8.2.12-C}$$

wobei je nach Vorzeichenwahl die linken oder rechten Parabeläste als Lösungen beschrieben werden.

8.2.13 (Isogonale Scharen)**.** Zwei Kurvenscharen, die sich paarweise unter einem konstanten Winkel schneiden, heißen *isogonal*. So sind die Schar der Geraden durch den Ursprung und die logarithmischen Spiralen

$$\Gamma_c \quad : \quad x(t) = c\mathrm{e}^{at}\cos t, \qquad y(t) = c\mathrm{e}^{at}\sin t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{8.2.13-A}$$

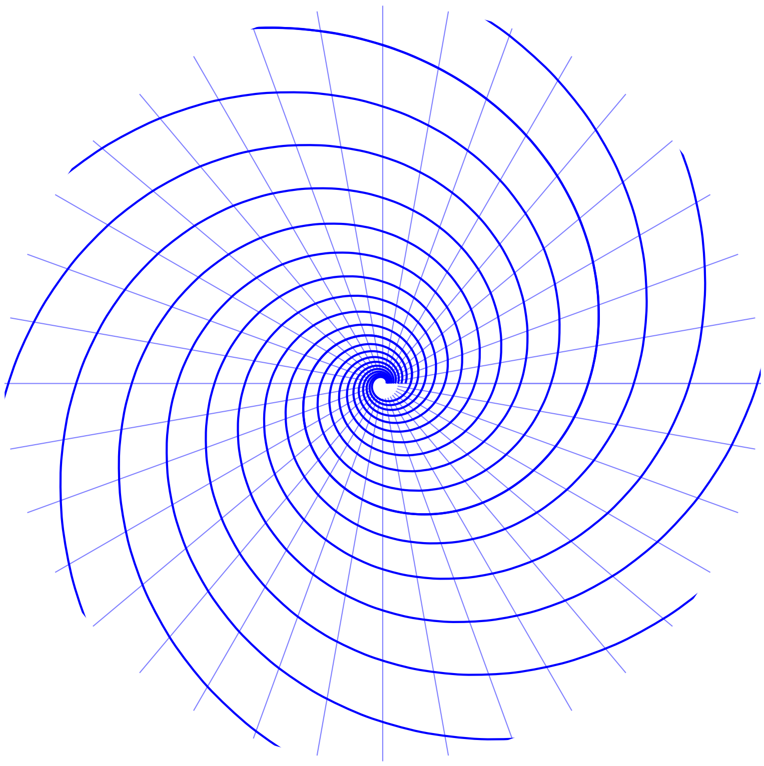
zum Scharparameter $c > 0$ isogonal. Um dies nachzurechnen, bestimmen wir die Tangentenvektoren an die Kurven und deren Winkel zum Vektor $(x, y)^\top$. Wegen

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ca\mathrm{e}^{at}\cos t - c\mathrm{e}^{at}\sin t\\ ca\mathrm{e}^{at}\sin t + c\mathrm{e}^{at}\cos t\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}c\mathrm{e}^{at}\cos t\\ c\mathrm{e}^{at}\sin t\end{bmatrix} = c^2a\mathrm{e}^{2at} \tag{8.2.13-B}$$

und

$$\left|(x, y)^\top\right| = c\mathrm{e}^{at}, \qquad \left|(\dot{x}, \dot{y})^\top\right| = c\mathrm{e}^{at}\sqrt{1 + a^2}, \tag{8.2.13-C}$$

ergibt sich der von c und t unabhängige Schnittwinkel θ aus $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.



Als interessanten Spezialfall erhalten wir die *orthogonale Kurvenschar*, die jede Kurve einer gegebenen Schar orthogonal schneidet. Orthogonale Kurvenscharen kann man durch das Lösen einer Differentialgleichung bestimmen.

8.2.14 Beispiel. Wir betrachten die Schar

$$y = cx^2 \tag{8.2.14-A}$$

der Parabeln durch den Ursprung mit der y-Achse als Symmetrieachse. Um die orthogonale Kurvenschar zu berechnen, berstimmen wir zuerst eine Differentialgleichung zur Kurvenschar. Differenzieren nach x und Elimineren des Scharparameters führt auf

$$\frac{y'(x)}{2x} = c = \frac{y(x)}{x^2} \tag{8.2.14-B}$$

und damit die Differentialgleichung $y'(x) = \frac{2y(x)}{x}$ für die gegebene Kurvenschar. Die orthogonale Kurvenschar muss damit die Differentialgleichung

$$y'(x) = -\frac{x}{2y(x)} \tag{8.2.14-C}$$

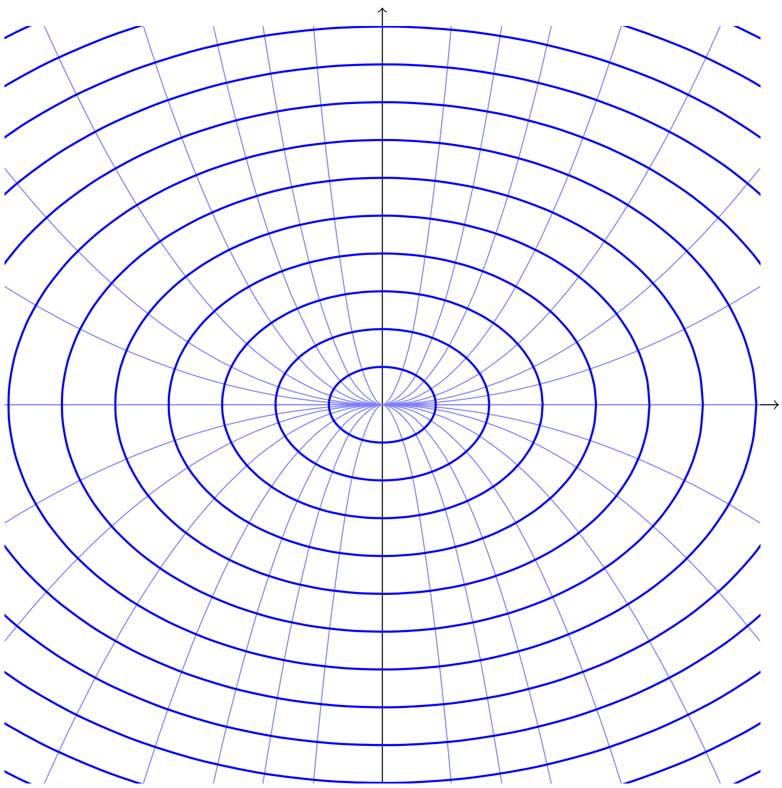
erfüllen. Dies ist wiederum eine Differentialgleichung mit separierbaren Veränderlichen. Es folgt

$$(y(x))^2 = \int 2y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 + \mathrm{C} \tag{8.2.14-D}$$

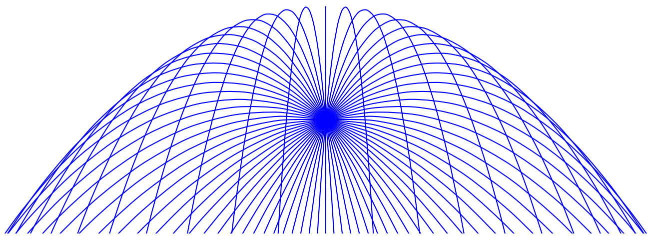
und wir erhalten eine Schar von Ellipsen

$$y^2 + \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{C} \tag{8.2.14-E}$$

als orthogonale Schar.



8.2.15 Beispiel. Mitunter können auch Differentialgleichungen höherer Ordnung direkt durch Integration gelöst werden. Wir betrachten dazu ein physikalisch motiviertes Beispiel. Von einem Punkt aus starten Bälle / Wassertropfen in jede Richtung mit vorgegebener konstanter Geschwindigkeit. Wir fragen nach den sich ergebenden Bahnkurven und dem durch die Bahnkurven ausgefüllten Gebiet.



Wir setzen alle auftretenden Konstanten auf Eins, beschränken uns auf die Betrachtung in einer Ebene und untersuchen dazu das folgende Differentialgleichungssystem: Gesucht ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $x(0) = 0$,

$$\dot{x}(0) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{8.2.15-A}$$

Durch zweifaches Integrieren der Differentialgleichung erhält man

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A \\ B - t \end{bmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} At + C \\ Bt - \frac{1}{2}t^2 + D \end{bmatrix} \tag{8.2.15-B}$$

mit noch zu bestimmenden Integrationskonstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert $C = D = 0$ und $A = \cos\alpha$ sowie $B = \sin\alpha$. Also gilt

$$x(t) = \begin{bmatrix} t\cos\alpha \\ t\sin\alpha - \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}. \tag{8.2.15-C}$$

Es ergibt sich also wie oben dargestellt eine Schar von Parabeln in der Ebene. Diese sind wegen $x_1(t) = t\cos\alpha$ und $x_2(t) = t\sin\alpha - \frac{1}{2}t^2$ von der Form

$$x_2\cos^2\alpha = x_1\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}x_1^2. \tag{8.2.15-D}$$

Unser nächstes Ziel ist es nun, die einhüllende Kurve zu berechnen. Diese ist eine Menge singulärer Punkte der Schar, es muss also zusätzlich die partielle Ableitung nach α verschwinden. Aus

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha\big(x_2\cos^2\alpha - x_1\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}x_1^2\big) \\ &\quad = -2x_2\cos\alpha\sin\alpha - x_1\cos^2\alpha + x_1\sin^2\alpha \overset{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{8.2.15-E}$$

folgt damit ein Gleichungssystem für die Einhüllende

$$2x_2\cos^2\alpha = 2x_1\sin\alpha\cos\alpha - x_1^2, \qquad 2x_2\cos\alpha\sin\alpha + x_1\cos^2\alpha = x_1\sin^2\alpha \tag{8.2.15-F}$$

und es verbleibt, den Parameter α aus diesem System zu eliminieren. Die zweite Gleichung impliziert

$$x_2 \sin(2\alpha) + x_1 \cos(2\alpha) = 0 \tag{8.2.15-G}$$

und damit zusammen mit der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} x_1 \cos(2\alpha)\cos(\alpha) &= -x_2 \sin(2\alpha)\cos(\alpha) = -2x_2 \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) \\ &= -2x_1 \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + x_1^2 \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{8.2.15-H}$$

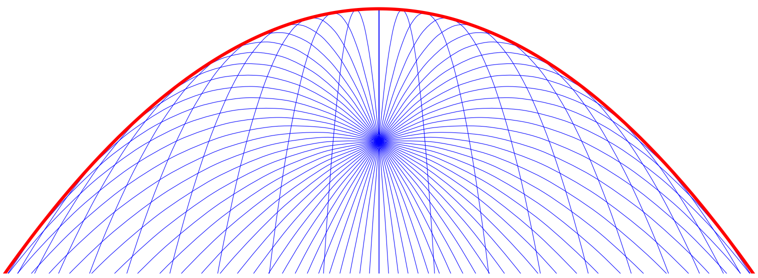
und damit $x_1 = 0$ (und damit auch $x_2 = 0$) oder

$$x_1 = \cos(2\alpha)\cot(\alpha) + \sin(2\alpha) = \cot(\alpha) \tag{8.2.15-I}$$

und

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \tan(\alpha) - \frac{x_1^2}{2\cos^2(\alpha)} \\ &= \cot(\alpha)\tan(\alpha) - \frac{\cot^2(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)} = 1 - \frac{1}{2\sin^2(\alpha)} \\ &= 1 - \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha} = \frac{1-\cot^2(\alpha)}{2} = \frac{1-x_1^2}{2}. \end{aligned} \tag{8.2.15-J}$$

Die Hüllkurve ist also ebenso eine Parabel.



8.3 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

8.3.1. Um allgemeine Aussagen über Differentialgleichungen treffen zu können, benötigen wir insbesondere Existenzsätze für Lösungen. Der erste basiert auf dem Fixpunktsatz von Banach, den wir zuerst wiederholen wollen. Die wichtigste Zutat dabei ist ein vollständiger metrischer Raum (M, d), für uns wird dies die Menge

$$\mathrm{C}([a,b];\mathbb{R}^n) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig}\} \tag{8.3.1-A}$$

der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ mit Werten im $\mathbb{R}^n$ sein. Diese versehen wir mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \tag{8.3.1-B}$$

und der davon induzierten Metrik $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$. Konvergenz in dieser Metrik entspricht gerade der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen. Wie in Kapitel 6 gezeigt, sind gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen stetig und der sich ergebende metrische Raum ist vollständig.

Weiter heißt eine Abbildung $\Phi : M \to M$ *kontrahierend*, falls es eine Zahl $\kappa < 1$ mit

$$d(\Phi(f), \Phi(g)) \le \kappa\, d(f,g) \tag{8.3.1-C}$$

für alle $f, g \in M$ gibt. Kontrahierende Abbildungen auf vollständigen metrischen Räumen besitzen stets Fixpunkte.

☞ **8.3.2 Lemma** (Fixpunktsatz von Banach[1]). *Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum, $M \neq \varnothing$ und $\Phi : M \to M$ eine kontrahierende Abbildung. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $f_* \in M$ mit $\Phi(f_*) = f_*$.*

Beweis. Sei $f_0 \in M$ beliebig. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$

$$f_{j+1} = \Phi(f_j). \tag{8.3.2-A}$$

Da Φ kontrahierend ist, gilt mit dem Kontraktionsfaktor $\kappa < 1$ aus (8.3.1-C)

$$d(f_2, f_1) = d(\Phi(f_1), \Phi(f_0)) \le \kappa\, d(f_1, f_0) \tag{8.3.2-B}$$

und damit auch

$$d(f_{j+1}, f_j) \le \kappa^j\, d(f_1, f_0). \tag{8.3.2-C}$$

Somit impliziert die Dreiecksungleichung zusammen mit der geometrischen Summenformel für beliebige $k > l$

$$d(f_k, f_l) \le \sum_{j=l}^{k-1} \kappa^j\, d(f_1, f_0) \le \frac{\kappa^l}{1-\kappa} d(f_1, f_0) \longrightarrow 0, \qquad l \to \infty. \tag{8.3.2-D}$$

Die Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ ist also Cauchy. Da M vollständig ist, ist sie damit auch konvergent und $f_* = \lim_{j\to\infty} f_j$ existiert. Da Φ nach Definition (Lipschitz-) stetig ist, folgt

$$\Phi(f_*) = \Phi(\lim_{j\to\infty} f_j) = \lim_{j\to\infty} \Phi(f_j) = \lim_{j\to\infty} f_{j+1} = f_* \tag{8.3.2-E}$$

und damit die Existenz eines Fixpunktes.

Die Eindeutigkeit ist einfach nachzurechnen, sind $f_\circ, f_\bullet \in M$ Fixpunkte von Φ, so folgt

$$d(f_\circ, f_\bullet) = d(\Phi(f_\circ), \Phi(f_\bullet)) \le \kappa\, d(f_\circ, f_\bullet) \tag{8.3.2-F}$$

und damit $d(f_\circ, f_\bullet) = 0$, also $f_\circ = f_\bullet$. □

Aus (8.3.2-D) folgt insbesondere die Abschätzung

$$d(f_*, f_0) \le \frac{1}{1-\kappa} d(\Phi(f_0), f_0) \tag{8.3.2-G}$$

[1] Stefan Banach, 1892–1945

für den Fixpunkt. Diese kann direkt genutzt werden, um die stetige Abhängigkeit des Fixpunkts von Φ zu zeigen. Dazu nutzen wir einen zweiten metrischen Raum $(N, \tilde{d})$ und eine Kontraktion $\Phi(\cdot, a) : M \to M$, die stetig von $a \in N$ abhängt und deren Kontraktionsfaktor unabhänig von a durch κ abgeschätzt werden kann.

☞ **8.3.3 Korollar.** *Angenommen, (M, d) ist nichtleerer vollständiger metrischer Raum, $(N, \tilde{d})$ metrischer Raum und $\Phi : M \times N \to M$ stetig. Angenommen, für jedes $a \in N$ gilt*

$$d(\Phi(f, a), \Phi(g, a)) \leq \kappa d(f, g) \tag{8.3.3-A}$$

für alle $f, g \in M$ und jedes $a \in N$. Sei weiter f_a der eindeutig bestimmte Fixpunkt zu $\Phi(f_a, a) = f_a$. Dann ist die Abbildung $N \ni a \mapsto f_a \in M$ stetig.

Beweis. Auf Grund der Stetigkeit von Φ in (f_a, a) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$d(f_a, g) < \delta \ \wedge \ \tilde{d}(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(\Phi(f_a, a), \Phi(g, b)) < \varepsilon. \tag{8.3.3-B}$$

Setzt man nun den Fixpunkt f_a in $\Phi(\cdot, b)$ ein, so folgt für $\tilde{d}(a, b) < \delta$

$$d(\Phi(f_a, b), f_a) = d(\Phi(f_a, b), \Phi(f_a, a)) < \varepsilon \tag{8.3.3-C}$$

und damit unter Nutzung von (8.3.2-G)

$$d(f_b, f_a) \leq \frac{1}{1-\kappa} d(\Phi(f_a, b), f_a) < \frac{\varepsilon}{1-\kappa} \tag{8.3.3-D}$$

und die Behauptung folgt. □

8.3.4. Die Lösbarkeit eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$f'(t) = H(t, f(t)), \qquad f(t_0) = f_0, \tag{8.3.4-A}$$

für eine Funktion $H : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann mit dem Banachschen Fixpunktsatz behandelt werden. Dazu nehmen wir an, dass H stetig ist und einer Lipschitzbedingung bezüglich f, also einer Abschätzung der Form

$$|H(t, f) - H(t, g)| \leq L|f - g| \tag{8.3.4-B}$$

für alle $t \in [a, b]$ genügt.

Angenommen, eine Funktion $f(t)$ löst die Differentialgleichung (8.3.4-A). Integriert man nun die Gleichung auf beiden Seiten bezüglich t, so ergibt sich

$$f(t) - f_0 = \int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} H(\tau, f(\tau))\, \mathrm{d}\tau. \tag{8.3.4-C}$$

Umgekehrt ist jede Funktion f die Integralgleichung (8.3.4-C) erfüllt stetig differenzierbar und Ableiten führt auf (8.3.4-A). Beide Gleichungen sind damit äquivalent. Die Lösung der Integralgleichung (8.3.4-C) ist ein Fixpunkt der durch

$$\Phi(f)(t) = f_0 + \int_{t_0}^{t} H(\tau, f(\tau))\, \mathrm{d}\tau \tag{8.3.4-D}$$

gegebenen Abbildung $\Phi : \mathrm{C}([a,b];\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$. Diese ist (zumindest für t nahe genug an t_0) kontrahierend, da

$$\Phi(f)(t) - \Phi(g)(t) = \int_{t_0}^{t} H(\tau, f(\tau)) - H(\tau, g(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{8.3.4-E}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(t) - \Phi(g)(t)| &\le \int_{t_0}^{t} |H(\tau, f(\tau)) - H(\tau, g(\tau))|\,\mathrm{d}\tau \\ &\le L \int_{t_0}^{t} |f(\tau) - g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{8.3.4-F}$$

also

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \le \delta L \|f - g\|_\infty \tag{8.3.4-G}$$

für Intervalle mit Länge kleiner δ gilt. Ist nun $\delta L < 1$, so ist der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar und wir erhalten eine eindeutig bestimmte Lösung von (8.3.4-A).

Wir formulieren dies etwas allgemeiner und ersetzen die Lipschitzbedingung (8.3.4-B) durch die lokale Lipschitzbedingung

$$|H(t,f) - H(t,g)| \le L|f - g|, \qquad f, g \in B_r(f_0), \tag{8.3.4-H}$$

in einer Kugel des Radius $r > 0$ um den Startwert f_0 und für $t \in [t_0 - c, t_0 + c] \subseteq (a,b)$.

☞ **8.3.5 Satz** (Picard[2]–Lindelöf[3]). *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$f'(t) = H(t, f(t)), \qquad f(t_0) = f_0, \tag{8.3.5-A}$$

für eine stetige Funktion $H : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $t_0 \in (a,b)$, $f_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, für die die lokale Lipschitzbedingung (8.3.4-H) *für t in einer Umgebung von t_0 und f, g in einer Umgebung von f_0 gilt.*

Dann existiert ein Intervall $I \subset (a,b)$ mit $t_0 \in I$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $f : I \to \Omega$ zu (8.3.5-A)

Beweis. Wir bereiten die Bühne für eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Dazu ist zuerst der passende metrische Raum festzulegen. Dafür wählen wir im Raum $\mathrm{C}([t_0 - \delta, t_0 + \delta];\mathbb{R}^n)$ für noch zu fixierendes $\delta < c$ die als Menge

$$M = \{f : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n \mid \sup_{|t - t_0| \le \delta} |f(t) - f_0| \le r\} \tag{8.3.5-B}$$

die Kugel mit Radius r um die konstante Funktion mit Wert f_0 und versehen diese mit der durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik. Dies liefert einen vollständigen metrischen Raum.

[2] Émile Picard, 1856–1941
[3] Ernst Leonard Lindelöf, 1870–1946

Die Abbildung Φ aus (8.3.**4-D**) bildet für hinreichend kleine δ die Menge M in sich ab. Dies folgt, da für $f \in M$ und $\delta < \delta_0$

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(t) - f_0| &= |\int_{t_0}^t H(\tau, f(\tau))\, \mathrm{d}\tau| \\ &\leq \int_{t_0}^t |H(\tau, f(\tau)) - H(\tau, f_0)|\, \mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^t |H(\tau, f_0)|\, \mathrm{d}\tau \\ &\leq Lr\delta + \delta \max_{|t-t_0|\leq\delta_0} |H(\tau, f_0)| \leq r \end{aligned} \tag{8.3.5-C}$$

für $\delta < r(Lr + \max_{|t-t_0|\leq\delta_0} |H(\tau, f_0)|)^{-1}$ gilt. Darüberhinaus ist Φ kontrahierend auf M, falls zusätzlich $\kappa = \delta L < 1$. Dies folgt wiederum direkt aus

$$\begin{aligned} \|\Phi(f) - \Phi(g)\| &= \sup_{|t-t_0|<\delta} |\int_{t_0}^t H(\tau, f(\tau)) - H(\tau, g(\tau))\, \mathrm{d}\tau| \\ &\leq L \int_{t_0}^t |f(\tau) - g(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \\ &\leq \delta L \|f - g\|_\infty \end{aligned} \tag{8.3.5-D}$$

zusammen mit der lokalen Lipschitzbedingung (8.3.**4-H**). Also existiert genau eine Funktion $f \in M$ mit

$$f(t) = f_0 + \int_0^t H(\tau, f(\tau))\, \mathrm{d}\tau \tag{8.3.5-E}$$

für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Da f stetig ist, ist $t \mapsto H(t, f(t))$ stetig und damit die durch das Integral definierte Funktion stetig differenzierbar. Also ist f stetig differenzierbar und es gilt nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f'(t) = H(t, f(t)). \tag{8.3.5-F}$$

Ebenso gilt $f(t_0) = f_0$ und f ist die gesuchte Lösung.

Diese ist eindeutig. Jede Lösung führt nach Integration der Differentialgleichung auf einen Fixpunkt für Φ und dieser ist nach dem Banachschen Fixpunktsatz eindeutig bestimmt. □

Die Lösung hängt lokal stetig vom Startwert f_0 und von der Funktion H ab. Dies folgt direkt aus Folgerung 8.3.3 zusammen mit obigem Beweis.

☞ **8.3.6 Korollar.** *Sei $(N, \tilde{d})$ ein metrischer Raum und $H : (a, b) \times \Omega \times N \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $t_0 \in (a, b)$, $f_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und gelte die Lipschitzbedingung (8.3.**4-H**) für t in einer Umgebung von t_0, für $f, g \in S_r = \{f \mid \operatorname{dist}(f, S) \leq r\} \subset \Omega$ für eine kompakte Menge $S \subset \Omega$ und ein $r > 0$ und alle Parameter $p \in N$. Dann gibt es ein Intervall $I \subset (a, b)$ mit $t_0 \in I$ und zu jedem $f_0 \in U$ und jedem $p \in N$ eine eindeutig bestimmte Lösung f zu*

$$f'(t) = H(t, f(t), p), \qquad f(t_0) = f_0 \tag{8.3.6-A}$$

und die Abbildung $S \times N \ni (f_0, p) \to f \in \mathrm{C}(I; \mathbb{R}^n)$ ist stetig.

8.3.7 (Maximale Existenzintervalle). Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen existieren auf offenen Intervallen. Ist der Satz von Picard–Lindelöf anwendbar, die Funktion H also auf dem gesamten Intervall lokal Lipschitz in der Variablen f, so impliziert die Eindeutigkeitsaussage:

Korollar. *Seien $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $f_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei lokale Lösungen der Differentialgleichung $f'(t) = H(t, f(t))$. Ist der Schnitt $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$ nichtleer und gibt es ein $t_* \in I_1 \cap I_2$ mit $f_1(t_*) = f_2(t_*)$, so gilt $f_1(t) = f_2(t)$ auf $I_1 \cap I_2$ und durch*

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in I_1 \\ f_2(t), & t \in I_2 \setminus I_1 \end{cases} \tag{8.3.7-A}$$

sind die Lösungen (eindeutig) zu einer Lösung auf $I_1 \cup I_2$ fortgesetzt.

Jede lokale Lösung bestimmt damit eindeutig eine *maximale Lösung* $f : I \to \mathbb{R}^n$, so dass entweder f nicht als Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden kann oder bei Fortsetzung die lokale Lipschitzbedingung verletzt ist. Maximale Existenzintervalle von Lösungen sind stets offen.

⚒ **8.3.8 Beispiel.** Die Differentialgleichung

$$f'(t) = \sin(t + f(t)) \tag{8.3.8-A}$$

ist für jeden Startwert $f(t_0) = f_0$ auf einem Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ eindeutig lösbar. Dies folgt direkt aus dem Satz von Picard–Lindelöf, da die Funktion $H(t, f) = \sin(t + f)$ auf Grund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\sin(x) - \sin(y) = \cos(\xi)(x - y) \qquad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } y \tag{8.3.8-B}$$

und damit

$$|\sin(t + f) - \sin(t + g)| \leq |t + f - t - g| = |f - g| \tag{8.3.8-C}$$

erfüllt. Die erhaltene Lösung ist sogar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da für jeden Startpunkt t_0 und jeden Startwert f_0 das Kontraktionsargument aus obigem Beweis auf jedem Intervall der Länge $\delta < 1$ anwendbar ist und wir die Lösung damit (schrittweise) auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen können.

⚒ **8.3.9 Beispiel.** Die ähnlich aussehende Differentialgleichung

$$f''(t) = \sin(t + f(t)) \tag{8.3.9-A}$$

formulieren wir als System erster Ordnung um und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(t) \\ \sin(t + f(t)) \end{bmatrix}. \tag{8.3.9-B}$$

Die sich ergebende Funktion $H(t, f_1, f_2) = (f_2, \sin(t + f_1))^\top$ ist wiederum Lipschitz in $(f_1, f_2)^\top$ und der Satz von Picard–Lindelöf anwendbar.

8.3.10 Beispiel. Ohne Lipschitzbedingung kann die Eindeutigkeit der Lösung verloren gehen. Dazu ein Beispiel. Wir betrachten die autonome Differentialgleichung erster Ordnung

$$f'(t) = \sqrt{|f(t)|}. \tag{8.3.10-A}$$

Ist $f_0 = f(t_0) \neq 0$, so kann diese in der Nähe des Startpunktes durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden. Dies führt auf für $f_0 > 0$

$$t - t_0 = \int_{f_0}^{f} \frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{f}} = 2\sqrt{f} - 2\sqrt{f_0} \tag{8.3.10-B}$$

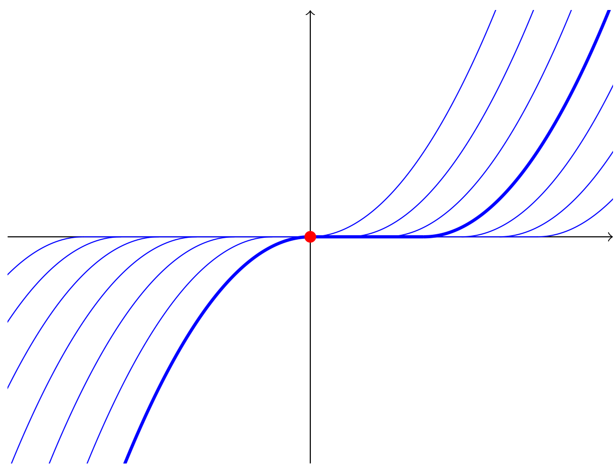
und damit

$$f(t) = \left(\frac{t-t_0}{2} + \sqrt{f_0}\right)^2, \qquad t > t_0 - 2\sqrt{f_0}, \tag{8.3.10-C}$$

Ist f_0 negativ, so ergibt sich entsprechend

$$f(t) = -\left(\frac{t-t_0}{2} - \sqrt{|f_0|}\right)^2, \qquad t < t_0 + 2\sqrt{|f_0|}. \tag{8.3.10-D}$$

Beide Lösungen erreichen $f = 0$. Die Funktion $f(t) = 0$ ist ebenso Lösung, damit ist aber auch jede der nachfolgend skizzierten Kurven durch den Punkt $(0,0)$ eine Lösung des Anfangswertproblems mit $f(0) = 0$.



Die Länge des horizontalen Stücks ist beliebig wählbar, die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems damit verletzt.

8.3.11. Als nächstes soll ein reiner Existenzsatz formuliert werden, der mit schwächeren Voraussetzungen auskommt. Dazu benötigen wir statt des Banachschen Fixpunktsatzes ein Kompaktheitsresultat. Wir erinnern daran, dass eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (M, d) (folgen-) kompakt heißt, falls jede Folge mit Gliedern in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

Im $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossene und beschränkte Teilmengen kompakt, umgekehrt sind kompakte Teilmengen immer abgeschlossen und beschränkt. Im metrischen Raum $\mathrm{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ benötigen wir neben Abgeschlossenheit und Beschränktheit eine wesentliche weitere Forderung. Dies formulieren wir zuerst. Es ist das zweite wichtige Kompaktheitskriterium der Analysis.

☞ **8.3.12 Satz** (Arzelà[4]–Ascoli[5]). *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathrm{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ ist genau dann kompakt, wenn sie*

(i) *abgeschlossen ist;*

(ii) *die Funktionen in K gleichmäßig beschränkt sind, d.h.*

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{f\in K}\forall_{t\in[a,b]} \qquad \lvert f(t)\rvert \leq M \tag{8.3.12-A}$$

gilt; und

(iii) *die Funktionen in K gleichgradig stetig sind, also*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{f\in K}\forall_{s,t\in[a,b]} \qquad |s-t|<\delta \implies \lvert f(s)-f(t)\rvert < \varepsilon \tag{8.3.12-B}$$

gilt.

Beweis. Teil 1: Zuerst begründen wir, dass kompakte Teilmengen $K \subseteq \mathrm{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ die Bedingungen (i), (ii), (iii) erfüllen. Kompakte Teilmengen sind abgeschlossen und vollständig (da jede Cauchyfolge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzen muss). Weiter ist jede kompakte Teilmenge eines normierten Raumes beschränkt, da die Norm $\|\cdot\| : K \to \mathbb{R}$ stetig ist und damit auf K ein Maximum annimmt. Interessanter ist die dritte Eigenschaft. Angenommen, jede Folge $f_n \in K \subseteq \mathrm{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Würde (iii) dann nicht gelten, dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $f \in K$ und Punkte $s,t \in [a,b]$ mit

$$|s-t|<\delta \quad \wedge \quad \lvert f(s)-f(t)\rvert \geq \varepsilon_0. \tag{8.3.12-C}$$

Wählt man nun zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ eine solche Funktion f_n und zugehörige Punkte $s_n, t_n \in [a,b]$ mit

$$|s_n - t_n| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \lvert f_n(s_n) - f_n(t_n)\rvert \geq \varepsilon_0. \tag{8.3.12-D}$$

Da $[a,b]$ kompakt ist, gibt es damit eine Teilfolge von (t_n) mit $t_{n_k} \longrightarrow \tau$ und damit auch $s_{n_k} \longrightarrow \tau$ für $k \to \infty$. Allerdings haben wir angenommen, dass jede Folge aus K eine konvergente Teilfolge besitzt, damit konvergiert eine Teilfolge von (f_{n_k}) gleichmäßig auf $[a,b]$ und (für diese Teilfolge, die wir wiederum genauso bezeichnen) gilt

$$f_{n_k}(s_{n_k}) - f_{n_k}(t_{n_k}) \longrightarrow f(\tau) - f(\tau) = 0 \tag{8.3.12-E}$$

im Widerspruch zu (8.3.**12-D**). Also ist die Annahme falsch und es gilt (iii).

Teil 2: Wir zeigen nun das eigentliche Kompaktheitskriterium. Dafür genügt es zu zeigen, dass (ii) und (iii) für eine Folge in K die Existenz einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge impliziert. Dazu nutzen wir ein Diagonalargument. Sei $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine in $[a,b]$ dichte Folge. Sei weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus K. Da nach (ii) die Folge $(f_n(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, besitzt diese nach Bolzano–Weierstrass eine konvergente Teilfolge. Es gibt also eine Teilfolge $(f_{11}, f_{12}, \ldots)$ von (f_n), so dass $f_{1k}(t_1)$ für $k \to \infty$ konvergiert. Da aber ebenso $(f_{1k}(t_2))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, finden wir wiederum eine Teilfolge $(f_{21}, f_{22}, \ldots)$ von

[4] Cesare Arzelà, 1847–1912
[5] Giulio Ascoli, 1843–1896

$(f_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$, für die $f_{2k}(t_2)$ (und natürlich ebenso $f_{2k}(t_1)$) konvergiert. Rekursiv fortgesetzt finden wir also Teilfolgen

$$\begin{matrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \cdots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \cdots \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \tag{8.3.12-F}$$

in denen jede Zeilenfolge Teilfolge der darüberstehenden ist, so dass $(f_{ik}(t_j))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $i \leq j$ konvergiert. Die Diagonalfolge $g_n := f_{nn}$ ist ab dem n-ten Folgenglied eine Teilfolge der n-ten Zeilenfolge und damit konvergiert $(g_n(t_j))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Es genügt zu zeigen, dass diese Folge (g_n) gleichmäßig konvergiert. Dazu nutzen wir die Gleichstetigkeit (iii). Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir ein $\delta > 0$, so dass für alle n und $s, t \in [a, b]$

$$|s-t| < 2\delta \quad \Longrightarrow \quad \big|g_n(s) - g_n(t)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{8.3.12-G}$$

gilt. Darüberhinaus gibt es endlich viele $\{s_1, \ldots, s_p\} \subseteq \{t_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, so dass jedes $t \in [a, b]$ höchstens Abstand δ zu einem der s_i besitzt. Also folgt für $n, m \in \mathbb{N}$ und dem zu t passenden s_i

$$\begin{aligned} \big|g_n(t) - g_m(t)\big| &\leq \big|g_n(t) - g_n(s_i)\big| + \big|g_n(s_i) - g_m(s_i)\big| + \big|g_m(s_i) - g_m(t)\big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \max_{i=1,\ldots,p} \big|g_n(s_i) - g_m(s_i)\big| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \tag{8.3.12-H}$$

und da für $n \to \infty$ jedes $\big|g_n(s_i) - g_m(s_i)\big|$ eine Nullfolge bildet und wir nur endlich viele i betrachten, gibt es ein N_ε mit $\big|g_n(s_i) - g_m(s_i)\big| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_\varepsilon$ und alle $i = 1, \ldots, p$. Also folgt

$$\big|g_n(t) - g_m(t)\big| \leq \varepsilon \tag{8.3.12-I}$$

gleichmäßig in t. Da K abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert der Folge (g_n) auch in K und damit ist die Behauptung gezeigt. □

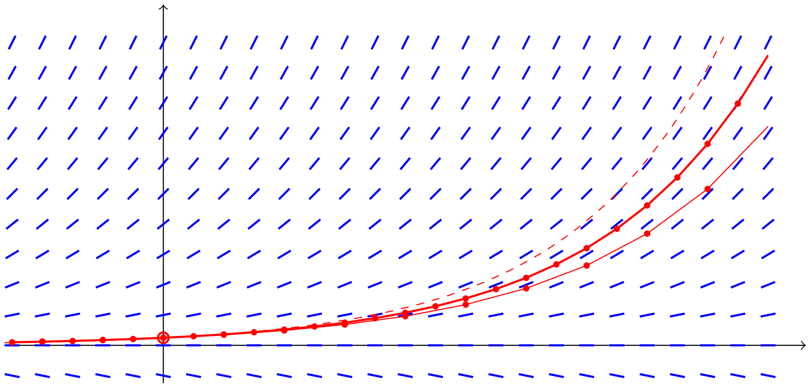
8.3.13. Zur Konstruktion der Lösung der Differentialgleichung nutzen wir das Eulersche Polygonzugverfahren. Dies lässt sich am einfachsten durch ein Bild erklären. Für eine festgelegte Schrittweite δ betrachten wir die stückweise lineare Funktion die durch

$$f(t) = f_0 + f'(t_0)(t - t_0), \qquad t \in [t_0, t_0 + \delta] \tag{8.3.13-A}$$

und dann weiter mit $t_j = t_0 + j\delta$ und rekursiv

$$f(t) = f(t_j) + f'(t_j)(t - t_j), \qquad t \in [t_j, t_j + \delta], \qquad j \in \mathbb{N} \tag{8.3.13-B}$$

definiert ist. Zumindest nahe t_0 sollte diese Funktion eine gute Näherung an die gewünschte Lösung sein. Ziel ist es nun, zu zeigen, dass diese Funktionen für $\delta \to 0$ eine konvergente Teilfolge besitzen und diese gegen eine Lösung der Differentialgleichung strebt.



☞ **8.3.14 Satz** (Existenzsatz von Peano[6]). *Sei* $H : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *stetig,* $t_0 \in (a,b)$ *und* $f_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Dann gibt es ein Teilintervall* I *mit* $t_0 \in I \subseteq (a,b)$ *und eine differenzierbare Funktion* $f : I \to \Omega$ *mit*

$$f'(t) = H(t, f(t)), \qquad f(t_0) = f_0. \tag{8.3.14-A}$$

Beweis. Wir betrachten zu $\delta > 0$ den durch (8.3.**13-A**) und (8.3.**13-B**) definierten Polygonzug durch den Punkt (t_0, f_0). Der Beweis besteht aus zwei Schritten. Zuerst zeigen wir, dass die Familie dieser stückweise linearen Funktionen für $\delta \in (0,1]$ über einem Intervall I um t_0 gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist. Damit ist der Satz von Arzelà–Ascoli anwendbar und wir finden eine Folge $\delta_n \to 0$ für die die zugeordnete Folge von Polygonzügen über I gleichmäßig konvergiert. In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass die Grenzfunktion auch tatsächlich die Differentialgleichung löst.

Schritt 1: Wir wählen ein $I = [t_0 - c, t_0 + c] \subset (a,b)$ und betrachten Polygonzüge $f_{(\delta)}$ zur Schrittweite δ durch (t_0, f_0) über dem Intervall I. Dies sind stückweise lineare Funktionen $f_{(\delta)} : I \to \mathbb{R}^n$ mit durch (8.3.**13-B**) für $j \in \mathbb{Z}$ definierten Werten an den Stützstellen $t_{j,(\delta)} = t_0 + j\delta$. Diese Funktionen sind Lipschitzstetig, für $s, t \in I$ mit $s < t$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|f_{(\delta)}(s) - f_{(\delta)}(t)\big| &\le \big|f_{(\delta)}(s) - f_{(\delta)}(t_{\min,(\delta)})\big| \\
&\quad + \sum_{j: t_{j,(\delta)} > s \,\wedge\, t_{j+1,(\delta)} < t} \big|f_{(\delta)}(t_{j+1,(\delta)}) - f_{(\delta)}(t_{j,(\delta)})\big| \\
&\quad\quad + \big|f_{(\delta)}(t_{\max+1,(\delta)}) - f_{(\delta)}(t)\big| \\
&\le \big|H(t_{\min,(\delta)}, f_{(\delta)}(t_{\min-1,(\delta)}))\big| |s - t_{\min,(\delta)}| \\
&\quad + \sum_{j: t_{j,(\delta)} > s \,\wedge\, t_{j+1,(\delta)} < t} \big|H(t_{j,(\delta)}, f_{(\delta)}(t_{j,(\delta)}))\big| \, |t_{j+1,(\delta)} - t_{j,(\delta)}| \\
&\quad\quad + \big|H(t_{\max+1,(\delta)}, f_{(\delta)}(t_{\max+1,(\delta)}))\big| |t_{\max,(\delta)} - t| \\
&\le |s - t| \max_{j: t_{j+1,(\delta)} > s \,\wedge\, t_{j,(\delta)} < t} \big|H(t_{j,(\delta)}, f_{(\delta)}(t_{j,(\delta)}))\big|
\end{aligned} \tag{8.3.14-B}$$

mit Lipschitzkonstante dem Maximum der im Polygonzugverfahren verwendeten Werte von H. Um dieses abzuschätzen, schränken wir das Intervall ein. Sei dazu

$$M = \max_{|t - t_0| \le d \,\wedge\, |f - f_0| \le r} \big|H(t, f)\big| \tag{8.3.14-C}$$

[6] Giuseppe Peano, 1858–1932

für ein d und ein r. Wählt man nun $c \leq d$ derart, dass $Mc < r$, so bleiben alle Polygonzüge über I innerhalb der gerade genutzten Kugel vom Radius r um f_0. Dies folgt direkt aus obiger Abschätzung. Damit folgt aber auch

$$\left|f_{(\delta)}(s) - f_{(\delta)}(t)\right| \leq M|s-t| \tag{8.3.14-D}$$

und die Funktionen $f_{(\delta)}$ sind auf I gleichmäßig beschränkt und gleichgradig (Lipschitz-) stetig. Damit existiert eine Folge $\delta_n \to 0$ derart, dass $(f_{(\delta_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

Schritt 2: Sei

$$f = \lim_{n\to\infty} f_{(\delta_n)} \tag{8.3.14-E}$$

der Grenzwert dieser Folge in $\mathrm{C}(I;\mathbb{R}^n)$. Definieren wir nun die Treppenfunktion

$$H_{(\delta)}(t) = H(t_{j,(\delta)}, f_{(\delta)}(t_{j,(\delta)})) \qquad \text{für } t_{j,(\delta)} \leq t < t_{j+1,(\delta)}, \tag{8.3.14-F}$$

so gilt nach Konstruktion

$$f_{(\delta)}(t) - f_0 = \int_{t_0}^{t} H_{(\delta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.3.14-G}$$

Da H auf der kompakten Menge $\{(t,f) \mid |t-t_0| \leq c \;\wedge\; |f-f_0| \leq r\}$ stetig und damit gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$, so dass

$$|s-t| < \eta \;\wedge\; \left|f-g\right| < \eta \quad\Longrightarrow\quad \left|H(s,f) - H(t,g)\right| < \varepsilon \tag{8.3.14-H}$$

gilt und auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es zu η ein n mit $\delta_n < \eta$ und $\|f - f_{(\delta_n)}\|_\infty < \eta$ und damit

$$\left|H(t,f(t)) - H_{(\delta_n)}(t)\right| = \left|H(t,f(t)) - H(t_{j,(\delta)}, f_{(\delta)}(t_{j,(\delta)}))\right| \leq \varepsilon. \tag{8.3.14-I}$$

Also konvergiert $H_{(\delta_n)}(t)$ gleichmäßig gegen $H(t,f(t))$ und es folgt

$$\int_{t_0}^{t} H(\tau, f(\tau))\,\mathrm{d}\tau = \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} H_{(\delta_n)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{n\to\infty} f_{(\delta_n)}(t) - f_0 = f(t) - f_0 \tag{8.3.14-J}$$

Die stetige Funktion f löst also die Integralgleichung (8.3.4-C). Damit folgt aber, dass f stetig differenzierbar ist und ebenso $f'(t) = H(t,f(t))$ zusammen mit den Anfangsbedingungen $f(t_0) = f_0$. □

✂ **Ergänzung.** Der Existenzsatz von Peano garantiert die Existenz von Lösungen, aber weder deren Eindeutigkeit noch deren stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen oder von der Gleichung selbst. Damit ist der Satz zwar sehr allgemein, aber auch relativ nutzlos.

Das im Beweis genutzte Eulersche Polygonzugverfahren zur Konstruktion von Näherungslösungen stellst das einfachste numerische Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen dar. Unter der Voraussetzung des Satzes 8.3.5 von Picard–Lindelöf konvergieren die Polygonzüge für $\delta \to 0$ gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte Lösung (was auch aus obigem Beweis folgt). Für praktische Anwendungen existieren deutlich schneller konvergierende Methoden, zum Beispiel das Runge[7]–Kutta[8]-Verfahren.

[7] Carl David Tolmé Runge, 1856–1927

[8] Martin Wilhelm Kutta, 1867–1944 (von 1912 bis 1935 Professor in Stuttgart)

8.4 Lineare Differentialgleichungssysteme

8.4.1 (Fundamentalsysteme). Eine Differentialgleichung heißt linear, wenn in ihr die zu bestimmende Funktion f und ihre Ableitungen linear vorkommen. Wir formulieren Differentialgleichungen höherer Ordnung zu Systemen erster Ordnung um und betrachten deswegen vorerst nur letztere. Ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung ist also stets von der Form

$$f'(t) = A(t)f(t) \tag{8.4.1-A}$$

mit einer matrixwertigen stetigen Koeffizientenfunktion $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir nehmen der Einfachheit halber[9] an, dass Koeffizienten und Lösungen komplexwertig sind.

✂ **Ergänzung.** Auf lineare Differentialgleichungssysteme ist stets der Satz 8.3.5 von Picard–Lindelöf anwendbar. Damit können wir Anfangswertprobleme für (8.4.1-A) insbesondere durch die Fixpunktiteration aus dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes direkt lösen, die Folge der Funktionen

$$\begin{aligned}
&t \mapsto f_0 + \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) f_0\\
&t \mapsto f_0 + \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau_1\right) f_0\\
&\quad\vdots\\
&t \mapsto f_0 + \left(\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\cdots\int_{t_0}^{\tau_{N-1}} A(\tau_N)\,\mathrm{d}\tau_N\cdots\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_1\right) f_0\\
&\quad\vdots
\end{aligned} \tag{8.4.1-B}$$

konvergiert also stets gleichmäßig (auf einem Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ für hinreichend kleines δ) gegen die Lösung f. Die sich ergebende Reihendarstellung wird als Peano–Baker[10]-Reihe bezeichnet. Sie ist nur selten direkt berechenbar.

Sind zwei Funktionen f_1 und f_2 Lösungen von (8.4.1-A), so sind auch Linearkombinationen $f_1 + \alpha f_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$, Lösungen und die Lösungsmenge der Gleichung (8.4.1-A) bildet einen Vektorraum über $\mathbb{C}$, den Lösungsraum von (8.4.1-A). Eine Basis des Lösungsraumes wird als *Fundamentalsystem* bezeichnet. Bildet $f_1, \dots, f_m$ ein Fundamentalsystem von Lösungen, so ist jede Lösung f von (8.4.1-A) von der Form

$$f(t) = C_1 f_1(t) + \cdots + C_m f_m(t) \tag{8.4.1-C}$$

mit Konstanten $C_j \in \mathbb{C}$. Es stellt sich die Frage, wie man einer Familie von Lösungen ansieht, ob sie ein Fundamentalsystem bildet.

☞ **8.4.2 Lemma.** *Seien $f_1, \dots, f_n$ Lösungen zu (8.4.1-A). Dann sind äquivalent:*

(i) *für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $f_1(t), \dots, f_n(t)$ linear unabhängig;*

(ii) *für ein $t_0 \in I$ sind die Vektoren $f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)$ linear unabhängig;*

(iii) *die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ sind linear unabhängig;*

(iv) *die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ bilden ein Fundamentalsystem.*

[9] Das ist tatsächlich einfacher.

[10] Henry Frederick Baker, 1866–1956

Beweis. Die Implikationen **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iii)** sind offensichtlich, wir schreiben sie noch einmal explizit auf. Aus

$$\forall_{t \in I} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(t) = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \right) \tag{8.4.2-A}$$

folgt

$$\exists_{t \in I} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(t) = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \right) \tag{8.4.2-B}$$

und damit insbesondere

$$\left(\forall_{t \in I} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(t) = 0 \right) \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0. \tag{8.4.2-C}$$

Die Implikation **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iv)** beruht auf der eindeutigen Lösbarkeit von (8.4.1-A) als Folgerung des Satzes 8.3.5 von Picard–Lindelöf. Ist f eine Lösung zu (8.4.1-A) mit Anfangsbedingung $f_0 = f(t_0) \in \mathbb{C}^n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f_0 = \alpha_1 f_1(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n(t_0) \tag{8.4.2-D}$$

und die erhaltene Lösung

$$t \mapsto \alpha_1 f_1(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) \tag{8.4.2-E}$$

muss für jedes t mit $f(t)$ übereinstimmen. Also erzeugt $f_1, \ldots, f_n$ den Lösungsraum und wegen **(iii)** handelt es sich damit um eine Basis.

Es bleibt **(iv)** $\Longrightarrow$ **(i)** zu zeigen. Angenommen, für Fundamentalsystem $f_1, \ldots, f_m$ und ein t_* sind $f_1(t_*), \ldots, f_m(t_*)$ linear abhängig. Dann gäbe es Koeffizienten $\beta_1, \ldots, \beta_m$, die nicht alle verschwinden, so dass

$$0 = \beta_1 f_1(t_*) + \cdots + \beta_m f_m(t_*). \tag{8.4.2-F}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung folgt daraus aber, dass die Linearkombination die Nulllösung darstellt und damit

$$0 = \beta_1 f_1(t) + \cdots + \beta_m f_m(t) \tag{8.4.2-G}$$

für alle t gilt. Damit ist aber $f_1, \ldots, f_m$ linear abhängig. □

☞ **8.4.3 Korollar.** *Der Lösungsraum von* (8.4.1-A) *ist n-dimensional.*

8.4.4 (Wronski-Determinante)**.** Sind zu (8.4.1-A) neben einem Fundamentalsystem $f_1, \ldots, f_n$ noch Anfangsbedingungen $f(t_0) = f_0$ gegeben, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten C_j

$$C_1 f_1(t_0) + \cdots + C_n f_n(t_0) = f_0. \tag{8.4.4-A}$$

Dieses besitzt die Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} f_{11}(t_0) & f_{21}(t_0) & \cdots & f_{n1}(t_0) \\ f_{12}(t_0) & f_{22}(t_0) & \cdots & f_{n2}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{1n}(t_0) & f_{2n}(t_0) & \cdots & f_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \tag{8.4.4-B}$$

bestehend aus den Spalten $f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)$.

Die Determinante einer solchen Matrix bestehend aus n Lösungen $f_1, \dots, f_n$ der Gleichung (8.4.1-A) wird als *Wronski-Determinante*[11] $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(t_0)$ bezeichnet. Diese ist genau dann von Null verschieden, wenn die Funktionen ein Fundamentalsystem bilden. Lemma 8.4.2 kann man damit neu formulieren.

☞ **8.4.5 Korollar.** *Seien $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{C}^n$ Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems* (8.4.1-A). *Dann sind äquivalent:*

(i) *Für ein $t_0 \in I$ gilt $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(t_0) \neq 0$.*

(ii) *Für jedes $t \in I$ gilt $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(t) \neq 0$.*

⚒ **8.4.6 Beispiel.** Mitunter können Fundamentalsysteme direkt aus der Differentialgleichung abgelesen werden. Wir betrachten als Beispiel eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0 \tag{8.4.6-A}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Angenommen, das zugehörige *charakteristische Polynom*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j) \tag{8.4.6-B}$$

besitzt paarweise verschiedene komplexe Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden die Funktionen

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_j t}, \qquad j = 1, \dots, n \tag{8.4.6-C}$$

ein Fundamentalsystem. Um dies nachzuweisen, betrachten wir das zugehörige Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$f(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \qquad f'(t) = A(t)f(t), \tag{8.4.6-D}$$

mit der sich ergebenden Koeffizientenmatrix $A(t)$. Die zu den Funktionen gehörende

[11] Josef Maria Hosné-Wronski, 1778–1853

Wronski-Determinante kann direkt berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\
&\qquad = e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = e^{-a_{n-1}t} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0
\end{aligned} \tag{8.4.6-E}$$

unter Ausnutzung von $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -a_{n-1}$ und der bekannten Formel für die Vandermonde[12]-Determinante.

8.4.7 Beispiel. Die Differentialgleichung

$$y'''(x) - y(x) = 0 \tag{8.4.7-A}$$

kann nach dem gerade diskutierten Beispiel direkt gelöst werden. Das zugehörige Polynom $\lambda^3 - 1 = 0$ besitzt als Nullstellen die drei komplexen Einheitswurzeln

$$1, \qquad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{8.4.7-B}$$

und damit als Fundamentalsystem die zugehörigen Exponentialfunktionen. Die beiden komplexen Exponentiale kann man jeweils zu Winkelfunktionen zusammenfassen, ein reelles Fundamentalsystem ist durch die drei Funktionen

$$x \mapsto e^x, \qquad x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \qquad x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \tag{8.4.7-C}$$

gegeben.

8.4.8 Beispiel. Für ein System

$$f'(t) = Af(t) \tag{8.4.8-A}$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist zu jedem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ durch

$$t \mapsto e^{\lambda t} v \tag{8.4.8-B}$$

eine Lösung gegeben. Dies folgt direkt durch Differenzieren,

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} A v. \tag{8.4.8-C}$$

Gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren, ist die Matrix A also diagonalisierbar, so bilden die gerade gefundenen Lösungen ein Fundamentalsystem.

[12] Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735–1796

☞ **8.4.9 Lemma** (Abel[13], Liouville[14]–Ostrogradski[15]). *Seien $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{C}^n$ Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems* (8.4.**1-A**). *Dann gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(f_1,\dots,f_n)(t) = \mathcal{W}(f_1,\dots,f_n)(t)\,\mathrm{trace}\,A(t) \tag{8.4.9-A}$$

und damit

$$\mathcal{W}(f_1,\dots,f_n)(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{trace}\,A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathcal{W}(f_1,\dots,f_n)(t_0). \tag{8.4.9-B}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen auf der Basis der Rechenregeln für Determinanten. Wenn wir die Einträge des Vektors $f_j(t)$ mit $f_{i,j}(t)$ bezeichnen, gilt unter Ausnutzung der zeilenweisen Linearität der Determinante

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(f_1,\dots,f_n)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & \cdots & f_{n1}(t)\\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} \partial_t f_{11}(t) & \partial_t f_{21}(t) & \cdots & \partial_t f_{n1}(t)\\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & \cdots & f_{n1}(t)\\ \partial_t f_{12}(t) & \partial_t f_{22}(t) & \cdots & \partial_t f_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix} + \cdots\end{aligned} \tag{8.4.9-C}$$

wobei wir jeweils die Einträge einer Zeile ableiten. Nutzt man die Differentialgleichung, um diese Ableitungen als

$$\partial_t f_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(t) f_{ik}(t) \tag{8.4.9-D}$$

durch die Einträge $a_{ij}(t)$ der Matrix $A(t)$ auszudrücken, so ergeben sich Linearkombinationen der jeweiligen Spalteneinträge und die zeilenweise Linearität der Determinante erlaubt dies zu vereinfachen. Für die erste Zeile der Determinante folgt

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \partial_t f_{11}(t) & \partial_t f_{21}(t) & \cdots & \partial_t f_{n1}(t)\\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}(t)\begin{vmatrix} f_{1k}(t) & f_{2k}(t) & \cdots & f_{nk}(t)\\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix}\\ &= a_{1,1}(t)\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & \cdots & f_{n1}(t)\\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix},\end{aligned} \tag{8.4.9-E}$$

[13] Niels Henrik Abel, 1802–1829
[14] Joseph Liouville, 1809–1882
[15] Michail Wassiljewitsch Ostrogradski, 1801–1861

da für jeden weiteren Summanden zwei gleiche Zeilen in der Determinante auftreten. Entsprechend folgt für j-ten Summanden der Vorfaktor $a_{j,j}(t)$ und damit nach Summation und mit trace $A(t) = \sum_j a_{j,j}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & \cdots & f_{n1}(t) \\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} = \operatorname{trace} A(t) \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & \cdots & f_{n1}(t) \\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{8.4.9-F}$$

und damit nach Integration die Behauptung. □

8.4.10 (Variation der Konstanten). Sei $f_1, \ldots, f_n$ ein Fundamentalsystem für die homogene lineare Differentialgleichung (8.4.**1-A**). Dann erlaubt der Ansatz

$$f(t) = c_1(t)f_1(t) + \cdots + c_n(t)f_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)f_j(t) \tag{8.4.10-A}$$

mit Koeffizienten $c_j : I \to \mathbb{C}$ die Lösung des inhomogenen Problems

$$f'(t) - A(t)f(t) = b(t) \tag{8.4.10-B}$$

für eine beliebige rechte Seite $b : I \to \mathbb{C}^n$. Da die f_i ein Fundamentalystem bilden, ist für jedes $t \in I$ durch $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ gegeben und jede Funktion $f : I \to \mathbb{C}^n$ ist in der Form (8.4.**10-A**) darstellbar. Die Wahl eines Fundamentalsystems als Basis erlaubt allerdings für eine (relativ einfache) Bestimmung der Koeffizienten. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} f'(t) - A(t)f(t) &= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)f_j(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)f_j'(t) - \sum_{j=1}^{n} c_j(t)A(t)f(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)f_j(t) \overset{!}{=} b(t) \end{aligned} \tag{8.4.10-C}$$

und damit ein (für jedes t eindeutig lösbares) lineares Gleichungssystem für die Ableitungen $c_j'(t)$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & \cdots & f_{n1}(t) \\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{1n}(t) & f_{2n}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \tag{8.4.10-D}$$

mit den Einträgen $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ des Vektors $b(t) \in \mathbb{C}^n$. Zur Bestimmung der Koeffizienten $c_j(t)$ genügt damit Integration.

Die gerade gezeigte Methode wird oft als *Variation der Konstanten* bezeichnet.

⚒ **8.4.11 Beispiel.** Wir betrachten ein Beispiel und dazu das Differentialgleichungssystem

$$f'(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8.4.11-A}$$

Das homogene Problem liefert ausgeschrieben in Komponenten $f(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

$$x'(t) = x(t), \qquad y'(t) = tx(t) + y(t), \tag{8.4.11-B}$$

woraus direkt $x(t) = C_1 \mathrm{e}^t$ folgt. Eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung, wiederum mit homogener Lösung e^t und damit führt der Ansatz $y(t) = C_2(t)\mathrm{e}^t$ zu

$$y'(t) = C_2'(t)\mathrm{e}^t + C_2(t)\mathrm{e}^t \stackrel{!}{=} tC_1\mathrm{e}^t + y(t), \qquad \text{also} \quad C_2'(t) = C_1 t \tag{8.4.11-C}$$

und damit $C_2(t) = \frac{C_1}{2}t^2 + C_2$. Die allgemeine Lösung des homogenen Problems zu (8.4.**11-A**) ist also durch

$$f(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} \tag{8.4.11-D}$$

gegeben. Das Fundamentalsystem besteht also aus den beiden vektorwertigen Funktionen

$$t \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t \end{bmatrix}, \qquad t \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix}. \tag{8.4.11-E}$$

Damit kann (wiederum mit Variation der Konstanten) die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (8.4.**11-A**) bestimmt werden. Der Ansatz

$$f(t) = C_1(t) \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t \end{bmatrix} + C_2(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} \tag{8.4.11-F}$$

führt wegen

$$f'(t) = C_1'(t) \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t \end{bmatrix} + C_2'(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} + A(t)f(t) \stackrel{!}{=} A(t)f(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.4.11-G}$$

auf

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.4.11-H}$$

und damit

$$\begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-2t} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ -\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t}(1 - \frac{t^2}{2}) \end{bmatrix}. \tag{8.4.11-I}$$

Integration führt auf

$$C_1(t) = \int C_1'(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t} + C_1, \qquad C_2(t) = \int C_2'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}t(t+2) + C_2. \tag{8.4.11-J}$$

8.4.12. Systeme mit konstanten Koeffizienten lassen sich direkt und explizit lösen. Dazu nutzen wir die Matrixexponentialfunktion definiert als

$$\exp(A) := \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{8.4.12-A}$$

für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wichtige Eigenschaften sind in folgendem Lemma zusammengefasst, den Beweis überlassen wir als Übung.

Lemma. **(i)** *Es gilt* $\exp(0) = \mathrm{I}$.

(ii) *Gilt $AB = BA$ für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so folgt*

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A). \tag{8.4.12-B}$$

(iii) *Für jede Matrix A ist $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.*

(iv) *Für jede Matrix A ist die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A. \tag{8.4.12-C}$$

Damit ergibt sich eine explizite Formel für die Lösungen des zugehörigen Anfangswertproblems. Zum Beweis genügt das Einsetzen in die Gleichung.

☞ **8.4.13 Korollar.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann sind die Lösungen des Anfangswertproblems*

$$f'(t) = Af(t) + b(t), \qquad f(t_0) = f_0, \tag{8.4.13-A}$$

zu $f_0 \in \mathbb{C}^n$ und jedem stetigen $b : I \to \mathbb{C}^n$, $t_0 \in I$, durch

$$f(t) = \exp((t - t_0)A)f_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t - s)A)b(s)\,\mathrm{d}s \tag{8.4.13-B}$$

gegeben.

☞ **8.4.14 Korollar.** *Es gilt*

$$\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\operatorname{trace} A}. \tag{8.4.14-A}$$

Beweis. Da die Spalten der matrixwertigen Funktion $t \mapsto \exp(tA)$ ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $f'(t) = Af(t)$ bilden, impliziert Lemma 8.4.9 für die zugehörige Determinante

$$\det\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\operatorname{trace} A}\det\exp(0) \tag{8.4.14-B}$$

und zusammen mit $\det\exp(0) = 1$ folgt die Behauptung. □

✂ **Ergänzung.** Es bleibt, Matrixexponentialfunktionen $\exp A$ sinnvoll zu berechnen. Dazu bietet sich die Jordannormalform[16] der Matrix A an. Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kann zu

$$A = T^{-1}\begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_\ell}(\lambda_\ell) \end{bmatrix} T \tag{8.4.14-C}$$

[16] Marie Ennemond Camille Jordan, 1838–1922

transformiert werden. Dabei sind die auftretenden $\lambda_j \in \mathbb{C}$ gerade die Eigenwerte der Matrix A, $J_m(\lambda)$ Jordanblöcke der Form

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}. \tag{8.4.14-D}$$

und es gilt $\sum_j m_j = n$. Bezeichnet man die auftretende Blockmatrix mit $\mathcal{J}$, so gilt

$$\begin{aligned} \exp(A) &= I + T^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{J}^k \right) T \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} \exp(J_{m_1}(\lambda_1)) & & & \\ & \exp(J_{m_2}(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(J_{m_\ell}(\lambda_\ell)) \end{bmatrix} T \end{aligned} \tag{8.4.14-E}$$

da sich alle weiteren auftretenden T und T^{-1} kürzen. Es genügt also, Matrixexponentiale einzelner Jordanblöcke zu bestimmen. Für Potenzen gilt

$$J_m(\lambda)^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \tag{8.4.14-F}$$

und entsprechend rekursiv

$$J_m(\lambda)^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ \vdots & & \ddots & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}. \tag{8.4.14-G}$$

Nach Multiplikation mit t^k und Summation folgt damit

$$\exp(tJ_m(\lambda)) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{t\lambda} & \cdots & \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{t\lambda} \\ \vdots & & \ddots & \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} \end{bmatrix}. \tag{8.4.14-H}$$

✂ **Ergänzung.** Wir ergänzen die zugrundeliegende lineare Algebra. Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt Eigenwerte, es existiert also $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\ker(A-\lambda) \neq \{0\}$. Wir betrachten zu diesem Eigenwert λ die Kette der Nullräume

$$\ker(A-\lambda) \subseteq \ker(A-\lambda)^2 \subseteq \ker(A-\lambda)^3 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^n, \tag{8.4.14-I}$$

die offenbar aufsteigend geordnet ist. Da $\mathbb{C}^n$ endlichdimensional ist, gibt es insbesondere stets ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$\ker(A-\lambda)^\ell = \ker(A-\lambda)^{\ell+1}. \tag{8.4.14-J}$$

Für dieses ℓ gilt auch $\ker(A-\lambda)^{\ell+1} = \ker(A-\lambda)^{\ell+2}$. Wir zeigen dies zuerst. Sei dazu $v \in \ker(A-\lambda)^{\ell+2}$. Dann ist $(A-\lambda)v \in \ker(A-\lambda)^{\ell+1} = \ker(A-\lambda)^\ell$ und somit $(A-\lambda)^{\ell+1}v = 0$. Weiter gilt offenbar für die Bilder der Potenzen

$$\mathbb{C}^n \supseteq \operatorname{im}(A-\lambda) \supseteq \operatorname{im}(A-\lambda)^2 \supseteq \cdots \tag{8.4.14-K}$$

und für hinreichend große $\tilde{\ell}$ folgt $\operatorname{im}(A-\lambda)^{\tilde{\ell}} = \operatorname{im}(A-\lambda)^{\tilde{\ell}+1}$. Wir wählen eines mit $\tilde{\ell} > \ell$. Dann gibt es damit zu jedem $v \in \mathbb{C}^n$ ein $w \in \mathbb{C}^m$ mit $(A-\lambda)^{\tilde{\ell}}v = (A-\lambda)^{\tilde{\ell}+1}w$ und damit $v-(A-\lambda)w \in \ker(A-\lambda)^{\tilde{\ell}} = \ker(A-\lambda)^{\tilde{\ell}-1}$. Damit folgt aber $(A-\lambda)^{\tilde{\ell}-1}v = (A-\lambda)^{\tilde{\ell}}w$ und somit $\operatorname{im}(A-\lambda)^{\tilde{\ell}-1} = \operatorname{im}(A-\lambda)^{\tilde{\ell}}$. Also folgt (nach endlich vielen Schritten) $\operatorname{im}(A-\lambda)^\ell = \operatorname{im}(A-\lambda)^{\ell+j}$, $j \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen damit

$$\ker(A-\lambda)^\ell \dot{+} \operatorname{im}(A-\lambda)^\ell = \mathbb{C}^n. \tag{8.4.14-L}$$

Dazu nutzen wir zwei Schritte. Gilt $v \in \ker(A-\lambda)^\ell \cap \operatorname{im}(A-\lambda)^\ell$, so gibt es ein $w \in \mathbb{C}^n$ mit $v = (A-\lambda)^\ell w$ und damit $(A-\lambda)^{2\ell}w = 0$. Also folgt $w \in \ker(A-\lambda)^{2\ell} = \ker(A-\lambda)^\ell$ und damit $w = 0$, also $v = 0$. Weiterhin gibt es für jedes $u \in \mathbb{C}^n$ wegen $\operatorname{im}(A-\lambda)^\ell = \operatorname{im}(A-\lambda)^{2\ell}$ ein $\tilde{u} \in \mathbb{C}^n$ mit $(A-\lambda)^\ell u = (A-\lambda)^{2\ell}\tilde{u}$ und damit liefert

$$u - (A-\lambda)^\ell \tilde{u} \in \ker(A-\lambda)^\ell, \qquad (A-\lambda)^\ell \tilde{u} \in \operatorname{im}(A-\lambda)^\ell \tag{8.4.14-M}$$

eine Zerlegung von u in Elemente aus $\ker(A-\lambda)^\ell$ und $\operatorname{im}(A-\lambda)^\ell$.

Da $\operatorname{im}(A-\lambda)^\ell$ nach Konstruktion unter $A-\lambda$ invariant ist, folgt

$$A : \operatorname{im}(A-\lambda)^\ell \to \operatorname{im}(A-\lambda)^\ell \tag{8.4.14-N}$$

und wir können $\mathbb{C}^n$ zerlegen in die endlich vielen Teilräume

$$\mathbb{C}^n = \ker(A-\lambda_1)^{\ell_1} \dot{+} \ker(A-\lambda_2)^{\ell_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \ker(A-\lambda_m)^{\ell_m} \tag{8.4.14-O}$$

für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ von A und mit den zugehörigen Längen $\ell_1, \ldots, \ell_m$ der Nullraumketten.

Es bleibt zu verstehen, warum wir damit die Jordannormalform der Matrix A berechnet haben. Dazu nutzen wir eine der Zerlegung untergeordnete Basis für jeden der Teilräume $\ker(A-\lambda_j)^{\ell_j}$. Hilfreich zur Bestimmung der Basis ist dabei die folgende als Young-Diagramm[17] bezeichnete Darstellung

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
w_{1,1} & w_{2,1} & w_{3,1} & w_{4,1} & w_{5,1} \\
\hline
w_{1,2} & w_{2,2} & w_{3,2} & w_{4,2} & \\
\cline{1-4}
w_{1,3} & w_{2,3} & w_{3,3} & w_{4,3} & \\
\cline{1-4}
w_{1,4} & & & & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

in der in der s-ten Zeile jeweils $\dim\ker(A-\lambda_j)^s - \dim\ker(A-\lambda_j)^{s-1}$ Kästchen gezeichnet sind. Spaltenweise gelesen ergeben sich daraus Jordanblöcke.

Einem Vektor $w_\ell \in \ker(A-\lambda)^\ell \setminus \ker(A-\lambda)^{\ell-1}$ ordnen wir dazu die Hauptvektoren

$$w_{\ell-j} := (A-\lambda)^j w_\ell, \qquad j = 1, \ldots, \ell-1 \tag{8.4.14-P}$$

[17] Alfred Young, 1873–1940

zu. Diese sind linear unabhängig. Ebenso ist $\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ unter A invariant und auf diesem Unterraum und in dieser Basis agiert A in Form des Jordanblocks $J_\ell(\lambda)$. Füllt man das Young-Diagramm auf diese Weise (von unten nach oben) mit weiteren modulo $\ker(A-\lambda)^{j-1}$ linear unabhängig gewählten Vektoren in den unteren Kästen der j-ten Zeile und den entsprechenden Hauptvektorketten, so ergeben sich alle weiteren Jordanblöcke zum selben Eigenwert.

8.4.15. Zu jeder Hauptvektorkette zur Matrix A zum Eigenwert λ, also zu

$$w_\ell \in \ker(A-\lambda)^\ell \setminus \ker(A-\lambda)^{\ell-1} \tag{8.4.15-A}$$

und

$$w_{\ell-j} := (A-\lambda)^j w_\ell, \qquad j = 1, \ldots, \ell-1, \tag{8.4.15-B}$$

ergeben sich ℓ linear unabhängige Lösungen des Systems $f'(t) = Af(t)$

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} w_1, \quad t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} w_2 + t\mathrm{e}^{\lambda t} w_1, \quad \cdots \quad t \mapsto \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda t} w_{k-j}, \cdots\cdots \tag{8.4.15-C}$$

Dies folgt direkt durch Einsetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda t} w_{k-j} - A \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda t} w_{k-j} & \\ = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \mathrm{e}^{\lambda t} w_{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda t} (\lambda - A) w_{k-j} & \\ = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \mathrm{e}^{\lambda t} w_{k-j} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda t} w_{k-j-1} = 0. & \end{aligned} \tag{8.4.15-D}$$

Die Existenz der Jordannormalform der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ garantiert die Existenz von genug linear unabhängigen Hauptvektorketten, um auf diese Weise ein Fundamentalsystem zu erhalten.

8.4.16. Für eine Differentialgleichung höherer Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \tag{8.4.16-A}$$

mit charakteristischem Polynom $\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ erhalten wir analog ein Fundamentalsystem. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der Ordnung ℓ des charakteristischen Polynoms, so sind

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \cdots \quad t \mapsto t^k \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \cdots \quad t^{\ell-1} \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{8.4.16-B}$$

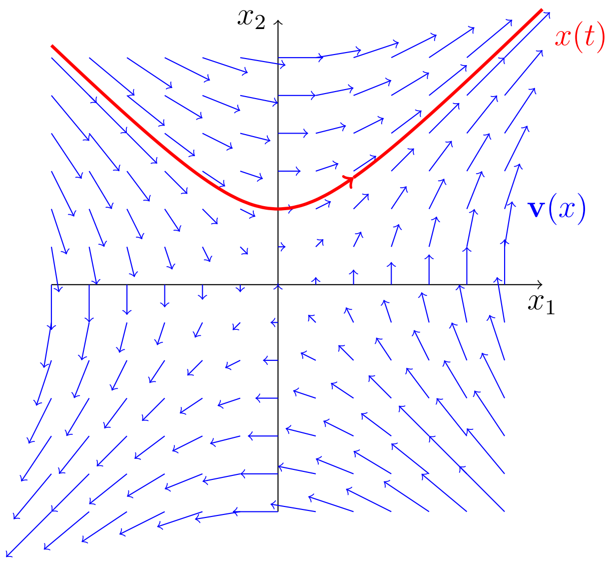
ℓ unabhängige Lösungen. Der Fundamentalsatz der Algebra liefert damit wiederum genug Lösungen für ein Fundamentalsystem.

8.5 Autonome Differentialgleichungen und Vektorfelder

8.5.1. Wir erinnern daran, dass ein System erster Ordnung $\dot{x}(t) = H(t, x(t))$ autonom heißt, falls die Gleichung nicht explizit von der Variablen t abhängt. Autonome Differentialgleichungssyteme haben also stets die Form

$$\dot{x}(t) = H(x(t)) \tag{8.5.1-A}$$

mit einer Funktion $H : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Autonome Differentialgleichungssysteme erster Ordnung haben eine natürliche Interpretation als *Vektorfelder* mit den Lösungen als parametrisierten Kurven, so dass der Tangentenvektor $\dot{x}(t)$ an jeder Stelle mit dem gegebenen Vektor des Vektorfeldes übereinstimmt. Im Weiteren nutzen wir deshalb die Bezeichnung $\mathbf{v}$ statt H.



Wir nehmen im weiteren an, dass das Vektorfeld $\mathbf{v}$ stetig (Fréchet-) differenzierbar ist. Dann ist der Satz 8.3.5 von Picard–Lindelöf anwendbar und das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \mathbf{v}(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \tag{8.5.1-B}$$

besitzt für jeden Startpunkt x_0 eine eindeutige lokale Lösung $x : [-\delta, \delta] \to \Omega$. Diese Lösung hängt wegen Folgerung 8.3.6 stetig vom Startwert x_0 ab und bestimmt eine Funktion

$$\Phi : U \times I \to \Omega, \qquad \Phi(x_0, t) := x(t) \text{ für die Lösung } x \text{ zu (8.5.1-B)} \tag{8.5.1-C}$$

für eine Umgebung U von x_0 und ein Intervall I. Die Funktion Φ wird als *Fluss* des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ bezeichnet.

☞ **8.5.2 Lemma.** *Sei* $\mathbf{v}$ *swtetig differenzierbar. Dann ist der Fluss* $\Phi : U \times I \to \Omega$ *differenzierbar.*

Beweis. Es genügt, die stetige Differenzierbarkeit bezüglich des Anfangspunkts x_0 zu zeigen. Sei dazu $h \in \mathbb{R}^n$ so klein, dass $x_0 + h \in U$ gilt. Dann folgt aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi(x_0+h,t) - \Phi(x_0,t)) &= \mathbf{v}(\Phi(x_0+h,t)) - \mathbf{v}(\Phi(x_0,t)) \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{v}\big(\Phi(x_0,t) + s(\Phi(x_0+h,t) - \Phi(x_0,t))\big)\,\mathrm{d}s \\
&= \underbrace{\int_0^1 \mathbf{v}'(\Phi(x_0,t) + s(\Phi(x_0+h,t) - \Phi(x_0,t)))\,\mathrm{d}s}_{=:A(t,h)}\,(\Phi(x_0+h,t) - \Phi(x_0,t))
\end{aligned} \tag{8.5.2-A}$$

und wir sehen, dass die Differenz $\Phi(x_0+h,t)-\Phi(x_0,t)$ selbst eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi(x_0+h,t)-\Phi(x_0,t)\right)=A(t,h)(\Phi(x_0+h,t)-\Phi(x_0,t)) \tag{8.5.2-B}$$

zum Anfangswert $\Phi(x_0+h,0)-\Phi(x_0,0)=h$ löst. Die auftretende Koeffizientenmatrix $A(t,h)$ hängt dabei stetig von x_0 und vom Fluss Φ ab und erfüllt

$$\lim_{h\to 0} A(t,h)=\mathbf{v}'(\Phi(x_0,t)). \tag{8.5.2-C}$$

Wir betrachten diese allgemeiner matrixwertig

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t,h)=A(t,h)B(t,h), \qquad B(0,h)=\mathrm{I}. \tag{8.5.2-D}$$

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf besitzt diese eine eindeutige Lösung $t\mapsto B(t,h)$, die stetig vom Parameter h abhängt und es gilt

$$\Phi(x_0+h,t)-\Phi(x_0,t)=B(t,h)h. \tag{8.5.2-E}$$

Also ist Φ partiell nach x_0 differenzierbar und es gilt

$$\partial_{x_0}\Phi(x_0,t)=\lim_{h\to 0} B(t,h)=B(t,0). \tag{8.5.2-F}$$

Weiterhin ist $B(t,0)$ als Lösung eines Anfangswertproblems stetig in x_0 und t und wir haben die stetige partielle Differenzierbarkeit gezeigt. Da Φ durch die gegebene Gleichung auch stetig partiell nach t differenzierbar ist, folgt die Differenzierbarkeit. □

✂ **Ergänzung.** Die Aussage gilt auch allgemeiner für Lösungen zu Anfangswertproblemen

$$\dot{x}(t)=H(t,x(t)), \qquad x(t_0)=x_0, \tag{8.5.2-G}$$

für stetig differenzierbares $H:(a,b)\times\Omega\to\mathbb{R}^n$. Lösungen hängen differenzierbar vom Anfangswert x_0 ab. Hängt H differenzierbar von weiteren Parametern ab, so folgt auch die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung von den Parametern. Beides kann man in analoger Weise direkt nachweisen, oder aber auf obiges Lemma zurückführen. Für letzteres führt man t und die Parameter p als weitere Komponenten der Lösung mit $\dot{t}=1$ und $\dot{p}=0$ in die Differentialgleichung ein. Das sich ergebende System in höherer Dimension ist autonom.

8.5.3. Bevor wir genauer über autonome Differentialgleichungen und Vektorfelder nachdenken, benötigen wir ein weiteres Hilfsmittel. Gegeben sei eine Differentialgleichung auf einem Gebiet $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t)=\mathbf{v}(x(t)) \tag{8.5.3-A}$$

mit einem Vektorfeld $\mathbf{v}:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Sei weiter $\varphi:\Omega\to\widetilde{\Omega}$ ein Diffeomorphismus, also eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung mit an jeder Stelle $x\in\Omega$ invertierbarer Ableitung $\varphi'(x)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\simeq\mathbb{R}^{n\times n}$. Betrachtet man die transformierte Funktion $\widetilde{x}(t)=\varphi(x(t))$, so impliziert die Kettenregel

$$\dot{\widetilde{x}}(t)=\varphi'(x(t))\dot{x}(t)=\varphi'(x(t))\mathbf{v}(x(t))=:\widetilde{\mathbf{v}}(\widetilde{x}(t)) \tag{8.5.3-B}$$

mit der durch

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\varphi(x))=\varphi'(x)\mathbf{v}(x) \tag{8.5.3-C}$$

definierten Funktion $\widetilde{\mathbf{v}}:\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^n$. Diese wird als *Pushforward* des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ bezeichnet. Dafür hat sich die Notation $\varphi_*\mathbf{v}$ eingebürgert.

☞ **8.5.4 Satz** (Glättungssatz für Vektorfelder). *Sei* $\mathbf{v}$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf* Ω *und* $x_\bullet \in \Omega$ *mit* $\mathbf{v}(x_\bullet) \neq 0$. *Dann existiert eine Umgebung* U *von* $x_\bullet$ *und ein Diffeomorphismus* $\varphi : U \to \varphi[U] \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit*

$$\varphi_* \mathbf{v} = \mathbf{e}_n. \tag{8.5.4-A}$$

Beweis. Wir wählen einen zu $\mathbf{v}(x_\bullet) \neq 0$ transversalen Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$, also einen Unterraum mit $\mathbb{R}^n = V \dot{+} \operatorname{span}\{\mathbf{v}(x_\bullet)\}$ und $\mathbf{v}(x_\bullet) \notin V$. Sei weiter S eine kompakte Umgebung von $x_\bullet$ in $(x_\bullet + V) \cap \Omega$. Zu Punkten aus S bestimmt der Fluss Φ des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ eine Abbildung

$$\psi : S \times [-\delta, \delta] \ni (x_0, t) \mapsto \Phi(x_0, t) \in \Omega. \tag{8.5.4-B}$$

Für δ klein genug ist diese Abbildung injektiv. Sie ist auch ein Diffeomorphismus. Dies rechnen wir kurz nach. Zur Vereinfachung nehmen wir dabei an, dass die letzte Komponente $\mathbf{v}_n(x_\bullet) \neq 0$ gilt. Dann kann $V = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$ gewählt werden. Damit ist

$$\operatorname{rank} \psi'(x_0, 0) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{v}_1(x_0) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ & & & \mathbf{v}_n(x_0) \end{bmatrix} = n \tag{8.5.4-C}$$

und für δ klein genug folgt Diffeomorphie. Die Umkehrfunktion $\varphi = \psi^{-1}$ liefert das gewünschte. $\square$

8.5.5. Ein Punkt $x_\bullet \in \Omega$ wird als *stationärer Punkt* oder *kritischer Punkt* bezeichnet, falls $\mathbf{v}(x_\bullet) = 0$ gilt. Für jeden stationären Punkt ist die konstante Funktion

$$t \mapsto x_\bullet \tag{8.5.5-A}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Punkte mit $\mathbf{v}(x_\bullet) \neq 0$ werden auch als reguläre Punkte des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ bezeichnet.

In der Nähe stationärer Punkte bietet es sich an, das Vektorfeld zu linearisieren. Gilt $\mathbf{v}(x_\bullet) = 0$, so impliziert die Differenzierbarkeit des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x) = A(x - x_\bullet) + \mathbf{o}(|x - x_\bullet|) \tag{8.5.5-B}$$

mit $A = \mathbf{v}'(x_\bullet) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es liegt also Nahe, die Lösungen von $\dot{x} = \mathbf{v}(x)$ in der Nähe des stationären Punktes $x_\bullet$ mit den Lösungen des linearisierten Problems $\dot{y} = Ay$ für $y = x - x_\bullet$ zu vergleichen.

8.5.6 (Stabile stationäre Punkte). Sei $x_\bullet$ stationärer Punkt des Vektorfeldes $\mathbf{v}$. Wir bezeichnen $x_\bullet$ als *stabil*, falls es zu jeder Umgebung U von $x_\bullet$ eine kleiner Umgebung $\tilde{U}$ gibt, so dass für alle $x_0 \in \tilde{U}$ die Lösung zu

$$\dot{x} = \mathbf{v}(x), \qquad x(0) = x_0 \tag{8.5.6-A}$$

für $t > 0$ in U bleibt,

$$\forall_{t>0} \quad x(t) \in U. \tag{8.5.6-B}$$

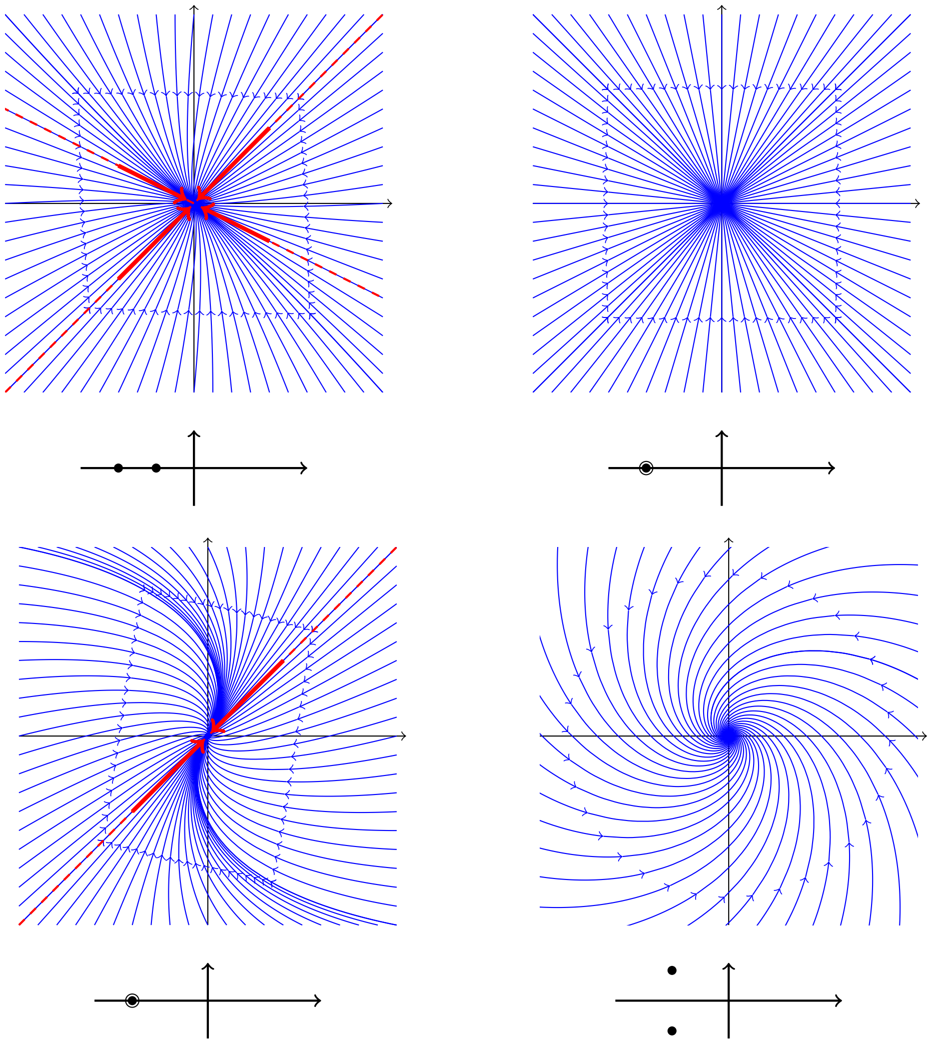
Gilt darüberhinaus
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\bullet, \tag{8.5.6-C}$$
so heißt $x_\bullet$ *asymptotisch stabil*. Für letzteres gibt es ein Kriterium basierend auf der Linearisierung des Vektorfeldes.

☞ **8.5.7 Satz** (Lyapunov[18]). *Sei $x_\bullet$ stationärer Punkt und gilt für $A = \mathbf{v}'(x_\bullet) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*
$$\operatorname{spec} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A-\lambda) \neq \{0\}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}. \tag{8.5.7-A}$$
Dann ist $x_\bullet$ asymptotisch stabil.

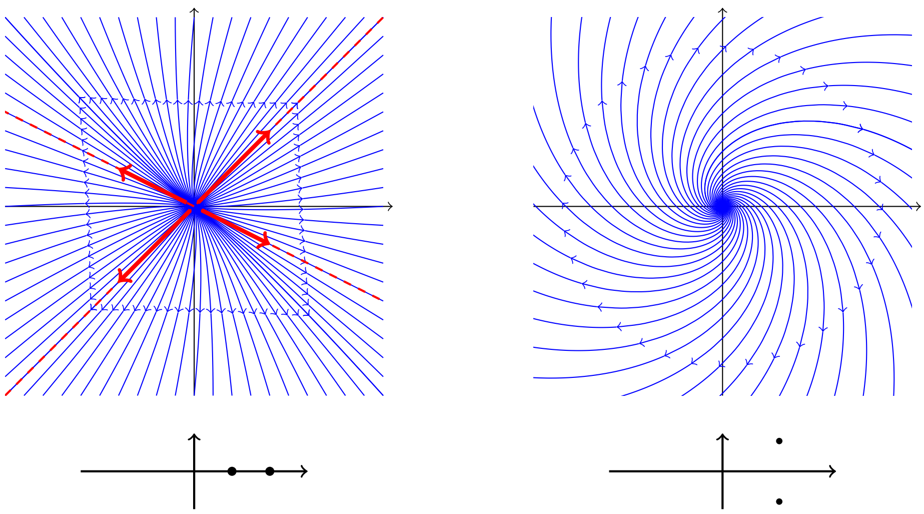
Beweis. Wegen nachfolgendem Lemma 8.5.8 gibt es eine positiv definite symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $A^\top B + BA + \mathrm{I} = 0$ und damit
$$y^\top (A^\top B + BA) y = -|y|^2 \tag{8.5.7-B}$$
für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Mit dieser Matrix B bilden wir die positiv definite quadratische Form
$$\mathcal{L}(y) = y^\top B y \geq \beta |y|^2. \tag{8.5.7-C}$$
Mit dieser gilt
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(x(t)-x_\bullet) &= (x(t)-x_\bullet) B\mathbf{v}(x(t)) + \mathbf{v}(x(t))^\top B(x(t)-x_\bullet) \\ &= (x(t)-x_\bullet)^\top (A^\top B + BA)(x(t)-x_\bullet) + \mathbf{o}(|x(t)-x_\bullet|^2) \\ &= -|x(t)-x_\bullet|^2 + \mathbf{o}(|x(t)-x_\bullet|^2) \end{aligned} \tag{8.5.7-D}$$
Für $|x(t)-x_\bullet|^2 < \delta$ und $x(t) \neq x_\bullet$ gilt $\mathbf{o}(|x(t)-x_\bullet|^2) < \frac{1}{2}|x(t)-x_\bullet|^2$ und damit folgt
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(x(t)-x_\bullet) < -\frac{1}{2}|x(t)-x_\bullet|^2 \leq -\frac{1}{2\beta}\mathcal{L}(x(t)-x_\bullet). \tag{8.5.7-E}$$
Setzt man nun $U_\delta = \{x \mid \mathcal{L}(x-x_\bullet) < \beta\delta\} \subseteq \Omega$, so bleibt damit jede Lösungskurve x der Differentialgleichung $\dot{x} = \mathbf{v}(x)$ mit Startpunkt aus U_δ innerhalb U_δ. Weiter folgt
$$\mathcal{L}(x(t)-x_\bullet) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}t}\mathcal{L}(x(0)-x_\bullet) \tag{8.5.7-F}$$
und es gilt für jede solche Lösung
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\bullet. \tag{8.5.7-G}$$
□

☞ **8.5.8 Lemma.** *Angenommen, für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt* $\operatorname{Re}\operatorname{spec} A < 0$. *Dann gibt es eine symmetrische positiv definite Matrix B, so dass*
$$A^\top B + BA + \mathrm{I} = 0 \tag{8.5.8-A}$$
gilt.

[18] Aleksandr Lyapunov, 1857–1918



Stabile Knoten und stabile Strudel



Instabiler Knoten und instabiler Strudel

Beweis. Wir geben B direkt an. Da die Eigenwerte von A negativen Realteil haben, gibt es eine Zahl $\mu > 0$ mit $\operatorname{Re}\operatorname{spec} A < -\mu$. Damit gilt für das Fundamentalsystem $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ zu $f'(t) = Af(t)$ aber auch

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\mu t} |f_j(t)| = 0. \tag{8.5.8-B}$$

und es folgt $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\mu t} \|\exp(tA)\| = 0$. Damit ist

$$B = \int_0^{\to\infty} \exp(tA^\top)\exp(tA)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\to\infty} \exp(tA)^\top \exp(tA)\,\mathrm{d}t \tag{8.5.8-C}$$

wohldefiniert, symmetrisch und erfüllt

$$\begin{aligned} A^\top B + BA &= \int_0^{\to\infty} \left(A^\top \exp(tA^\top)\exp(tA) + \exp(tA^\top)\exp(tA)A\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA^\top)\exp(tA)\,\mathrm{d}t \\ &= \exp(tA^\top)\exp(tA)\Big|_{t=0}^{\infty} = -\mathrm{I}. \end{aligned} \tag{8.5.8-D}$$

Weiter gilt

$$y^\top B y = \int_0^{\to\infty} y^\top \exp(tA)^\top \exp(tA) y\,\mathrm{d}t = \int_0^{\to\infty} |\exp(tA)y|^2\,\mathrm{d}t > 0 \tag{8.5.8-E}$$

für $y \neq 0$ und B ist positiv definit. □

8.5.9 (Instabile stationäre Punkte). Ein stationärer Punkt $x_\bullet$ der bei Umkehr der Zeitrichtung asymptotisch stabil wird, heißt im weiteren *asymptotisch instabil*. Für einen solchen gibt es also zu jeder Umgebung U eine Umgebung $\tilde{U}$, so dass Lösungen zu (8.5.**6-A**) mit (End-) Werten $x_0 \in \tilde{U}$ für alle $t < 0$ auch $x(t) \in U$ erfüllen und darüberhinaus $\lim_{t\to-\infty} x(t) = x_\bullet$ gilt. Ein hinreichendes Kriterium dafür ist, dass alle Eigenwerte der Linearisierung $A = \mathbf{v}'(x_\bullet)$ strikt positiven Realteil haben.

8.5.10 (Sattel). Besitzt die Linearisierung $A = \mathbf{v}'(x_\bullet)$ des Vektorfeldes in einem stationären Punkt Eigenwerte mit positivem als auch mit negativem Realteil, so spricht man von einem *Sattel* oder bezeichnet den stationären Punkt als *hyperbolisch*. Wir nehmen im Weiteren an, dass keiner der Eigenwerte den Realteil 0 besitzt. Dann gibt es eine Zerlegung des $\mathbb{R}^n$ in unter A invariante Teilräume

$$\mathbb{R}^n = V_\mathrm{s} \dotplus V_\mathrm{i}, \tag{8.5.10-A}$$

so dass A eingeschränkt auf V_s nur Eigenwerte mit negativem Realteil und eingeschränkt auf V_i nur Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt. Bezeichne im Weiteren P_s den Projektor auf V_s entlang V_i und $P_\mathrm{i} = \mathrm{I} - P_\mathrm{s}$ den komplementären Projektor. Damit kann A als Summe

$$A = A_\mathrm{s} + A_\mathrm{i} \tag{8.5.10-B}$$

mit $A_\mathrm{s} := AP_\mathrm{s} = P_\mathrm{s}A$ und $A_\mathrm{i} = AP_\mathrm{i} = P_\mathrm{i}A$ geschrieben werden. Eingeschränkt auf V_s ist die linearisierte Gleichung asymptotisch stabil, eingeschränkt auf V_i entsprechend instabil. Um zu verstehen, was in einer Umgebung des stationären Punktes passiert, führen wir wiederum eine Lyapunov-Funktion ein. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir von jetzt an an, dass wir den $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt versehen haben, für das $V_\mathrm{i} \perp V_\mathrm{s}$ gilt, und wir rechnen mit Matrizen in einer zu diesem Skalarprodukt passenden (die Zerlegung beachtenden) Orthonormalbasis. Dann nutzen wur die positiv semidefiniten quadratischen Formen

$$\mathcal{L}_\mathrm{s}(x) := x^\top B_\mathrm{s}\, x \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}_\mathrm{i}(x) := x^\top B_\mathrm{i}\, x, \tag{8.5.10-C}$$

die wiederum mit Lemma 8.5.8 auf den Räumen V_s beziehungsweise V_i konstruiert werden. Dazu lösen wir

$$A_\mathrm{s}^\top B_\mathrm{s} + B_\mathrm{s} A_\mathrm{s} + P_\mathrm{s} = A^\top B_\mathrm{s} + B_\mathrm{s} A + P_\mathrm{s} = 0 \tag{8.5.10-D}$$

und

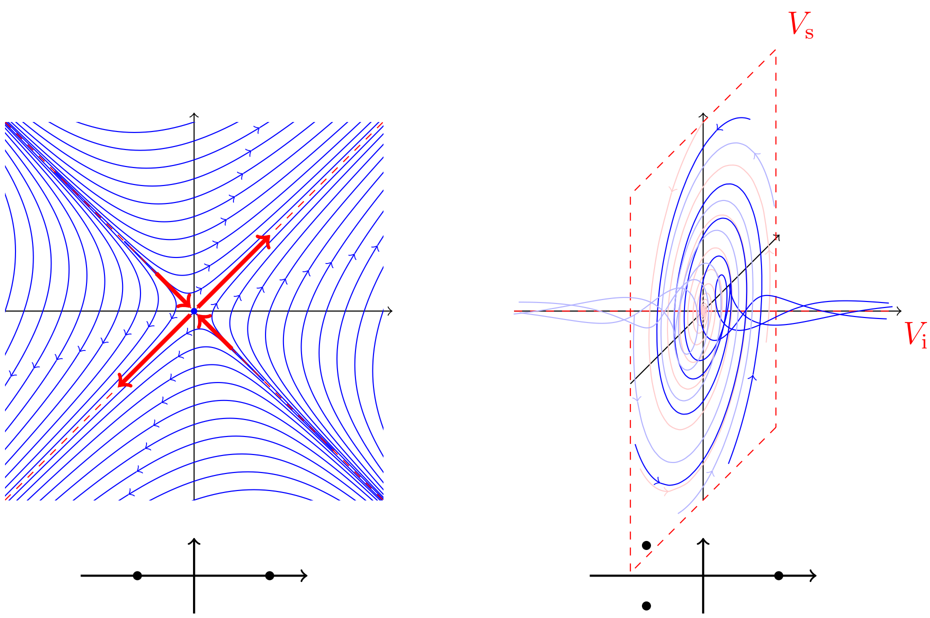
$$A_\mathrm{i}^\top B_\mathrm{i} + B_\mathrm{i} A_\mathrm{i} - P_\mathrm{i} = A^\top B_\mathrm{i} + B_\mathrm{i} A - P_\mathrm{i} = 0 \tag{8.5.10-E}$$

durch

$$B_\mathrm{s} = \int_0^\infty \exp(tA_\mathrm{s}^\top) P_\mathrm{s} \exp(tA_\mathrm{s})\,\mathrm{d}t, \qquad B_\mathrm{i} = \int_0^\infty \exp(-tA_\mathrm{i}^\top) P_\mathrm{i} \exp(-tA_\mathrm{i})\,\mathrm{d}t. \tag{8.5.10-F}$$

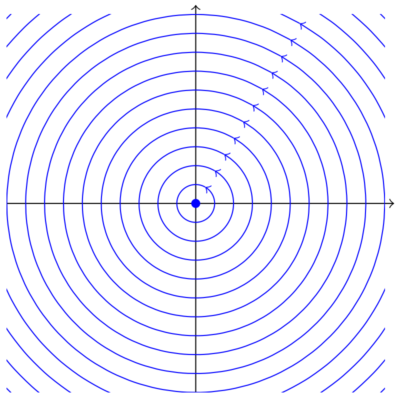
Für jede Lösung x zu (8.5.6-A) ergibt sich nun analog zum Beweis von Satz 8.5.7 für die daraus zusammengesetzte indefinite quadratische Form und $x(t) \neq x_\bullet$

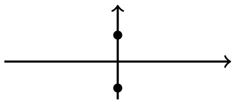
$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{L}_\mathrm{s}(x(t) - x_\bullet) - \mathcal{L}_\mathrm{i}(x(t) - x_\bullet)\right)\\
&\quad = (x(t) - x_\bullet)^\top (A^\top B_\mathrm{s} + B_\mathrm{s} A)(x(t) - x_\bullet)\\
&\qquad\quad - (x(t) - x_\bullet)^\top (A^\top B_\mathrm{i} + B_\mathrm{i} A)(x(t) - x_\bullet) + \mathbf{o}(|x(t) - x_\bullet|^2)\\
&\quad = -|x(t) - x_\bullet|^2 + \mathbf{o}(|x(t) - x_\bullet|^2)\\
&\quad < -\frac{1}{2}|x(t) - x_\bullet|^2 < 0.
\end{aligned} \tag{8.5.10-G}$$



Sattel in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

8.5.11. Besitzt die Linearisierung Eigenwerte mit Realteil 0, so erlaubt die Linearisierung allein keinen vollständigen Rückschluss auf das Verhalten der Lösungen des Problems (8.5.**6-A**) in der Nähe des stationären Punktes. Für das lineare System selbst ergeben sich geschlossene Lösungskurven.





8.5.12 Beispiel. Wir betrachten ein Pendel beschrieben durch die Auslenkung ϑ und die zugehörige Geschwindigkeit $\dot\vartheta$. Die zugehörige Differentialgleichung ergibt sich (bei passend normierter Pendellänge und Fallbeschleunigung) zu $\ddot\vartheta + \sin\vartheta = 0$, also

$$\dot x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\vartheta(t)\\ \dot\vartheta(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot\vartheta(t)\\ \ddot\vartheta(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot\vartheta(t)\\ -\sin\vartheta(t)\end{bmatrix}. \tag{8.5.12-A}$$

Das zugehörige Vektorfeld ist also

$$\mathbf{v}(x) = \begin{bmatrix}x_2\\ -\sin x_1\end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{8.5.12-B}$$

und besitzt die stationären Punkte

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k\pi\\ 0\end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{8.5.12-C}$$

Die Linearisierungen in den stationären Punkten sind durch

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ (-1)^{k+1} & 0\end{bmatrix} \tag{8.5.12-D}$$

gegeben. Für gerade k hat die Linearisierung die Eigenwerte $\pm\mathrm{i}$, für ungerade k entsprechend ± 1. Letztere sind also Sattel. Um zu verstehen, was um die stationären Punkte für gerade k passiert, bietet es sich an die Energie

$$\mathcal{E}(x) = -\cos(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{8.5.12-E}$$

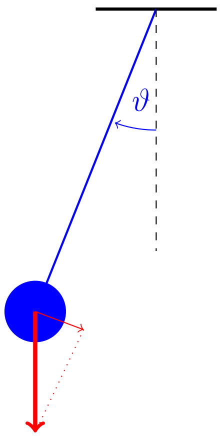
zu betrachten. Für diese gilt

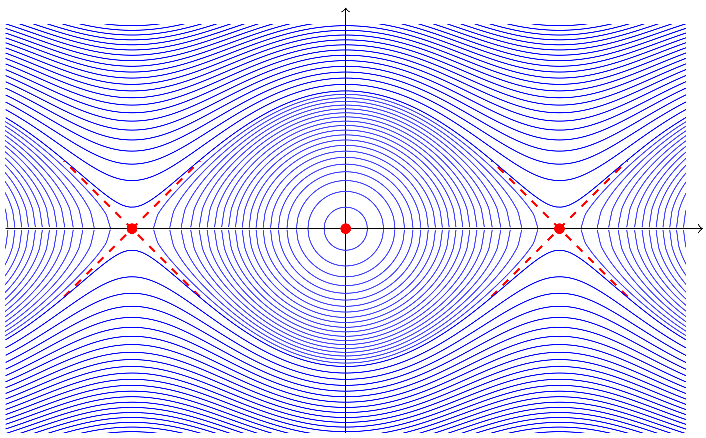
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(x(t)) &= \sin(x_1(t))\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= \sin(x_1(t))x_2(t) - x_2(t)\sin(x_1(t)) = 0.\end{aligned} \tag{8.5.12-F}$$

Das Energierfunktional $\mathcal{E}(x)$ hat Sattelpunkte in den Sätteln und Minima in den verbleibenden stationären Punkten. Die Bahnkurven selbst sind gerade die Niveaulinien von $\mathcal{E}$ und damit von der Form

$$x_2 = \pm\sqrt{2\mathcal{E} + 2\cos x_1}, \qquad \mathcal{E} \geq -1. \tag{8.5.12-G}$$

Damit ergibt sich folgendes Bild für die Lösungen:





9 Differentialformen und Integration

9.1 Etwas (multi-) lineare Algebra

9.1.1. In diesem Abschnitt fassen wir einige Resultate aus der linearen Algebra zusammen. Auch wenn diese nicht Gegenstand der meisten Vorlesungen zur linearen Algebra sind, stellen sie nur eine Ergänzung zum Stoff der Analysis 3 dar. Wir benötigen nur zwei Resultate, das äußere Produkt und den Vektorraum der alternierenden k-linearen Abbildungen auf einem Vektorraum.

✂ **Ergänzung.** Sei V Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0. Eine Abbildung $f : V^k \to \mathbb{K}$ heißt k-linear, wenn sie in jeder Komponente linear ist, also jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$

$$V \ni v_j \mapsto f(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{K} \tag{9.1.1-A}$$

für fest gewählte $v_i \in V$, $i \neq j$, eine Linearform auf V ist. Die Menge der k-linearen Abbildungen auf V bezeichnen wir mit $\mathrm{Mult}^k(V)$. Offenbar ist $\mathrm{Mult}^k(V)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Ist V endlichdimensional, so auch $\mathrm{Mult}^k(V)$ und es gilt

$$\dim \mathrm{Mult}^k(V) = (\dim V)^k. \tag{9.1.1-B}$$

Eine Basis von $\mathrm{Mult}^k(V)$ ist dabei durch eine Basis $\phi_1, \ldots, \phi_n$ von V' bestimmt. Die für Multiindizes $\alpha \in \{1, \ldots, n\}^k$ definierten Abbildungen

$$\bigotimes_{j=1}^{k} \phi_{\alpha_j} : V^k \to \mathbb{K} \qquad \text{mit} \qquad (\phi_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\alpha_k})(v_1, \ldots, v_k) := \prod_{j=1}^{k} \langle \phi_{\alpha_j}, v_j \rangle \tag{9.1.1-C}$$

sind linear unabhängig und spannen $\mathrm{Mult}^k(V)$.

✂ **Ergänzung.** Sei $\mathfrak{S}_k$ die symmetrische Gruppe der Ordnung k, also aller Bijektionen $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$, und bezeichne $\mathrm{sign} : \mathfrak{S}_k \to \{\pm 1\}$ die Signaturabbildung. Wir definieren

$$\mathrm{Alt}^k(V) := \{f \in \mathrm{Mult}^k(V) \mid \forall_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \quad f(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{sign}(\sigma)\, f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\}. \tag{9.1.1-D}$$

Dann ist $\mathrm{Alt}^1(V) = \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = V'$ gerade der Dualraum von V und $\mathrm{Alt}^2(V)$ die Menge der antisymmetrischen bilinearen Abbildungen $f : V \times V \to \mathbb{K}$, also der Bilinearformen mit $f(v, w) = -f(w, v)$. Elemente von $\mathrm{Alt}^k(V)$ sind gerade dadurch charakterisiert, dass sie beim Vertauschen zweier Argumente ihr Vorzeichen ändern, sie werden als alternierende k-Formen bezeichnet.

Die Menge $\mathrm{Alt}^k(V)$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$.

✂ **Ergänzung.** Ist V endlichdimensional, so ist auch $\mathrm{Alt}^k(V)$ endlichdimensional und es gilt

$$\dim V = n \quad \Longrightarrow \quad \dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}. \tag{9.1.1-E}$$

Um dies zu sehen, betrachten wir die folgende Abbildung

$$\mathrm{alt} : \mathrm{Mult}^k(V) \to \mathrm{Alt}^k(V) \quad \text{mit} \quad (\mathrm{alt}\, f)(v_1, \ldots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sign}(\sigma)\, f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}). \tag{9.1.1-F}$$

Diese ist offenbar linear. Sie ist ebenso surjektiv, da sie jedes $f \in \mathrm{Alt}^k(V)$ auf sich selbst abbildet. Angewandt auf die Basisvektoren $\phi_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\alpha_k}$ von $\mathrm{Mult}^k(V)$ ergibt sich (bis auf angepassten Vorfaktor)

$$\phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{\alpha_k} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \phi_{\alpha_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \phi_{\alpha_{\sigma(k)}} \tag{9.1.1-G}$$

und bis auf das Vorzeichen liefert jede Permutation eines gegebenen Multiindex α dieselbe alternierende k-Form. Wir sortieren deshalb die verwendeten Multiindizes der Größe nach und erhalten die der Basis $\phi_1, \dots, \phi_n$ von V' zugeordnete Basis

$$\phi_{\alpha_1} \wedge \phi_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{\alpha_k}, \qquad \alpha \in \{1, \dots, n\}^k \quad \text{mit} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \tag{9.1.1-H}$$

von $\mathrm{Alt}^k(V)$. Diese sind linear unabhängig, da sie in $\mathrm{Mult}^k(V)$ als Kombinationen disjunkter Mengen von Basisvektoren linear unabhängig sind.

✂ **Ergänzung.** Seien $f \in \mathrm{Alt}^k(V)$ und $g \in \mathrm{Alt}^l(V)$ zwei alternierende Formen. Dann ist das äußere Produkt $f \wedge g \in \mathrm{Alt}^{k+l}(V)$ durch

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sign}(\sigma)\, f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \tag{9.1.1-I}$$

definiert.

✂ **Ergänzung.** Gilt $\dim V = n$, so folgt $\dim \mathrm{Alt}^n(V) = 1$. Wir wollen dies nutzen um die Determinante einer linearen Abbildung neu zu charakterisieren. Jede lineare Abbildung $A : V \to V$ induziert für jedes k eine lineare Abbildung

$$A^\dagger : \mathrm{Alt}^k(V) \to \mathrm{Alt}^k(V) \tag{9.1.1-J}$$

durch $A^\dagger f(v_1, \dots, v_k) := f(Av_1, \dots, Av_k)$. Dabei gilt offenbar $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Speziell für $k = n$ gilt $\mathrm{Alt}^n(V) \simeq \mathbb{K}$ und diese lineare Abbildung muss durch die Multiplikation mit einer Zahl gegeben sein. Es muss also ein $d(A)$ mit

$$f(Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = d(A) f(v_1, v_2, \dots, v_n) \tag{9.1.1-K}$$

geben. Diese Zahl $d(A)$ erfüllt $d(\mathrm{I}) = 1$ und $d(AB) = d(A)d(B)$. Wählt man ein $f \neq 0$, so gibt es Vektoren $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$ von V mit $f(e_1, \dots, e_n) \neq 0$. Diese bilden notwendigerweise eine Basis und mit den Spalten $A\mathrm{e}_1, \dots, A\mathrm{e}_n$ der zugehörigen Matrixform von A folgt

$$d(A) = \frac{f(A\mathrm{e}_1, \dots, A\mathrm{e}_n)}{f(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)}. \tag{9.1.1-L}$$

Also ist $d(A)$ als Funktion der Spalten von A multilinear und alternierend. Damit gehört d zu $\mathrm{Alt}^n(V)$ und diese Eigenschaften bestimmen $d(A)$ eindeutig als Determinante $\det A$.

9.2 Differentialformen in der Ebene

9.2.1. Wir erinnern an die Notation $\mathrm{d}x_j$ für die Linearform

$$\mathrm{d}x_j : \mathbb{R}^n \ni h \mapsto \langle\, \mathrm{d}x_j, h \rangle = h_j \in \mathbb{R} \tag{9.2.1-A}$$

die jedem Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ die j-te Komponente zuordnet. Diese hatten wir in Kapitel 7 bei der Definition des Differentials und der damit verbundenen Umschreibung der Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ als

$$\mathrm{d}f(x) := f'(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j \tag{9.2.1-B}$$

eingeführt. Diese waren ebenso eng mit Kurvenintegralen entlang differenzierbarer Kurven Γ

$$\int_\Gamma \sum_{j=1}^n f_j(x)\,\mathrm{d}x_j = \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(x(t))\dot{x}_j(t)\,\mathrm{d}t \qquad (9.2.\mathbf{1}\text{-}\mathbf{C})$$

verbunden. Der Wert des Integrals ist von der gewählten differenzierbaren Parametrisierung $x : [a,b] \ni t \mapsto x)(t) \in \Gamma$ unabhängig. Wir haben Differentialformen darüberhinaus in Abschnitt 8.2 bei der Diskussion exakter Differentialgleichungen genutzt.

Dies soll nun auf höherdimensionale Objekte und entsprechende Integrale verallgemeinert werden.

⚒ **9.2.2 Beispiel** (Orientierte Flächeninhalte in der Ebene)**.** Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel und betrachten in der Ebene den *Flächeninhalt* $F(v,w)$ eines von zwei Vektoren v, w im $\mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms. Wir wollen diesen als *orientiert* verstehen und werten ihn positiv, wenn bei Umlaufen des Ursprungs entgegen des Uhrzeigersinns der erste Vektor vor dem zweiten kommt und sonst negativ.

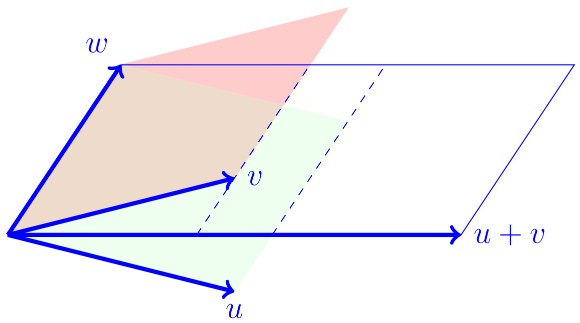
Bevor wir eine Formel zur Berechnung angeben, fixieren wir natürliche Eigenschaften. Es gilt nach Definition

$$F(w,v) = -F(v,w) \qquad (9.2.\mathbf{2}\text{-}\mathbf{A})$$

und ebenso

$$F(\alpha v, w) = \alpha F(v,w) \qquad \text{und} \qquad F(u+v,w) = F(u,w) + F(v,w). \qquad (9.2.\mathbf{2}\text{-}\mathbf{B})$$

wie folgendes Bild bei richtiger Interpretation zeigt. Verwendet haben wir dabei nur, dass Flächeninhalte invariant unter Verschiebungen sind.



Damit ist $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear und alternierend, es gilt also $F \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$. Die Menge der alternierenden Bilinearformen auf dem $\mathbb{R}^2$ ist eindimensional. Wenn wir in der euklidischen Ebene zusätzlich annehmen, dass $F(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2) = 1$ gilt, also das richtig orientierte Einheitsquadrat die Fläche 1 besitzt, so ergibt sich damit eindeutig

$$F(v,w) = F(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}) = \det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1. \qquad (9.2.\mathbf{2}\text{-}\mathbf{C})$$

Nutzen wir die Bezeichnungen $\langle\, \mathrm{d}x, v\rangle = v_1$ und $\langle\, \mathrm{d}y, v\rangle = v_2$, so ergibt sich

$$F(v,w) = \langle\, \mathrm{d}x, v\rangle\langle\, \mathrm{d}y, w\rangle - \langle\, \mathrm{d}x, w\rangle\langle\, \mathrm{d}y, v\rangle =: (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)(v,w) \qquad (9.2.\mathbf{2}\text{-}\mathbf{D})$$

und damit $F = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

9.2.3. Sei nun $Q = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathrm{C}(Q)$ stetig. Wir betrachten den (vorerst formalen) Ausdruck

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.2.3-A}$$

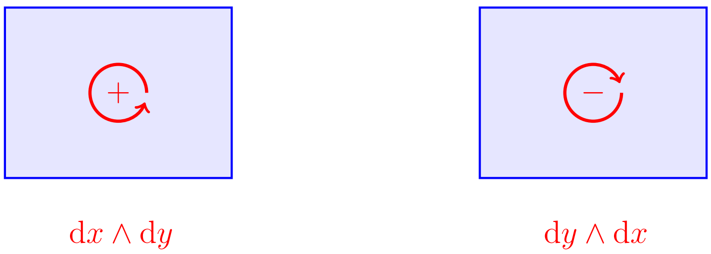
Diesem ordnen wir ein Integral zu. Dazu definieren wir

$$\int_Q g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y := \int_c^d \left(\int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{9.2.3-B}$$

In Kapitel 6.3 haben wir gezeigt, dass für stetige Funktionen $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ in diesem Integral die Reihenfolge der Integration vertauscht werden kann, also

$$\int_Q g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d g(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{9.2.3-C}$$

gilt. Allerdings berücksichtigen wir nun die *Orientierung* des Rechtecks Q, die Variable x kommt in $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ vor der Variablen y.



Wegen $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ gilt beim Vertauschen dieser Reihenfolge

$$\int_Q g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\int_Q g(x,y)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \tag{9.2.3-D}$$

und wir ändern die Orientierung. Dies entspricht dem Vorzeichenwechsel beim Vertauschen der Integrationsgrenzen im Eindimensionalen.

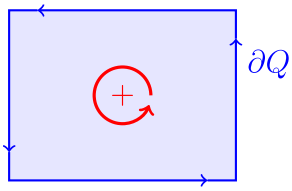
Nehmen wir nun weiter an, die Funktion g sei von der speziellen Form

$$g(x,y) = \partial_x f_2(x,y) - \partial_y f_1(x,y) \tag{9.2.3-E}$$

für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f_1, f_2 : Q \to \mathbb{R}$. Dann kann das Integral (9.2.3-B) vereinfacht und berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_Q g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \int_c^d \int_a^b \partial_x f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_a^b \int_c^d \partial_y f_1(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_c^d \big(f_2(b,y) - f_2(a,y)\big)\,\mathrm{d}y - \int_a^b \big(f_1(x,d) - f_1(x,c)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial Q} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{9.2.3-F}$$

und letzteres ist gerade das Kurvenintegral entlang der passend orientierten Randkurve ∂Q des Rechtecks Q.



Dies verallgemeinert die Formel von Newton–Leibniz

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}f(x) = f(b) - f(a) \tag{9.2.3-G}$$

für stetig differenzierbare Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall ins Zweidimensionale. Definiert man die *äußere Ableitung* der Differentialform

$$\omega(x,y) = f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{9.2.3-H}$$

als

$$\mathrm{d}\omega(x) = \mathrm{d}(f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y) := \big(\partial_x f_2(x,y) - \partial_y f_1(x,y)\big)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{9.2.3-I}$$

so impliziert obige Rechnung gerade

$$\int_Q \mathrm{d}\omega = \int_{\partial Q} \omega. \tag{9.2.3-J}$$

In ersten Schritt soll dies auf allgemeine glatt berandete Gebiete in der Ebene verallgemeinert werden.

9.2.4 (Normalbereiche). Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ wird als *Normalbereich* bezüglich der x-Achse bezeichnet, wenn es von der Form

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\} \tag{9.2.4-A}$$

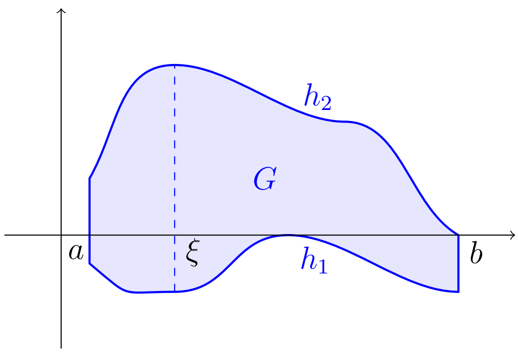
für ein Intervall $[a,b]$ und zwei stetige Funktionen $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $h_1(x) \le h_2(x)$ für $x \in [a,b]$ ist. Für einen solchen Normalbereich G und eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ scheint es natürlich, iterierte Integrale der Form

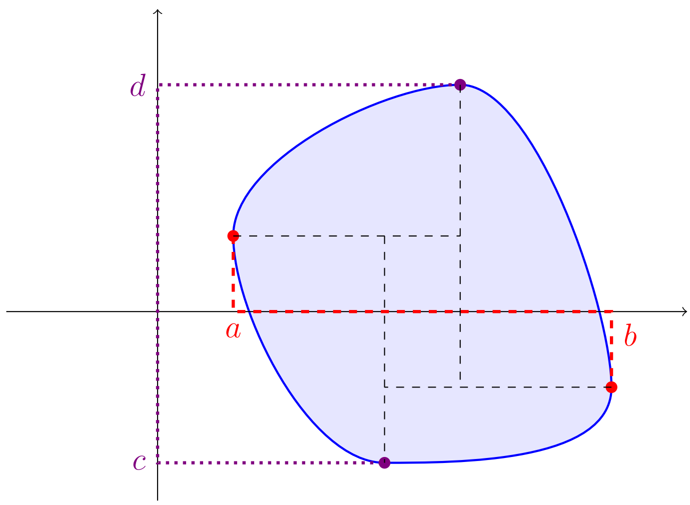
$$\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{9.2.4-B}$$

betrachten. Dabei kann der Bereich G vertikal zerschnitten werden, es gilt

$$\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^\xi \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_\xi^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{9.2.4-C}$$

für jedes $\xi \in (a,b)$.





Analog sind Normalbereiche bezüglich der y-Achse definiert als Mengen

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ h_3(y) \leq x \leq h_4(y)\} \tag{9.2.4-D}$$

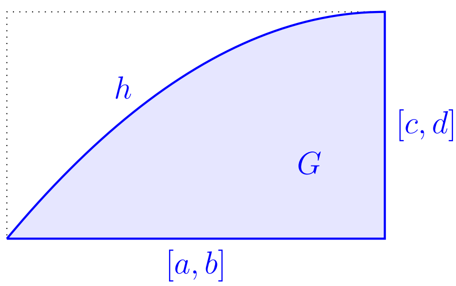
für ein Intervall $[c, d]$ und zwei stetige Funktionen $h_3, h_4 : [c, d] \to \mathbb{R}$ mit $h_3(y) < h_4(y)$ für $y \in [c, d]$. Wiederum können iterierte Integrale

$$\int_c^d \int_{h_3(y)}^{h_4(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9.2.4-E}$$

berechnet werden. Sind Gebiete Normalbereiche beider bezüglich beider Achsen, so stimmen die so berechneten iterierten Integrale überein. Dies zeigen wir zuerst. Da man Normalbereiche wie gezeigt zerschneiden und zusammensetzen kann, genügt dafür ein Spezialfall.

☞ **9.2.5 Lemma** (Fubini für Normalbereiche). *Sei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit $h(a) = c$ und $h(b) = d$. Sei weiter $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq h(x)\}$ und $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b \int_c^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_{h^{-1}(y)}^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{9.2.5-A}$$



Beweis. Da der angegebene Normalbereich als abgeschlossene Teilmenge von $[a, b] \times [c, d]$ kompakt ist, ist die Funktion f auf G gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|x - \tilde{x}| \leq \delta \quad \wedge \quad |y - \tilde{y}| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| \leq \varepsilon \tag{9.2.5-B}$$

folgt. Wir betrachten zuerst das iterierte Integral

$$\int_a^b \int_c^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{9.2.5-C}$$

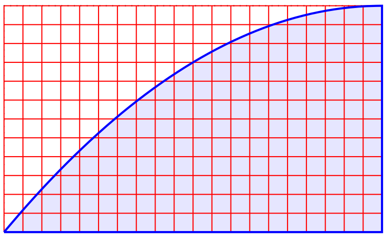
welches G als Normalbereich bezüglich der x-Achse verwendet und schätzen das äußere Integral durch Unter- und Obersummen ab. Dazu zerlegen wir $[a,b]$ in Teilintervalle der Länge kleiner δ,

$$\mathfrak{Z} = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b), \qquad x_i - x_{i-1} < \delta. \tag{9.2.5-D}$$

Zum bestimmen der Obersumme schätzen wir das innere Integral über jedem der Teilintervalle durch eine entsprechende Obersumme ab. Dazu zerlegen wir ebenso $[c,d]$ in Teilintervalle der Länge kleiner δ

$$\widetilde{\mathfrak{Z}} = (c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{\tilde{N}} = d), \qquad y_j - y_{j-1} < \delta. \tag{9.2.5-E}$$

und schätzen den Integranden selbst über jedem sich ergebenden Teilquadrat mit nichtleerem Schnitt mit G durch sein Maximum ab.



Es gilt also

$$\int_a^b \int_c^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \sum_{\substack{j \\ y_{j-1} \le h(x_i)}} (y_j - y_{j-1}) \max_{\substack{x_{i-1} \le \xi \le x_i \\ y_{j-1} \le \eta \le y_j}} f(\xi,\eta) \tag{9.2.5-F}$$

und entsprechend

$$\int_a^b \int_c^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \ge \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \sum_{\substack{j \\ y_{j-1} \le h(x_i)}} (y_j - y_{j-1}) \min_{\substack{x_{i-1} \le \xi \le x_i \\ y_{j-1} \le \eta \le y_j}} f(\xi,\eta). \tag{9.2.5-G}$$

Vertauscht man die Integrationsreihenfolge, so gelten analog (mit zeilenweise statt spaltenweise ausgewerteten Teilquadraten)

$$\int_c^d \int_a^{h^{-1}(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \sum_{j=1}^{\tilde{N}} (y_j - y_{j-1}) \sum_{\substack{i \\ x_i \ge h^{-1}(y_{i-1})}} (x_i - x_{i-1}) \max_{\substack{x_{i-1} \le \xi \le x_i \\ y_{j-1} \le \eta \le y_j}} f(\xi,\eta) \tag{9.2.5-H}$$

und entsprechend

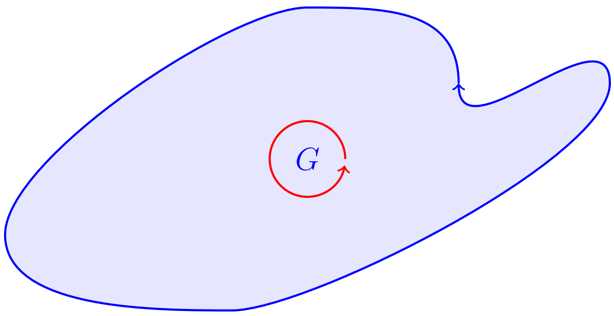
$$\int_c^d \int_a^{h^{-1}(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \sum_{j=1}^{\tilde{N}} (y_j - y_{j-1}) \sum_{\substack{i \\ x_i \ge h^{-1}(y_{i-1})}} (x_i - x_{i-1}) \min_{\substack{x_{i-1} \le \xi \le x_i \\ y_{j-1} \le \eta \le y_j}} f(\xi,\eta). \tag{9.2.5-I}$$

Dabei stimmen die Summanden mit denen aus der Abschätzung der oberen Integrale überein, für jedes Teilquadrat $Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ mit $Q_{i,j} \cap G \neq \varnothing$ taucht in der oberen Abschätzung des Maximum und in der unteren Abschätzung des Minimum des Integranden auf. Für die Differenz beider Integrale folgt damit

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b \int_c^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - \int_c^d \int_a^{h^{-1}(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \\
&\qquad \leq \sum_{\substack{i,j \\ Q_{i,j} \cap G \neq \varnothing}} |Q_{i,j}| \Bigg(\max_{\substack{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \\ y_{j-1} \leq \eta \leq y_j}} f(\xi,\eta) - \min_{\substack{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \\ y_{j-1} \leq \eta \leq y_j}} f(\xi,\eta) \Bigg) \\
&\qquad \leq (b-a)(d-c)\varepsilon \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \to 0,
\end{aligned} \tag{9.2.5-J}$$

mit $|Q_{i,j}| = (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$. □

9.2.6. Wir wollen im Folgenden ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ als *gutartig* bezeichnen, wenn es sich in endlich viele Normalbereiche bezüglich beider Achsen zerlegen lässt, wobei in jedem Teilbereich die Begrenzungsfunktionen differenzierbar sind. Dies ist zuerst eine Einschränkung, wir werden aber später sehen, dass sich Resultate mit einer einfachen Idee auf allgemeine stückweise glatt berandete Gebiete verallgemeinern lassen.



Für ein solches gutartiges Gebiet G bezeichne ∂G den Rand. Dieser ist auf natürliche Weise orientierbar, wir durchlaufen ∂G stets so, dass das Gebiet links liegt. Damit definieren wir Integrale für Funktionen über das Gebiet G. Für eine stetige Funktion $g : G \to \mathbb{R}$ sei

$$\int_G g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{9.2.6-A}$$

so definiert, dass für jeden Teilbereich in der Zerlegung voin G der Normalbereich bezüglich einer der beiden Achsen ist, das jeweilige iterierte Integral

$$\int_{G_j} g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{a_j}^{b_j} \int_{h_{j,1}(x)}^{h_{j,2}(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{9.2.6-B}$$

beziehungsweise

$$\int_{G_j} g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{c_j}^{d_j} \int_{h_{j,3}(y)}^{h_{j,4}(y)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9.2.6-C}$$

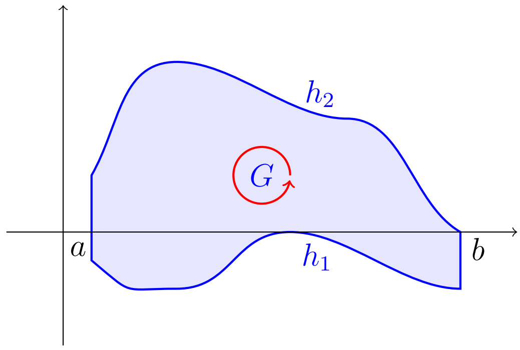
verwendet wird und anschließend über die Gebietszerlegung summiert wird. Sind Teilbereiche Normalbereiche bezüglich beider Achsen stimmen die entsprechenden Integrale überein, verwendet man verschiedene Zerlegungen des Gebiets so ergibt sich dieselbe Summe.

Ist weiterhin $f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y$ eine auf einer Umgebung des Gebietes G gegebene Differentialform, so ist das Kurvenintegrale zweiter Art

$$\int_{\partial G} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{9.2.6-D}$$

definiert. Für die krummlinigen (streng monoton parametrisierten) Randstücke sind dabei sowohl $x \mapsto (x, h(x))^\top$ als auch $y \mapsto (h^{-1}(y), x)^\top$ Parametrisierungen der Randkurve, wobei je nach Randorientierung die Variablen als wachsend oder als fallend zu verstehen sind. Für ein Gebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\}, \tag{9.2.6-E}$$



welches Normalbereich bezüglich der x-Achse ist, ergibt sich damit

$$\begin{aligned} &\int_{\partial G} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad= \int_a^b \big(f_1(x,h_1(x)) + f_2(x,h_1(x))h_1'(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1(b)}^{h_2(b)} f_2(b,y)\,\mathrm{d}y \\ &\qquad - \int_a^b \big(f_1(x,h_2(x)) + f_2(x,h_2(x))h_2'(x)\big)\,\mathrm{d}x - \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} f_2(a,y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{9.2.6-F}$$

wobei wir die Reihenfolge der Integrationsgrenzen angepasst und damit Vorzeichen eingeführt haben.

Randintegrale und Flächenintegrale sind nun wieder eng miteinander verbunden:

☞ **9.2.7 Satz** (Green[1]). *Seien $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $G \Subset U$ ein (gutartiges) stückweise glatt berandetes Gebiet[2] innerhalb U. Dann gilt*

$$\oint_{\partial G} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_G \big(\partial_x f_2(x,y) - \partial_y f_1(x,y)\big)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.2.7-A}$$

[1] George Green, 1793–1841

[2] Wir schreiben $G \Subset U$, falls G kompakte Teilmenge von U ist. Dies trifft für alle gutartigen stückweise glatt berandeten Gebiete, die zusammen mit ihrem Rand in U liegen, zu.

Beweis. Wir zerlegen das Gebiet G in Normalbereiche bezüglich beider Achsen und zeigen die Aussage für jeden Teilbereich einzeln. Teilbereiche in Quaderform haben wir schon diskutiert, wir betrachten Bereiche mit einer krummlinigen (aber streng monotonen) Randkurve. Es gilt für einen Bereich B der Form des obigen Lemmas

$$\begin{aligned} -\int_B \partial_y f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y &= \int_a^b\int_c^{g(x)} \partial_y f_1(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b f_1(x,g(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_1(x,c)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9.2.7-B}$$

und

$$\begin{aligned} \int_B \partial_x f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y &= \int_c^d\int_{g^{-1}(y)}^{b} \partial_x f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d f_2(g^{-1}(y),y)\,\mathrm{d}y - \int f_2(c,y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{9.2.7-C}$$

Auf den krummlinigen Teilstücken sind das gerade Parametrisierungen von Kurvenintegralen (durch die x-Koordinaten im ersten und durch die y-Koordinaten im zweiten Integral) und wir erhalten damit nach Summation

$$\int_B \left(\partial_x f_2(x,y) - \partial_y f_1(x,y)\right)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \oint_{\partial B} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{9.2.7-D}$$

Addieren wir alle Teilbereiche, so heben sich gemeinsame Randstücken wegen der unterschiedlichen Orientierung gegenseitig auf und es ergibt sich die zu zeigende Aussage. □

9.2.8. Die gerade gezeigte Formel ist einprägsamer, wenn Bezeichnungen für die Differentialform

$$\omega(x,y) = f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{9.2.8-A}$$

und ihre äußere Ableitung

$$\mathrm{d}\omega(x,y) = \left(\partial_x f_2(x,y) - \partial_y f_1(x,y)\right)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{9.2.8-B}$$

eingeführt werden. Dann haben wir gerade gezeigt, dass für jedes glatt berandete Gebiet innerhalb von U

$$\int_G \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial G}\omega \tag{9.2.8-C}$$

gilt. Wir geben dazu ein einfaches Beispiel.

⚒ **9.2.9 Beispiel.** Wir bestimmen zwei äußere Ableitungen für Formen im $\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\mathrm{d}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 0 \tag{9.2.9-A}$$

und

$$\mathrm{d}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = 2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y. \tag{9.2.9-B}$$

Damit folgt aus dem Satz von Green, dass für jede geschlossene glatte Kurve Γ

$$\oint_\Gamma x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0 \tag{9.2.9-C}$$

gilt. Weiterhin folgt für jeden glatt berandeten Bereich G in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{2}\oint_{\partial G} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_G \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.2.9-D}$$

Das gerade berechnete Integral kann als orientierter Flächeninhalt von G interpretiert werden. Damit ist die Fläche von G durch ein Randintegral ausdrückbar. Letzteres ist auf den ersten[3] Blick überraschend.

9.2.10. Es ist an der Zeit, etwas mehr Notation einzuführen. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$ die Menge der Differentialformen

$$\boldsymbol{\Omega}^1(G) = \{f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y \mid f_1, f_2 : G \to \mathbb{R} \text{ glatt}\} \tag{9.2.10-A}$$

mit glatten, also beliebig oft differenzierbaren, Funktionen als Koeffizienten. Ebenso bezeichnen wir

$$\boldsymbol{\Omega}^2(G) = \{g\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \mid g : G \to \mathbb{R} \text{ glatt}\}. \tag{9.2.10-B}$$

Beides sind Vektorräume. Wir definieren das *Dachprodukt*

$$\wedge\colon \boldsymbol{\Omega}^1(G) \times \boldsymbol{\Omega}^1(G) \to \boldsymbol{\Omega}^2(G), \tag{9.2.10-C}$$

so dass diese Abbildung bilinear und antisymmetrisch ist und zur bisherigen Verwendung von $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ passt. Dazu setzen wir

$$(f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y) \wedge (g_1\,\mathrm{d}x + g_2\,\mathrm{d}y) := (f_1 g_2 - f_2 g_1)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.2.10-D}$$

Die *äußere Ableitung*

$$\mathrm{d} : \boldsymbol{\Omega}^1(G) \to \boldsymbol{\Omega}^2(G) \tag{9.2.10-E}$$

kann damit etwas einfacher charakterisiert werden. Sie ist linear und erfüllt

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x = (\partial_x f\,\mathrm{d}x + \partial_y f\,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x = -\partial_y f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{9.2.10-F}$$

zusammen mit

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}y = (\partial_x f\,\mathrm{d}x + \partial_y f\,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y = \partial_x f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.2.10-G}$$

Sie erfüllt damit ebenso

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\partial_x f\,\mathrm{d}x + \partial_y f\,\mathrm{d}y) = -\partial_y\partial_x f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \partial_x\partial_y f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0. \tag{9.2.10-H}$$

Ergänzt man dies um die Bezeichnung $\boldsymbol{\Omega}^0(G)$ für die glatten Funktionen selbst, so ergibt sich die folgende Sequenz linearer Abbildungen

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^0(G) \xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{\Omega}^1(G) \xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{\Omega}^2(G) \longrightarrow \{0\} \tag{9.2.10-I}$$

für die zwei aufeinanderfolgende Abbildungen als Verkettung die Nullabbildung liefern. Wir schauen uns diese etwas genauer an. Ist G zusammenhängend, so ist der Nullraum

[3] Für Dreiecke haben wir diese Formel schon im zweiten Semester in einer Übungsaufgabe gesehen.

des Differentials $\mathbf{\Omega}^0(G) \ni f \mapsto \mathrm{d}f \in \mathbf{\Omega}^1(G)$ gerade durch die konstanten Funktionen, also das Bild der Einbettung von $\mathbb{R}$ gegeben.

Ist G sogar sternförmig, so haben wir in Satz 8.2.7 gezeigt, dass eine Differentialform $\omega \in \mathbf{\Omega}^1(G)$ genau dann Differential einer Funktion ist, wenn die Integrabilitätsbedingung $\mathrm{d}\omega = 0$ erfüllt ist. Der Nullraum der Abbildung $\mathrm{d} : \mathbf{\Omega}^1(G) \to \mathbf{\Omega}^2(G)$ ist für sternförmige Gebiete gleich dem Bild von $\mathrm{d} : \mathbf{\Omega}^0(G) \to \mathbf{\Omega}^1(G)$.

Es bleibt der letzte Pfeil, für sternförmige Gebiete der Ebene ist $\mathrm{d} : \mathbf{\Omega}^1(G) \to \mathbf{\Omega}^2(G)$ surjektiv. Dies zeigt

☞ **9.2.11 Satz** (Poincaré[4]-Lemma in der Ebene). *Sei $g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf einer sternförmigen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann existieren stetig differenzierbare Funktionen $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ mit*

$$\partial_x f_2(x,y) - \partial_y f_1(x,y) = g(x,y) \tag{9.2.11-A}$$

und damit

$$\mathrm{d}\left(f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y\right) = g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.2.11-B}$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass U sternförmig bezüglich des Ursprungs ist. Dann gilt für die Differentialform

$$\left(\int_0^1 tg(tx,ty)\,\mathrm{d}t\right)(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \tag{9.2.11-C}$$

das Gewünschte. Wir berechnen die äußere Ableitung. Es gilt

$$\partial_x \int_0^1 txg(tx,ty)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tg(tx,ty)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2x(\partial_x g)(tx,ty)\,\mathrm{d}t \tag{9.2.11-D}$$

und

$$\partial_y \int_0^1 tyg(tx,ty)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tg(tx,ty)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2y(\partial_y g)(tx,ty)\,\mathrm{d}t \tag{9.2.11-E}$$

und damit nach Addition

$$\partial_x \int_0^1 txg(tx,ty)\,\mathrm{d}t + \partial_y \int_0^1 tyg(tx,ty)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \partial_t\big(t^2g(tx,ty)\big)\,\mathrm{d}t = g(x,y). \tag{9.2.11-F}$$

Dies entspricht aber gerade der zu zeigenden Aussage. □

✂ **Ergänzung.** Die Eigenschaft, dass zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in (9.2.10-I) als Verkettung die Nullabbildung liefern, ist gerade die definierende Eigenschaft eines (Ko-) Kettenkomplexes. Der angegebene (und seine später noch erfolgende Verallgemeinerung in höhere Dimensionen) wird als der reduzierte De-Rham[5]-Komplex bezeichnet. Jedem solchen Komplex kann damit durch

$$\mathbf{H}^k_{\mathrm{dR}}(G) = {}^{\ker\, \mathrm{d}:\mathbf{\Omega}^k(G)\to\mathbf{\Omega}^{k+1}(G)}\big/_{\mathrm{im}\, \mathrm{d}:\mathbf{\Omega}^{k-1}(G)\to\mathbf{\Omega}^k(G)} \tag{9.2.11-G}$$

eine Folge von Quotientenräumen zugeordnet werden. Diese werden als Kohomologien bezeichnet, ihre Elemente als Kohomologieklassen. Die gerade nachgerechnete Eigenschaft, dass für sternförmige Gebiete alle De-Rham-Kohomologien trivial sind, geht auf Poincaré zurück und wird deshalb auch oft als das Poincaré-Lemma bezeichnet.

[4] Henri Poincaré, 1854–1912
[5] Georges de Rham, 1903–1990

9.2.12 Beispiel. Bevor wir allgemeine Formeln zu Koordinatentransformationen angeben, rechnen wir ein Beispiel. Beschreibt man die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ durch Polarkoordinaten

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{9.2.12-A}$$

so gilt

$$\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{9.2.12-B}$$

Damit können Differentialformen in kartesischen Koordinaten direkt umgerechnet werden. Es gilt also

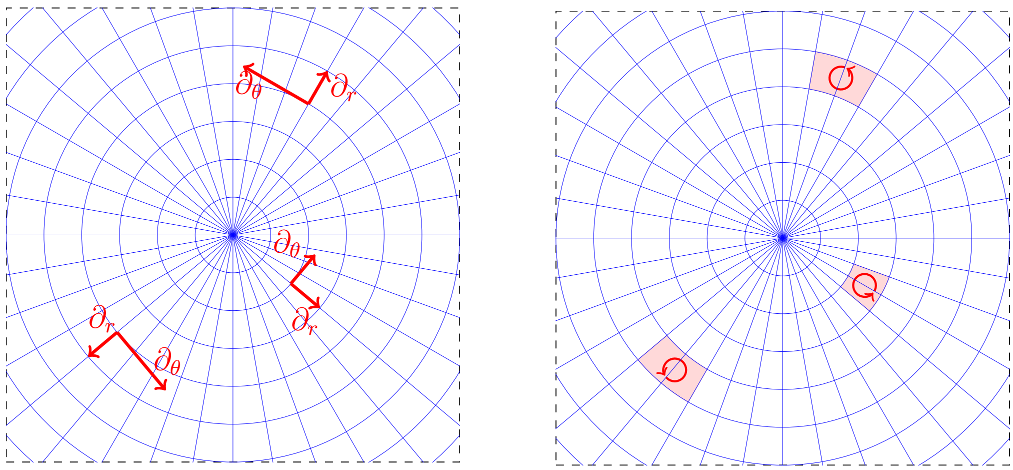
$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\cos^2\theta\,\mathrm{d}r - r^2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + r\sin^2\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = r\,\mathrm{d}r \tag{9.2.12-C}$$

und ebenso

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r + r^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\cos\theta + r\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = r\,\mathrm{d}\theta. \tag{9.2.12-D}$$

Ebenso folgt für das orientierte Flächenelement der Ebene

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \big(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\big) \wedge \big(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\big)\\ &= r\cos^2\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta - r\sin^2\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{9.2.12-E}$$



∂_r, ∂_θ $\qquad$ $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$

Zugeordnet zu den Koordinaten gibt es wiederum (ortsabhängige) Richtungsableitungen $\boldsymbol{\partial}_r$ und $\boldsymbol{\partial}_\theta$, so dass

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\partial}_r f\,\mathrm{d}r + \boldsymbol{\partial}_\theta f\,\mathrm{d}\theta \tag{9.2.12-F}$$

gilt. Diese kann man sich durch ihre zugehörigen Richtungsvektoren gegeben denken, so sind sie in obigem Bild auch dargestellt.

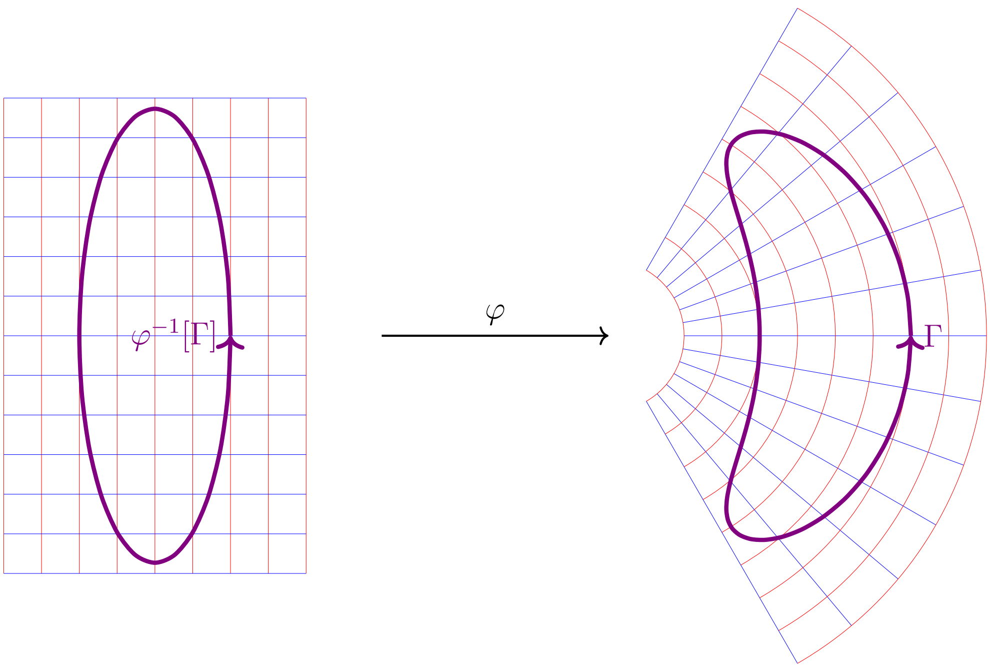
Die Umrechnungen zwischen Differentialen passen zu Kurvenintegralen. Ist Γ eine orientierte Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ parametrisiert durch

$$\gamma : [a,b] \ni t \longmapsto \begin{bmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{bmatrix} x(r(t),\theta(t)) \\ y(r(t),\theta(t)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \tag{9.2.12-G}$$

weiterhin $\omega = f_1 \,\mathrm{d}x + f_2 \,\mathrm{d}y \in \mathbf{\Omega}^1_{\mathrm{C}^0}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ eine Differentialform mit stetigen Koeffizienten $f_i \in \mathrm{C}^0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \omega &= \int_a^b \left(f_1(x,y) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_2(x,y) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(f_1(x,y) \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right) + f_2(x,y) \left(\frac{\partial y}{\partial r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(f_1(x,y) \left(\cos\theta \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - r \sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + f_2(x,y) \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\cos\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi^{-1}[\Gamma]} f_1(x(r,\theta), y(r,\theta)) \left(\cos\theta \,\mathrm{d}r - r\sin\theta \,\mathrm{d}\theta \right) \\
&\qquad\qquad + f_2(x(r,\theta), y(r,\theta)) \left(\sin\theta \,\mathrm{d}r + r\cos\theta \,\mathrm{d}\theta \right) \\
&= \int_{\varphi^{-1}[\Gamma]} \varphi^* \omega
\end{aligned} \tag{9.2.12-H}$$

mit $\varphi^*\omega \in \mathbf{\Omega}^1_{\mathrm{C}^0}(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi])$ der angebenen Differentialform. Diese entsteht, indem man in der gegebenen Form $\mathrm{d}x$ durch $\cos\theta \,\mathrm{d}r - r\sin\theta \,\mathrm{d}\theta$ und $\mathrm{d}y$ durch $\sin\theta \,\mathrm{d}r + r\cos\theta \,\mathrm{d}\theta$ ersetzt und die Koeffizienten als Funktion von $x(r,\theta)$ und $y(r,\theta)$.



9.2.13. Seien $\tilde{U}, U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und sei $\varphi : \tilde{U} \to U$ stetig differenzierbar. Dann definieren wir für $f : U \to \mathbb{R}$ das *Pullback*

$$\varphi^* f := f \circ \varphi. \tag{9.2.13-A}$$

Dieses lässt sich eindeutig auf Differentialformen fortsetzen, wenn man

$$\varphi^*(\,\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\varphi^* f), \qquad \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2 \tag{9.2.13-B}$$

zusammen mit $\varphi^*(f\omega) = \varphi^* f\ \varphi^*\omega$ fordert. Die Eindeutigkeit ist leicht nachzurechnen. Wir bezeichnen die kartesischen Koordinaten auf U als x und y, die auf $\tilde{U}$ als ξ und η und nutzen die Notation

$$\varphi : \tilde{U} \ni \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{bmatrix} \in U. \tag{9.2.13-C}$$

für φ. Zusammen mit den Koordinatenfunktionen auf U impliziert die erste Bedingung

$$\varphi^*(\,\mathrm{d}x) = \,\mathrm{d}(x \circ \varphi) = \frac{\partial x}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\eta, \qquad \varphi^*(\,\mathrm{d}y) = \frac{\partial y}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\eta. \tag{9.2.13-D}$$

Weiter impliziert die zweite Bedingung

$$\begin{aligned} \varphi^*(\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= \varphi^*(\,\mathrm{d}x) \wedge \varphi^*(\,\mathrm{d}y) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\eta\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\eta\right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta = \det \varphi'(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{9.2.13-E}$$

Damit ist das Pullback $\varphi^* : \mathbf{\Omega}^j(U) \to \mathbf{\Omega}^j(\tilde{U})$, $j = 0,1,2$, für alle Differentialformen eindeutig bestimmt, es folgt

$$\varphi^*(f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y) = (f_1 \circ \varphi)\varphi^*(\,\mathrm{d}x) + (f_2 \circ \varphi)\varphi^*(\,\mathrm{d}y) \tag{9.2.13-F}$$

und entsprechend

$$\varphi^*(g\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = (g \circ \varphi)\det \varphi'\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta. \tag{9.2.13-G}$$

Es ist offensichtlich, dass die damit angegebene Abbildung alle Eigenschaften erfüllt. Es gilt darüberhinaus auch für $\omega = f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y \in \mathbf{\Omega}^1(U)$

$$\begin{aligned} \varphi^*(\,\mathrm{d}\omega) &= \varphi^*\big(\,\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}x + \,\mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}y\big) \\ &= \varphi^*(\,\mathrm{d}f_2) \wedge \varphi^*(\,\mathrm{d}y) + \varphi^*(\,\mathrm{d}f_1) \wedge \varphi^*(\,\mathrm{d}x) = \,\mathrm{d}(\varphi^*\omega). \end{aligned} \tag{9.2.13-H}$$

Weiter gilt für jede orientierte glatte Kurve $\Gamma \subset \tilde{U}$ und ihre Bildkurve $\varphi[\Gamma] \subset U$ und jede Differentialform $\omega \in \mathbf{\Omega}^1_{\mathrm{C}^0}(U)$ als Konsequenz der Substitutionsregel für eindimensionale Integrale

$$\int_{\varphi[\Gamma]} \omega = \int_\Gamma \varphi^*\omega. \tag{9.2.13-I}$$

Dies gilt auch für Formen aus $\mathbf{\Omega}^2_{\mathrm{C}^1}(U)$.

☞ **9.2.14 Satz** (Transformationsformel für ebene Integrale). *Sei $\omega \in \mathbf{\Omega}^2_{\mathrm{C}^1}(U)$ und $\varphi : \tilde{U} \to U$ ein C^2-Diffeomorphismus. Dann gilt für jedes (gutartige) stückweise glatt berandete Gebiet $G \Subset \tilde{U}$ innerhalb von $\tilde{U}$*

$$\int_{\varphi[G]} \omega = \int_G \varphi^*\omega. \tag{9.2.14-A}$$

Beweis. Da G innerhalb von U liegt, können wir die Form ω außerhalb G abändern, ohne die Integrale zu beeinflussen. Wir können deshalb annehmen, dass $\omega \in \mathbf{\Omega}^2_{\mathrm{C}^1}(\mathbb{R}^2)$ gilt. Nach dem Poincaré-Lemma 9.2.11 gibt es damit eine Form $\alpha \in \mathbf{\Omega}^1_{\mathrm{C}^1}(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega = \mathrm{d}\alpha$. Damit liefert der Integralsatz 9.2.7 von Green zusammen mit der Transformationsformal (9.2.**13-I**) für Kurvenintegrale und $\partial\varphi[G] = \varphi[\partial G]$

$$\int_{\varphi[G]} \omega = \int_{\varphi[G]} \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial\varphi[G]} \alpha = \int_{\partial G} \varphi^*\alpha = \int_G \mathrm{d}(\varphi^*\alpha) = \int_G \varphi^*\omega \tag{9.2.14-B}$$

und damit die Behauptung. □

Die Differenzierbarkeitsforderungen an ω und φ in diesem Satz ergeben sich aus dem Beweis und sind für die meisten praktischen Anforderungen ausreichend. Sinnvoll definiert sind beide auftretenden Integrale für Differentialformen mit stetigen Koeffizienten und C^1-Diffeomorphismen. Um den Transformationssatz unter diesen Voraussetzungen zu zeigen, benötigen wir eine Hilfsaussage.

☞ **9.2.15 Lemma.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen $K \Subset U$ kompakt und sei weiterhin $g : U \to \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge g_n beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit $g_n \longrightarrow g$ gleichmäßig auf K.*

Beweis. Wir konstruieren die Folge g_n explizit und nutzen dazu einen Standardtrick der Analysis. Die Hilfsfunktion

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2+y^2-1}), & x^2+y^2 < 1, \\ 0, & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases} \tag{9.2.15-A}$$

ist auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$ beliebig oft differenzierbar. Selbiges gilt für die skalierten Funktionen

$$\lambda_r(x,y) = \lambda(x/r, y/r), \qquad r > 0, \tag{9.2.15-B}$$

die nur auf Kreisscheiben $x^2+y^2 < r^2$ von Null verschieden sind. Damit ist für jedes r das Integral

$$\int \lambda_r(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = c_r \tag{9.2.15-C}$$

endlich. Wir betrachten nun für $(x,y) \in K$ und hinreichend kleines $0 < r \leq \delta_0$ die Funktion

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{c_r} \int g(\tilde{x},\tilde{y})\lambda_r(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x} \wedge \mathrm{d}\tilde{y}. \tag{9.2.15-D}$$

Der Integrand ist dabei nur für $(\tilde{x},\tilde{y})$ in einer r-Umgebung um (x,y) von Null verschieden und (da g auf U als stetig vorausgesetzt ist) stetig. Wir können das Integral als Doppelintegral über einen Quader um (x,y) auffassen. Da der Integrand aber auch bezüglich (x,y) stetig differenzierbar ist, folgt mit der Leibnizschen Regel

$$\begin{aligned} \partial_x \iint g(\tilde{x},\tilde{y})\lambda_r(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y} &= \iint g(\tilde{x},\tilde{y})(\partial_x\lambda_r)(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}, \\ \partial_y \iint g(\tilde{x},\tilde{y})\lambda_r(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y} &= \iint g(\tilde{x},\tilde{y})(\partial_y\lambda_r)(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y} \end{aligned} \tag{9.2.15-E}$$

und die Funktion ist stetig partiell differenzierbar. Gleiches Argument liefert, dass es sich um eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion handelt.

Es bleibt die gleichmäßige Konvergenz nachzuweisen. Sei dazu

$$L = K_{\delta_0} = \bigcup_{(x,y)\in K} \overline{B_{\delta_0}}(x,y) \tag{9.2.15-F}$$

die δ_0-Umgebung der Menge K. Diese ist nach Konstruktion ebenso kompakt und für das gewählte δ_0 gilt $L \subset U$. Da g auf L stetig ist, ist es gleichmäßig stetig und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $\delta \leq \delta_0$ und

$$|x - \tilde{x}| \leq \delta, \quad |y - \tilde{y}| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(x,y) - g(\tilde{x},\tilde{y})| \leq \varepsilon \tag{9.2.15-G}$$

gilt. Damit folgt für $r \leq \delta$ und Punkte $(x,y) \in K$

$$\begin{aligned} &\left| g(x,y) - \frac{1}{c_r}\int g(\tilde{x},\tilde{y})\lambda_r(x-\tilde{x},y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\wedge\mathrm{d}\tilde{y}\right| \\ &\qquad = \left|\frac{1}{c_r}\int \big(g(\tilde{x},\tilde{y}) - g(x,y)\big)\lambda_r(x-\tilde{x},y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\wedge\mathrm{d}\tilde{y}\right| \\ &\qquad \leq \frac{1}{c_r}\int \big|g(\tilde{x},\tilde{y}) - g(x,y)\big|\lambda_r(x-\tilde{x},y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\wedge\mathrm{d}\tilde{y} \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{9.2.15-H}$$

und die gewünschte gleichmäßige Konvergenz folgt. □

☞ **9.2.16 Korollar.** *Sei $\varphi : \tilde{U} \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gibt es um jeden Punkt von $\tilde{U}$ eine hinreichend kleine kompakte Umgebung und eine Folge von C^2-Diffeomorphismen φ_n mit $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ und $\varphi_n' \longrightarrow \varphi'$ auf K.*

Beweis. Wir nutzen dasselbe Argument wie in obigem Lemma und bilden die Integrale der $\mathbb{R}^2$-wertigen Funktion

$$\varphi_r(x,y) = \frac{1}{c_r}\int \varphi(\tilde{x},\tilde{y})\lambda_r(x-\tilde{x},y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\wedge\mathrm{d}\tilde{y} \tag{9.2.16-A}$$

komponentenweise. Da das Integral auch als

$$\varphi_r(x,y) = \frac{1}{c_r}\int \varphi(x-\tilde{x},y-\tilde{y})\lambda_r(\tilde{x},\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\wedge\mathrm{d}\tilde{y} \tag{9.2.16-B}$$

geschrieben werden kann, folgt mit obigem Argument sowohl die gleichmäßige Konvergenz des Integrals als auch der ersten Ableitung

$$\varphi_r'(x,y) = \frac{1}{c_r}\int \varphi'(\tilde{x},\tilde{y})\lambda_r(x-\tilde{x},y-\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\wedge\mathrm{d}\tilde{y} \tag{9.2.16-C}$$

für $r \to 0$ auf K.

Da $\det\varphi' \neq 0$ auf K gilt, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $0 < r \leq \delta$ die Determinante der Ableitung $\det\varphi_r'$ ebenso auf K ungleich Null ist. Das allein impliziert allerdings noch keine Bijektivität von φ_r. Nach dem Satz über die implizite Funktion genügt dafür aber jetzt ein hinreichend kleiner Durchmesser von K. □

Damit können wir die Transformationsformel noch einmal in Koordinaten und mit der richtigen Regularität formulieren. Es gilt

☞ **9.2.17 Korollar** (Transformationsformel für ebene Integrale). *Sei $g : U \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : \tilde{U} \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt für jedes stückweise glatt berandete Gebiet $G \Subset \tilde{U}$ innerhalb von $\tilde{U}$*

$$\int_{\varphi[G]} g(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_G (g \circ \varphi)(\xi,\eta)\,\det \varphi'(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta. \tag{9.2.17-A}$$

9.3 Differentialformen im $\mathbb{R}^3$ und Flächenintegrale

9.3.1. Im $\mathbb{R}^3$ gehen wir analog vor und betrachten neben Differentialformen

$$\mathbf{\Omega}^1(U) := \{f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y + f_3\,\mathrm{d}z \mid f_i : U \to \mathbb{R} \text{ glatt}\} \tag{9.3.1-A}$$

und

$$\mathbf{\Omega}^2(U) := \{f_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + f_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \mid g_i : U \to \mathbb{R} \text{ glatt}\} \tag{9.3.1-B}$$

auch

$$\mathbf{\Omega}^3(U) := \{g\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \mid g : U \to \mathbb{R} \text{ glatt}\}. \tag{9.3.1-C}$$

Erstere können entlang orientierter Kurven in U integriert werden, letztere führen für nun dreidimensionale Normalbereiche

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,b],\ h_1(x) \le y \le h_2(x),\ h_3(x,y) \le z \le h_4(x,y)\} \tag{9.3.1-D}$$

zu iterierten Integralen

$$\int_G g(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{h_3(x,y)}^{h_4(x,y)} g(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{9.3.1-E}$$

Für Normalbereiche bezüglich mehrerer Reihenfolgen der Koordinaten erlaubt Lemma 9.2.5 die Vertauschung der Reihenfolge. Wir können also wiederum Gebiete als gutartig bezeichnen, wenn sie sich in endlich viele Normalbereiche zerlegen lassen, und Integrale von Differentialformen aus $\mathbf{\Omega}^3(U)$ über gutartige Gebiete $G \Subset U$ definieren.

Differentialformen aus $\mathbf{\Omega}^2(U)$ passen zu Flächenintegralen. Dies wollen wir zunächst genauer anschauen.

9.3.2. Ein glatt parametrisiertes Flächenstück Σ im $\mathbb{R}^3$ ist als Bild eines (gutartigen) stückweise glatt berandeten Gebietes $\Phi \Subset \mathbb{R}^2$ unter einer immersiven differenzierbaren Abbildung, also einer Funktion mit

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \supset \Phi \to \mathbb{R}^3, \qquad \operatorname{rank} \varphi' = 2, \tag{9.3.2-A}$$

darstellbar. Ist dabei Φ orientiert, so überträgt φ diese Orientierung auf Σ. Gilt nun

$$\Sigma = \{\varphi(\xi,\eta) \mid (\xi,\eta)^\top \in \Phi\} \subset U \tag{9.3.2-B}$$

und ist $\omega \in \mathbf{\Omega}^2(U)$ eine Differentialform auf U, so ist damit

$$\varphi^*\omega \in \mathbf{\Omega}^2(\Phi) \tag{9.3.2-C}$$

eine Differentialform auf (beziehungsweise besser in einer Umgebung von) $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ und wir können

$$\int_\Sigma \omega := \int_\Phi \varphi^*\omega \tag{9.3.2-D}$$

definieren. Diese Definition ist sinnvoll. Für zwei verschiedene (injektive) Parametrisierungen $\varphi_1 : \Phi_1 \to \Sigma$ und $\varphi_2 : \Phi_2 \to \Sigma$ von Σ ist die Abbildung $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \Phi_1 \to \Phi_2$ nach dem Satz über die implizite Funktion als Auflösung von $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = \varphi_2(\xi_2, \eta_2)$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\int_{\Phi_2} \varphi_2^*\omega = \int_{\Phi_1} \psi^*\varphi_2^*\omega = \int_{\Phi_1} \varphi_1^*\omega. \tag{9.3.2-E}$$

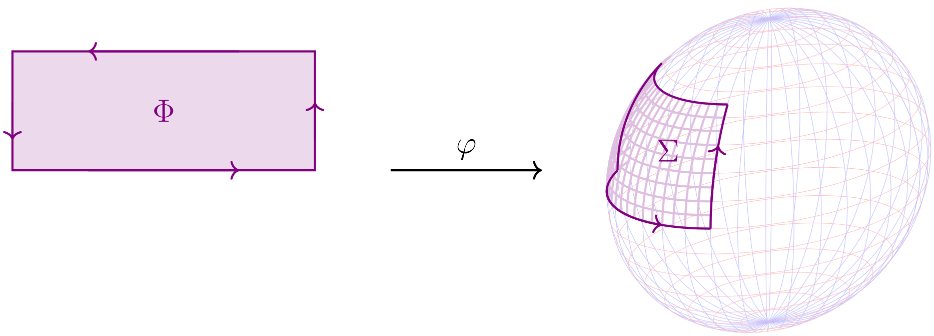
⚒ **9.3.3 Beispiel.** Wir betrachten ein Beispiel und integrieren eine Differentialform über ein Stück der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Dazu nutzen wir Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\theta\cos\eta, \qquad y = r\sin\theta\cos\eta, \qquad z = r\sin\eta \tag{9.3.3-A}$$

mit $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ und $\eta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Differenzieren der Koordinatenfunktionen führt direkt auf

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \cos\theta\cos\eta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\cos\eta\,\mathrm{d}\theta - r\cos\theta\sin\eta\,\mathrm{d}\eta \\ \mathrm{d}y &= \sin\theta\cos\eta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\eta\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\eta\,\mathrm{d}\eta \\ \mathrm{d}z &= \sin\eta\,\mathrm{d}r + r\cos\eta\,\mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{9.3.3-B}$$

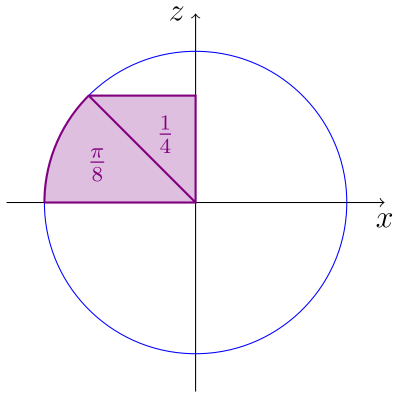
und liefert damit die Pullbacks der Differentiale $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$ unter den Koordinaten. Wir betrachten das Teilstück Σ der Sphäre $r = 1$ mit $\theta \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ und $\eta \in (0, \frac{\pi}{4})$ und integrieren $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ über Σ.



Dies führt zu wegen $\varphi^*(\mathrm{d}r) = 0$ zusammen mit $\varphi^*(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}\theta$ und $\varphi^*(\mathrm{d}\eta) = \mathrm{d}\eta$ zu

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z &= \int_\Phi \big(-\sin\theta\cos\eta\,\mathrm{d}\theta - \cos\theta\sin\eta\,\mathrm{d}\eta\big) \wedge \big(\cos\eta\,\mathrm{d}\eta\big) \\ &= -\int_\Phi \sin\theta\cos^2\eta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\eta \\ &= -\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\eta\,\mathrm{d}\eta = \frac{2+\pi}{8}. \end{aligned} \tag{9.3.3-C}$$

Das gerade berechnete Integral liefert die orientierte Fläche der Projektion von Σ auf die x-z-Ebene.



Um dies zu sehen, nutzen wir die Projektion des Flächenstücks auf die x-z-Ebene als Parametrisierung.

9.3.4. Der Satz 9.2.7 von Green impliziert ein entsprechendes Resultat im Dreidimensionalen. Ist Σ ein stückweise glatt berandetes Flächenstück parametrisiert durch $\varphi : \Phi \to \Sigma$ und $\omega \in \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\omega = \int_\Phi \varphi^*(\,\mathrm{d}\omega) = \int_\Phi \mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \oint_{\partial\Phi} \varphi^*\omega = \oint_{\partial\Sigma} \omega. \tag{9.3.4-A}$$

Diese Aussage wird im Dreidimensionalen als Integralsatz von Stokes bezeichnet.

☞ **9.3.5 Korollar** (Stokes[6]). *Sei $\omega \in \mathbf{\Omega}^1(U)$ und $\Sigma \Subset U \subseteq \mathbb{R}^3$ ein stückweise glatt berandetes orientiertes Flächenstück in U. Dann gilt*

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial\Sigma} \omega. \tag{9.3.5-A}$$

Wir schreiben dies noch einmal explizit aus. Es gilt also für $\omega = f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y + f_3\,\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \big(\partial_x f_2 - \partial_y f_1\big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \big(\partial_z f_1 - \partial_x f_3\big)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \big(\partial_y f_3 - \partial_z f_2\big)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\ = \int_{\partial\Sigma} f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y + f_3\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{9.3.5-B}$$

9.3.6. Es bleibt einen neuen Integralsatz zu formulieren. Dazu definieren wir die *äußere Ableitung* einer Differentialform $\omega \in \mathbf{\Omega}^2(U)$. Die Differentialform ω hat die Form

$$g_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + g_2(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + g_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{9.3.6-A}$$

mit differenzierbaren Koeffizientenfunktionen $g_i : G \to \mathbb{R}^3$. Für diese setzen wir

$$\mathrm{d}\omega = \big(\partial_x g_1(x,y,z) + \partial_y g_2(x,y,z) + \partial_z g_3(x,y,z)\big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z. \tag{9.3.6-B}$$

Mit dieser Notation gilt wiederum

[6] Sir George Gabriel Stokes, 1819–1903

☞ **9.3.7 Satz** (Ostrogradski[7]–Gauss). *Sei $G \Subset U$ ein (gutartiges) stückweise glatt berandetes Gebiet in $\mathbb{R}^3$ und $\omega \in \mathbf{\Omega}^2(U)$. Dann gilt*

$$\int_G \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial G} \omega. \tag{9.3.7-A}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt wiederum analog zum zweidimensionalen Beweis des Integralsatzes von Green. Wir zerlegen das Gebiet G in endlich viele Teile, die jeweils Normalbereiche bezüglich aller drei Achsen sind und betrachten jeden Teilbereich einzeln. Dann gilt für jeden einzelnen Teilbereich B und den entsprechenden Summanden

$$\begin{aligned}\int_B \partial_z g_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &= \int_a^b\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}\int_{h_3(x,y)}^{h_4(x,y)} \partial_z g_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} g_3(x,y,h_4(x,y)) - g_3(x,y,h_3(x,y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial B} g_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{9.3.7-B}$$

bei Notation als Normalbereich in x-y-z-Reihenfolge;

$$\int_B \partial_y g_2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \int_{\partial B} g_2(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \tag{9.3.7-C}$$

bei Notation als Normalbereich in z-x-y-Reihenfolge und entsprechend

$$\int_B \partial_z g_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \int_{\partial B} g_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \tag{9.3.7-D}$$

für B als Normalbereich in y-z-x-Reihenfolge der Koordinaten. Nach Summation der drei Integrale folgt die Behauptung für B, nach Summation über die Teilbereiche und unter Ausnutzung der sich gegenseitig aufhebenden Orientierung gemeinsamer Seitenflächen die Aussage des Satzes. □

Explizit ausgeschrieben lautet der gerade formulierte Satz

$$\begin{aligned}&\int_G \big(\partial_x g_1 + \partial_y g_2 + \partial_z g_3\big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ &\qquad = \int_{\partial G} g_1\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + g_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + g_3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{9.3.7-E}$$

Wir betrachten dazu einige Beispiele.

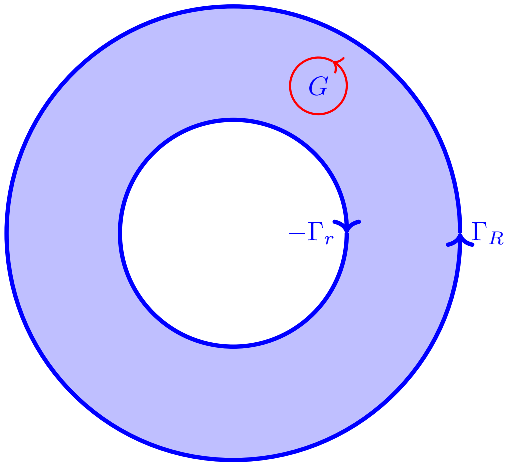
⚒ **9.3.8 Beispiel.** Sei $\omega = x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. Dann gilt $\mathrm{d}\omega = 3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ und damit folgt für jedes (gutartige) stückweise glatt berandete Gebiet G

$$\int_G \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\oint_{\partial G}\big(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\big) \tag{9.3.8-A}$$

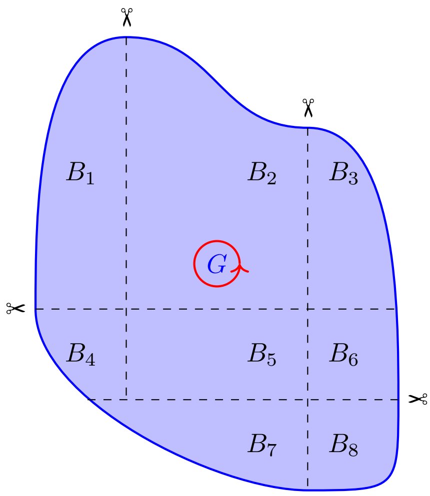
und das Volumen von G kann wiederum als Randintegral über die Oberfläche von G ausgedrückt werden.

[7] Michail Wassiljewitsch Ostrogradski, 1801–1861

Ergänzung. Für die folgenden beiden Anwendungen der Integralsätze lohnt es sich, Ränder von Flächenstücken und Gebieten noch einmal genauer anzuschauen. Ränder können aus mehreren Teilen bestehen, so ist der Rand des Kreisrings $G = \{r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^2$ aus dem positiv orientierten Kreis mit Radius R und dem negativ orientierten Kreis mit Radius r zusammengesetzt. Es ist sinnvoll, dafür eine Notation einzuführen. Wir addieren Wege formal, wenn wir die zugehörigen Integrale addieren. Bezeichnet Γ_r positiv orientierten Kreis mit Radius r um den Ursprung, so kann man $\partial G = \Gamma_R - \Gamma_r$ schreiben. Das $-$ liefert den Wechsel der Orientierung der Kurve.



Dies ist uns schon vorher begegnet, bei der Definition des Integrals über gutartige Gebiete haben wir G in Teilbereiche B_i zerlegt. Das kann man auch als $G = B_1 + \cdots + B_m$ schreiben, für die Integrale ergibt sich eine Summe über die Teilintegrale. Für die Ränder $\partial G = \partial B_1 + \cdots + \partial B_n$ heben sich die inneren Randstücken gegenseitig auf.



Die Randabbildung ∂ bildet orientierte Gebiete der Ebene auf formale Summen von orientierter Kurven ab, orientierte Gebiete im Raum auf formale Summen orientierter Flächen. Dabei gilt (wie man sich sehr leicht überzeugen kann) $\partial^2 = 0$. Ränder haben selbst keinen Rand. Es ergibt sich also wieder ein Komplex

$$\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\text{Punkte}\} \xleftarrow{\partial} \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\text{or. Kurven}\} \xleftarrow{\partial} \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\text{or. Flächen}\} \xleftarrow{\partial} \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\text{or. Gebiete}\} \qquad (9.3.\mathbf{8}\text{-}\mathbf{B})$$

von $\mathbb{Z}$-Moduln erzeugt von den entsprechenden Mengen (mit den natürlichen durch Verkleben gegebenen Relationen). Die sich ergebenden formalen k-dimensionalen Objekte werden als k-*Ketten* bezeichnet. Diese sind die natürlichen Objekte, über die im Höherdimensionalen integriert wird. Ketten, die im Kern von ∂ liegen, werden als geschlossen oder auch als *Zykel* bezeichnet.

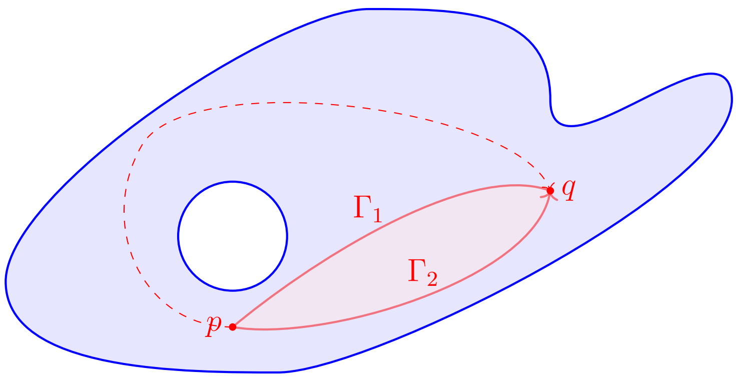
⚒ **9.3.9 Beispiel.** Gelte für $\omega \in \mathbf{\Omega}^1(U)$ die Bedingung $\mathrm{d}\omega = 0$. Dann folgt für jede geschlossene stückweise glatte Kurve Γ, die Rand einer in U liegenden Fläche Σ ist,

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Sigma \mathrm{d}\omega = 0. \tag{9.3.9-A}$$

Dies kann man nutzen, um die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen zu zeigen. Seien dazu $p, q \in U$ zwei Punkte und Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, die p mit q verbinden. Wir bezeichnen die beiden Kurven als *homolog* in U, falls es eine stückweise glatt berandete Fläche Σ in U gibt, für die $\partial\Sigma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ gilt (der Rand also entlang der Kurve Γ_1 von p nach q verläuft und dann entgegen der Orientierung der Kurve Γ_2 von q nach p folgt). Homologie ist eine Äquivalenzrelation für Kurven zwischen p und q. Es gilt

$$\mathrm{d}\omega = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_1 \text{ homolog zu } \Gamma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega. \tag{9.3.9-B}$$

Bildhaft kann man sich das so vorstellen, dass Γ_1 entlang der Fläche Σ in Γ_2 deformiert werden kann.



Die in der Skizze angedeutete gestrichelte Kurve von p nach q ist nicht zu den anderen beiden homolog, da es kein im Inneren des Gebietes liegendes Flächenstück gibt, welches diese zusammen mit einer der anderen beiden als Rand besitzt.

⚒ **9.3.10 Beispiel.** Gilt für $\omega \in \mathbf{\Omega}^2(U)$ die Bedingung $\mathrm{d}\omega = 0$, so folgt ein entsprechendes Resultat für Flächenintegrale. Sei dazu $\Gamma \Subset U$ eine geschlossene orientierte Kurve und seien Σ_1 und Σ_2 zwei Flächen mit $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2 = \Gamma$. Wir nennen die beiden Flächen *homolog* in U, falls $\Sigma_1 - \Sigma_2 = \partial G$ für ein Gebiet $G \Subset U$ gilt. Auch in diesem Fall gilt nun

$$\mathrm{d}\omega = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma_1 \text{ homolog zu } \Sigma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\Sigma_1} \omega = \int_{\Sigma_2} \omega. \tag{9.3.10-A}$$

⚒ **9.3.11 Beispiel.** Für eine geschlossene orientierte Kurve Γ im $\mathbb{R}^3$ bestimmt das Integral

$$\frac{1}{2} \oint_\Gamma \big(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y\big) \tag{9.3.11-A}$$

gerade den orientierten Flächeninhalt des von der Projektion von Γ auf die x-y-Ebene umschlossenen Gebietes. Für jede Fläche Σ, die Γ als Rand besitzt, ergibt sich damit

$$2\int_\Sigma \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_\Sigma \mathrm{d}\big(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y\big) = \oint_\Gamma \big(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y\big). \tag{9.3.11-B}$$

Alle diese Flächen sind homolog.

9.4 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

Bevor wir nun weiter jede Dimension einzeln diskutieren, formulieren wir alles allgemein. Die Beweise der Integralsätze werden wir, so wie gerade im Schritt von Dimensionen zwei zu drei, rekursiv über die Dimensionen führen und dazu (anders als bisher) den Transformationssatz direkt nutzen.

9.4.1. Wir bezeichnen für einen Multiindex $\alpha \in \{1, \ldots, n\}^k$ mit $\mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k}$ die alternierende k-lineare Abbildung

$$(\mathbb{R}^n)^k \ni (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \det \begin{bmatrix} \langle \mathrm{d}x_{\alpha_1}, v_1 \rangle & \langle \mathrm{d}x_{\alpha_1}, v_2 \rangle & \cdots & \langle \mathrm{d}x_{\alpha_1}, v_k \rangle \\ \langle \mathrm{d}x_{\alpha_2}, v_1 \rangle & \langle \mathrm{d}x_{\alpha_2}, v_2 \rangle & \cdots & \langle \mathrm{d}x_{\alpha_2}, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathrm{d}x_{\alpha_k}, v_1 \rangle & \langle \mathrm{d}x_{\alpha_k}, v_2 \rangle & \cdots & \langle \mathrm{d}x_{\alpha_k}, v_k \rangle \end{bmatrix}. \qquad (9.4.\mathbf{1}\text{-}\mathbf{A})$$

Dies stimmt mit der Definition aus (9.1.**1-G**) überein. Treten im Multiindex α Zahlen mehrfach auf, so liefern die Rechenregeln für Determinanten den Wert Null, ebenso ändert das Vertauschen zweier Einträge das Vorzeichen. Wählt man nur geordnete Multiindizes mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$, so ergeben sich $\binom{n}{k}$ linear unabhängige Abbildungen. Diese bilden eine Basis des Vektorraumes $\mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ der alternierenden k-linearen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$.

✍ **9.4.2 Definition.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

(i) *Eine* Differentialform *vom Grad k, $k \in \mathbb{N}$, ist eine stetige Funktion*

$$\omega : U \to \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n) \qquad (9.4.\mathbf{2}\text{-}\mathbf{A})$$

in den Vektorraum der alternierenden multilinearen Abbildungen $(\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$. Diese besitzt damit die (kanonische) Darstellung

$$\omega(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \{1,\ldots,n\}^k \\ \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k}} g_\alpha(x)\, \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \qquad (9.4.\mathbf{2}\text{-}\mathbf{B})$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen $g_\alpha : U \to \mathbb{R}$.

(ii) *Wir nennen die Differentialform differenzierbar, falls die Koeffizientenfunktionen stetig differenzierbar sind.*

(iii) *Desweiteren vereinbaren wir die Notation $\mathbf{\Omega}^k(U)$ für die Menge der beliebig oft differenzierbaren k-Formen auf U, bezeichnen zur Vereinfachung mit $\mathbf{\Omega}^0(U)$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf U und setzen*

$$\mathbf{\Omega}(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{\Omega}^k(U). \qquad (9.4.\mathbf{2}\text{-}\mathbf{C})$$

9.4.3 (Dachprodukt). Das Dachprodukt zweier Differentialformen ergibt sich durch formales Multiplizieren der kanonischen Darstellungen und Zusammenfassen. Für zwei Formen $\omega_1 \in \mathbf{\Omega}^k(U)$ und $\omega_2 \in \mathbf{\Omega}^l(U)$ ist das *Dachprodukt*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathbf{\Omega}^{k+l}(U) \qquad (9.4.\mathbf{3}\text{-}\mathbf{A})$$

charakterisiert durch die Antisymmetrie der elementaren Produkte

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0, \qquad \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \tag{9.4.3-B}$$

die Assoziativität und die Linearität in den Koeffizientenfunktionen. Dies sind genau die Rechenregeln, die wir schon in Dimensionen zwei und drei zur Berechnung genutzt haben. Die kanonische Darstellung der Differentialform ergibt sich dabei durch Umsortieren aller auftretenden elementaren Dachprodukte der $\mathrm{d}x_j$ in aufsteigende Reihenfolge der Indizes. Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften noch einmal zusammen:

☞ **9.4.4 Lemma.** *Das Dachprodukt von Differentialformen ist*

(i) *(graduiert) antikommutativ*

$$\forall_{\phi\in\mathbf{\Omega}^k,\psi\in\mathbf{\Omega}^l} \qquad \phi\wedge\psi = (-1)^{kl}\psi\wedge\phi \tag{9.4.4-A}$$

(ii) *distributiv*

$$\forall_{\omega,\psi,\phi\in\mathbf{\Omega}} \qquad \omega\wedge(\psi+\phi) = \omega\wedge\psi + \omega\wedge\phi \tag{9.4.4-B}$$

(iii) *assoziativ*

$$\forall_{\omega,\psi,\phi\in\mathbf{\Omega}} \qquad \omega\wedge(\psi\wedge\phi) = (\omega\wedge\psi)\wedge\phi \tag{9.4.4-C}$$

Beweis. Die Eigenschaften sind einfach in der kanonischen Darstellungen der Formen nachzurechnen. Wir überlassen den Beweis als Übung. □

9.4.5 (Äußere Ableitung)**.** Die *äußere Ableitung* $\mathrm{d} : \mathbf{\Omega}^k(U) \to \mathbf{\Omega}^{k+1}(U)$ ist dadurch charakterisiert, dass sie für Funktionen $f \in \mathbf{\Omega}^0(U)$ mit dem Differential übereinstimmt, additiv ist und darüberhinaus

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}) = \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k} \tag{9.4.5-A}$$

für alle $\alpha\in\{1,\dots,n\}^k$, $k\in\mathbb{N}$, erfüllt. Dies bestimmt die äußere Ableitung eindeutig, wir können sie wiederum schrittweise berechnen. So gilt für 1-Formen

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x_j) &= \big(\partial_{x_1}f\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \partial_{x_n}f\,\mathrm{d}x_n\big)\wedge\mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{i\,:\,i<j}\partial_{x_i}f\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j - \sum_{i\,:\,i>j}\partial_{x_i}f\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i\end{aligned} \tag{9.4.5-B}$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Big(\sum_j f_j\,\mathrm{d}x_j\Big) &= \sum_j\Big(\sum_{i\,:\,i<j}\partial_{x_i}f_j\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j - \sum_{i\,:\,i>j}\partial_{x_i}f_j\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i\Big) \\ &= \sum_{i<j}\big(\partial_{x_i}f_j - \partial_{x_j}f_i\big)\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j.\end{aligned} \tag{9.4.5-C}$$

Dies erlaubt eine einfache erste Rechnung. Es gilt

$$\mathrm{d}(\,\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\Big(\sum_j\partial_{x_j}f\,\mathrm{d}x_j\Big) = \sum_{i<j}\big(\partial_{x_i}\partial_{x_j}f - \partial_{x_j}\partial_{x_i}f\big)\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j = 0. \tag{9.4.5-D}$$

Die äußere Ableitung einer Differentialform aus $\mathbf{\Omega}^1(U)$ beschreibt damit ein notwendiges Kriterium dafür, dass es sich um ein Differential handelt. Für die Berechnung äußerer Ableitungen von Differentialformen höheren Grades hilft folgendes Lemma:

☞ **9.4.6 Lemma.** **(i)** *Die äußere Ableitung erfüllt die Leibnizregel*

$$\mathrm{d}(\phi\wedge\psi) = \mathrm{d}\phi\wedge\psi + (-1)^k\phi\wedge\mathrm{d}\psi \tag{9.4.6-A}$$

für $\phi\in\mathbf{\Omega}^k(U)$ *und* $\psi\in\mathbf{\Omega}^l(U)$.

(ii) *Es gilt* $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$ *für alle* $\omega\in\mathbf{\Omega}^k(U)$.

Beweis. Die Leibnizregel rechnen wir in kanonischen Darstellungen nach. Dafür genügt es wegen der Distributivität des $\wedge$-Produkts einzelne Summanden zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Big(\big(f\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\big)\wedge\big(g\,\mathrm{d}x_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\beta_l}\big)\Big)\\
&\qquad= \mathrm{d}\Big(fg\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\wedge\mathrm{d}x_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\beta_l}\Big)\\
&\qquad= g\,\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\wedge\mathrm{d}x_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\beta_l}\\
&\qquad\qquad+ f\,\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\wedge\mathrm{d}x_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\beta_l}\\
&\qquad= \Big(\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\Big)\wedge\Big(g\,\mathrm{d}x_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\beta_l}\Big)\\
&\qquad\qquad+ (-1)^k\Big(f\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\Big)\wedge\Big(\mathrm{d}g\,\mathrm{d}x_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\beta_l}\Big)
\end{aligned}\tag{9.4.6-B}$$

unter Ausnutzung der Produktregel für die Ableitung einer skalarwertigen Funktion.

Für die zweite Aussage genügt wiederum die Leibnizregel. Es gilt für die einzelnen Summanden der kanonischen Darstellung von ω

$$\mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\big) = \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k} \tag{9.4.6-C}$$

und damit für die doppelte Anwendung der äußeren Ableitung

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\big) &= \mathrm{d}(\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\\
&\qquad - \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\big(\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_k}\big) = 0.
\end{aligned}\tag{9.4.6-D}$$

Summation liefert die Behauptung. □

✂ **Ergänzung.** Es gilt wiederum $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$, die Sequenz der Abbildungen

$$\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow\mathbf{\Omega}^0(U)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathbf{\Omega}^k(U)\longrightarrow\mathbf{\Omega}^{k+1}(U)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathbf{\Omega}^n(U)\longrightarrow\{0\} \tag{9.4.6-E}$$

bildet also in jeder Raumdimension einen Komplex, den (reduzierten) De-Rham-Komplex. Zumindest für sternförmige Gebiete U ist dieser exakt. Genau dies zeigt das Poincaré-Lemma.

☞ **9.4.7 Satz** (Poincare-Lemma). *Sei* U *sternförmig und sei* $\omega\in\mathbf{\Omega}^k(U)$. *Dann sind äquivalent*

(i) $\mathrm{d}\omega=0$;

(ii) *es gibt ein* $\phi\in\mathbf{\Omega}^{k-1}(U)$ *mit* $\omega=\mathrm{d}\phi$.

Beweis. Es bleibt die Richtung von (ii) nach (i) zu zeigen. Wir nehmen ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit an, dass U sternförmig bezüglich des Ursprungs ist und definieren eine lineare Abbildung

$$K : \mathbf{\Omega}^k(U) \to \mathbf{\Omega}^{k-1}(U), \tag{9.4.7-A}$$

indem wir diese für Differentialformen

$$\omega_\alpha = g_\alpha \,\mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \tag{9.4.7-B}$$

zu gegebenen Multiindizes $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$ durch das Integral

$$K\omega_\alpha(x) = \left(\int_0^1 t^{k-1} g_\alpha(tx)\,\mathrm{d}t \right) \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} x_{\alpha_j} \,\mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}x_{\alpha_j}}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k}, \tag{9.4.7-C}$$

definieren. Dabei ist die 'Tarnkappe' $\widehat{\mathrm{d}x_{\alpha_j}}$ so zu verstehen, dass dieses Differential bei den $\cdots$ im Produkt weggelassen wird. Wir berechnen die äußere Ableitung von $K\omega_\alpha$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}K\omega_\alpha &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \int_0^1 t^{k-1} g_\alpha(tx)\,\mathrm{d}t \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} x_{\alpha_j} \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}x_{\alpha_j}}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \\
&= \sum_{j=1}^k \Bigg(\int_0^1 t^{k-1} g_\alpha(tx)\,\mathrm{d}t \;\; \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \\
&\quad + (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_{\alpha_j} t^k (\partial_{x_i} g_\alpha)(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}x_{\alpha_j}}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \Bigg) \\
&= k \int_0^1 t^{k-1} g_\alpha(tx)\,\mathrm{d}t \;\; \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \int_0^1 x_{\alpha_j} t^k (\partial_{x_i} g_\alpha)(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}x_{\alpha_j}}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \\
&= \int_0^1 \partial_t\big(t^k g_\alpha(tx)\big)\,\mathrm{d}t \;\; \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \int_0^1 x_{\alpha_j} t^k (\partial_{x_i} g_\alpha)(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}x_{\alpha_j}}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i t^k (\partial_{x_i} g_\alpha)(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \\
&= \omega_\alpha - K\,\mathrm{d}\omega_\alpha.
\end{aligned} \tag{9.4.7-D}$$

Summation über α liefert daraus, dass damit für jede Form $\omega \in \mathbf{\Omega}^k(U)$

$$\mathrm{d}K\omega + K\,\mathrm{d}\omega = \omega \tag{9.4.7-E}$$

gilt. Gilt nun $\mathrm{d}\omega = 0$, so folgt mit $\phi = K\omega$ die Behauptung. $\square$

9.4.8 (Pullbacks). Auch im Höherdimensionalen induzieren (hinreichend oft) differenzierbare Abbildungen $\varphi : \tilde{U} \to U$ ein zugeordnetes *Pullback*

$$\varphi^* : \mathbf{\Omega}(U) \to \mathbf{\Omega}(\tilde{U}). \tag{9.4.8-A}$$

Dieses ist durch die Eigenschaften

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi, \qquad \varphi^*(\,\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\varphi^* f) \tag{9.4.8-B}$$

für $f \in \mathbf{\Omega}^0(U)$ zusammen mit der Addititvität und der Verträglichkeit mit dem Dachprodukt

$$\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2, \qquad \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2 \tag{9.4.8-C}$$

eindeutig bestimmt. Der Nachweis der Eindeutigkeit entspricht der schon gemachten Rechnung im Zweidimensionalen und liefert gleichzeitig die explizite Form des Pullbacks. Weiter gilt

☞ **9.4.9 Lemma.** *Für jedes $\omega \in \mathbf{\Omega}^k(U)$ gilt $\varphi^*(\,\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\omega)$.*

Beweis. Es genügt, dies für die speziellen Formen

$$\omega_\alpha = f_\alpha \,\mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k} \tag{9.4.9-A}$$

zu Multiindizes $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$ nachzurechnen. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \varphi^* \,\mathrm{d}\omega_\alpha &= \varphi^*\big(\,\mathrm{d}f_\alpha \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k}\big) \\ &= \varphi^*(\,\mathrm{d}f_\alpha) \wedge \varphi^*\big(\,\mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k}\big) \\ &= \mathrm{d}(f_\alpha \circ \varphi) \wedge \varphi^*\big(\,\mathrm{d}x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_k}\big) = \mathrm{d}\varphi^*\omega_\alpha. \end{aligned} \tag{9.4.9-B}$$

Summation über die Multiindizes liefert dann die Behauptung. □

9.4.10 (Integration über Mannigfaltigkeiten). Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als m-dimensionale (Unter-) *Mannigfaltigkeit*, falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und m stetig differenzierbare Koordinatenfunktionen $\xi_1, \dots, \xi_m : U \to \mathbb{R}$ existieren, so dass die Zuordnung

$$M \cap U \ni x \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \\ \vdots \\ \xi_m(x) \end{bmatrix} \in \Phi \subset \mathbb{R}^m \tag{9.4.10-A}$$

bijektiv ist und die Differentiale der Koordinatenfunktionen

$$\mathrm{d}\xi_1(x), \dots, \,\mathrm{d}\xi_m(x) \tag{9.4.10-B}$$

für jedes $x \in M \cap U$ linear unabhängig sind. Dies impliziert, dass die *Parametrisierung*

$$\varphi : \Phi \ni \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_m(x) \end{bmatrix} \mapsto x \in \mathbb{R}^n \tag{9.4.10-C}$$

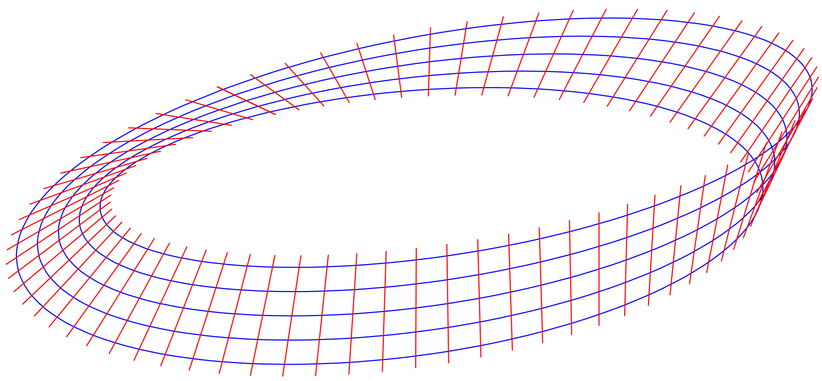
injektiv und für jedes $\xi \in \Phi$ die Bedingung $\operatorname{rank} \varphi'(\xi) = m$ erfüllt ist.

Unser nächstes Ziel ist es, Differentialformen aus $\mathbf{\Omega}^m(U)$ über solche m-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten in U zu integrieren. Dazu setzen wir weiter voraus, dass M kompakt ist. Dann genügten endlich viele solcher Umgebungen, um M zu überdecken. Wir fixieren für das Weitere die Umgebungen U_j, $j = 1, \dots, N$ und die zugehörigen Parametrisierungen $\varphi_j : \Phi_j \to M \cap U_j$, die oft auch als *Karten* bezeichnet werden.

Wir bezeichnen die Parametrisierungen als *konsistent orientiert*, falls es die zugeordneten induzierten Abbildungen (die *Kartenwechsel*)

$$\psi_{ij} : \varphi_i^{-1}[M \cap U_i \cap U_j] \to \varphi_j^{-1}[M \cap U_i \cap U_j], \qquad \varphi_j \circ \psi_{ij} = \varphi_i, \tag{9.4.10-D}$$

die Bedingung $\det \psi'_{ij} > 0$ erfüllen. Existieren konsistent orientierte Parametrisierungen, so heißt M *orientierbar*. Darüberhinaus bestimmt die Wahl einer konsistent orientierten Parametrisierung (zusammen mit der Orientierung des $\mathbb{R}^m$) die Orientierung von M.



Beispiel einer nicht-orientierbaren Fläche im $\mathbb{R}^3$: das Möbiusband[8]

☞ **9.4.11 Lemma** (Zerlegung der Eins). *Sei M kompakt und seien $U_1, \dots, U_N$ offene Mengen mit $M \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$. Dann existieren beliebig oft differenzierbare Funktionen $\chi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit*

- $\chi_j(x) \geq 0$;
- $\chi_j(x) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n \setminus U_j$; *und*
- $\chi_1(x) + \dots + \chi_N(x) = 1$ *für alle* $x \in M$.

Diese werden als der Überdeckung U_j untergeordnete Zerlegung der Eins *bezeichnet.*

Beweis. Zu jeder kompakten Menge M und jeder offenen Menge U mit $M \subseteq U$ gilt

$$\operatorname{dist}(M, \mathbb{R}^n \setminus U) = \inf_{x \in M, y \in \mathbb{R}^n \setminus U} |x - y| > 0. \tag{9.4.11-A}$$

Wir nutzen dies mehrfach. Die Mengen

$$M_j = M \setminus \bigcup_{i : i \neq j} U_i \subseteq U_j \tag{9.4.11-B}$$

[8] August Ferdinand Möbius, 1790–1868

sind ebenso kompakt, es gilt also $\operatorname{dist}(M_j, \mathbb{R}^n \setminus U_j) = 2\delta_j > 0$. Sei $\delta = \min_j \delta_j$. Die Mengen $M_j^\delta = \bigcup_{x \in M_j} \overline{B_\delta(x)}$ (die abgeschlossenen δ-Umgebungen der Teilstücke M_j) sind ebenso kompakt und wir können diese mit endlich vielen Kugeln vom Radius $\delta/2$ überdecken. Wir finden also offene Kugeln V_i mit

$$M = \bigcup M_j \subseteq \bigcup V_i, \tag{9.4.11-C}$$

so dass zu jeder Kugel V_i ein j existiert mit $V_i \subset U_j$. Wir führen Indexmengen ein, um letzteres genauer zu beschreiben. Es sei

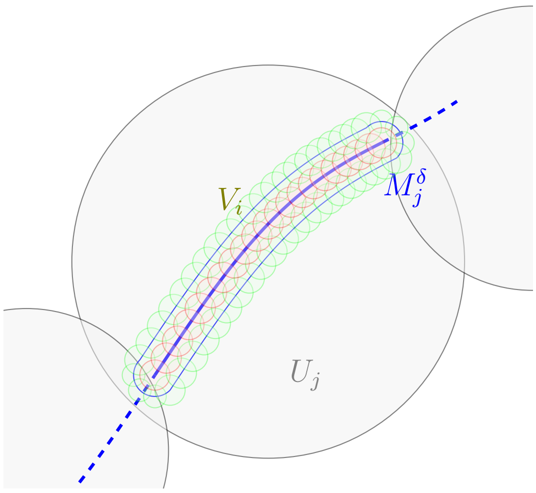
$$\mathcal{K}_j = \{i \mid V_i \cap M_j \neq \varnothing\}, \qquad \mathcal{L}_j = \{i \mid V_i \subseteq U_j\}, \tag{9.4.11-D}$$

sowie

$$\mathcal{K} = \bigcup \mathcal{K}_j, \qquad \mathcal{L} = \bigcup \mathcal{L}_j. \tag{9.4.11-E}$$

Offenbar gilt $\mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{L}_j$. Wir modifizieren diese Mengen noch leicht und machen dazu die $\mathcal{K}_j$ disjunkt. Kugeln V_i die in mehreren der U_j enthalten sind vervielfältigen wir entsprechend und zählen sie in jedem $\mathcal{K}_j$ und $\mathcal{L}_j$ nur einmal, es sind dann $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \varnothing$. Nach Konstruktion gilt aber auch

$$\overline{\bigcup_{i \in \mathcal{K}_j} V_i} \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{L}} V_i \subseteq U_j. \tag{9.4.11-F}$$



Wir nutzen diese Mengen, um die Funktionen χ_j explizit anzugeben. Für jede Kugel $V = B_{\delta/2}(\tilde{x})$ für $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ ist die über den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^n$ definierte Funktion

$$\rho_V(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{4|x-\tilde{x}|^2 - \delta^2}\right), & |x - \tilde{x}| < \delta/2, \\ 0, & |x - \tilde{x}| \geq \delta/2, \end{cases} \tag{9.4.11-G}$$

beliebig oft differenzierbar, nichtnegativ und auf der offenen Kugel V strikt positiv. Die Funktionen

$$\chi_j(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in \mathcal{K}_j} \rho_{V_i}(x)}{\sum_{i \in \mathcal{L}} \rho_{V_i}(x)}, & x \in \bigcup_{i \in \mathcal{K}_j} V_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{9.4.11-H}$$

sind damit nach Konstruktion beliebig oft differenzierbar (da wir den Quotienten nur nur einer Mengen berechnen, auf der der Nenner strikt positiv ist, und der Zähler allein schon eine beliebig oft differenzierbare und auf $\bigcup_{i\in\mathcal{K}_j} V_i$ getragene Funktion darstellt) und ebenso in $\bigcup_{i\in\mathcal{K}_j} V_i \subseteq U_j$ getragen. Weiter gilt

$$\sum_j \chi_j(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{i\in\mathcal{K}} \rho_{V_i}(x)}{\sum_{i\in\mathcal{L}} \rho_{V_i}(x)}, & x \in \bigcup_{i\in\mathcal{K}} V_i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{9.4.11-I}$$

Da für $x \in M$ im Nenner nur die Summanden mit $i \in \mathcal{K}$ von Null verschieden sind, folgt $\sum_j \chi_j(x) = 1$ für alle $x \in M$. Genau das war zu zeigen. □

✍ **9.4.12 Definition.** *Sei $\omega \in \boldsymbol{\Omega}^m(U)$ und $M \Subset U$ eine orientierte kompakte Mannigfaltigkeit. Seien weiter $\varphi_j : \Phi_j \to M \cap U_j$ Parametrisierungen und χ_j eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann definieren wir*

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^N \int_{\Phi_j} \varphi_j^*(\chi_j \omega). \tag{9.4.12-A}$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung (solange die Orientierung erhalten bleibt) und von der Wahl der Zerlegung der Eins.

✂ **Ergänzung.** Zerlegungen der Eins können auch allgemeiner für nicht endliche Überdeckungen konstruiert werden. Dazu genügt es, dass die Überdeckung lokal endlich ist, für jedes $x \in M$ also nur endlich viele j mit $x \in U_j$ existieren. Für uns genügt obige Fassung des Lemmas.

Für die wirkliche Berechnung eines Integrals ist die Nutzung einer Zerlegung der Eins zu kompliziert. Hier geht man einfacher vor und zerschneidet M in Teilstücke, die dann berandete Mannigfaltigkeiten sind, und integriert über diese. Sind die Teilstücke in einem Koordinatengebiet U_j enthalten, so genügt die Integration über das Gebiet Φ_j in $\mathbb{R}^m$.

9.4.13 (Mannigfaltigkeiten mit Rand)**.** Für die Formulierung von Integralsätzen sind berandete Mannigfaltigkeiten notwendig. Diese kann man entweder (im Fall glatter Ränder) so definieren, dass Kartenabbildungen φ auf Teilmengen des Halbraumes $\mathbb{R}^m_+ = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \xi_m > 0\}$ definiert sind. Dann sind Einschränkungen der Karten auf $\mathbb{R}^{m-1}$ gerade Karten des Randes verstanden als Mannigfaltigkeit der Dimension $m-1$.

Für unsere Zwecke ist eine alternative Vorgehensweise sinnvoll. Wir definieren orientierte berandete Mannigfaltigkeiten rekursiv über die Dimension des Randes. Für orientierte Gebiete in der Ebene sind Ränder orientierte Kurven und zumindest für Normalbereiche erhalten wir die Randparametrisierung direkt aus der Definition.

Wir bezeichnen eine Teilmenge Σ einer orientierten Mannigfaltigkeit M als Mannigfaltigkeit *mit Rand* oder kurz als stückweise glatt *berandete Mannigfaltigkeit*, falls für jede ihrer konsistent orientierten Karten

$$\varphi_j^{-1}[\Sigma \cap U_j] = G_j \cap \varphi_j^{-1}[M \cap U_j] \subset \Phi_j \tag{9.4.13-A}$$

mit einem (gutartigen) stückweise glatt berandetem orientierten Gebiet G_j im $\mathbb{R}^m$ gilt.

Wir integrieren $\omega \in \boldsymbol{\Omega}^m(U)$ über Σ, indem wir wiederum mit einer Zerlegung der Eins

$$\int_\Sigma \omega := \sum_{j=1}^N \int_{G_j} \varphi_j^*(\chi_j \omega) \tag{9.4.13-B}$$

definieren. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung und von der Wahl der Zerlegung der Eins.

Die Unabhängigkeit von der Parametrisierung ergibt sich wiederum aus einem Transformationssatz, den wir wie im ebenen Fall aus einem Integralsatz folgern wollen. Dazu verfahren wir induktiv über die Dimension. Wir geben nur die entscheidenden Sätze an und ihre Beweise an.

☞ **9.4.14 Satz** (Integralsatz von Stokes – Version für Gebiete). *Sei $G \Subset U$ ein (gutartiges) stückweise glatt berandetes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und sei $\omega \in \mathbf{\Omega}^{n-1}(U)$. Dann gilt*

$$\int_G \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial G} \omega. \tag{9.4.14-A}$$

Beweisskizze. Wir zerschneiden G wiederum in Normalbereiche bezüglich beliebiger Reihenfolgen der Koordinaten und verfahren analog zu den Beweisen in zwei und drei Dimensionen. Dabei ergeben sich gerade Randintegrale in den vom Normalbereich mitgelieferten Randparametrisierungen. □

☞ **9.4.15 Satz** (Transformationsformel). *Sei $\omega \in \mathbf{\Omega}^n(U)$ für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : \tilde{U} \to U$ ein C^2-Diffeomorphismus. Dann gilt für jedes (gutartige) stückweise glatt berandete Gebiet $G \Subset \tilde{U}$ innerhalb von $\tilde{U}$*

$$\int_{\varphi[G]} \omega = \int_G \varphi^* \omega. \tag{9.4.15-A}$$

Beweis. Wir nutzen eine Abschneidefunktion, um ω außerhalb G so zu verändern, dass es auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden kann. Dann impliziert das Poincare-Lemma aus Satz 9.4.7 die Existenz einer Differentialform $\alpha \in \mathbf{\Omega}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{d}\alpha = \omega$ in einer Umgebung von G und es folgt aus der Transformationsformel in Dimension $n-1$

$$\int_{\varphi[G]} \omega = \int_{\varphi[G]} \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial\varphi[G]} \alpha = \int_{\varphi[\partial G]} \alpha = \int_{\partial G} \varphi^*\alpha = \int_G \mathrm{d}(\varphi^*\alpha) = \int_G \varphi^*\omega. \tag{9.4.15-B}$$

□

Die Regularität kann wieder auf C^1-Diffeomorphismen und Formen mit stetigen Koeffizienten verbessert werden. Dazu nutzt man das schon in der Ebene diskutierte Glättungsargument. Dies erlaubt es uns, den Integralsatz von Stokes auch direkt für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ zu formulieren. Zum Beweis genügt es, Satz 9.4.14 für jede der konsistent orienteren Parametrisierungen einzeln anzuwenden.

☞ **9.4.16 Satz** (Integralsatz von Stokes – Version für Mannigfaltigkeiten). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Sigma \Subset U$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit der Dimension m mit stückweise glattem Rand $\partial\Sigma$. Sei weiter $\omega \in \mathbf{\Omega}^{m-1}(U)$ eine Differentialform vom Grad $m-1$. Dann gilt*

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial\Sigma} \omega. \tag{9.4.16-A}$$

Beweis. Seien $\varphi_j : G_j \cap \Phi_j \mapsto \Sigma \cap U_j$ die Parametrisierungen und sei χ_j eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{d}\omega &= \sum_j \int_{G_j} \varphi_j^*(\chi_j \,\mathrm{d}\omega) = \sum_j \int_{G_j} \varphi_j^* \,\mathrm{d}(\chi_j\omega) - \sum_j \int_{G_j} \varphi_j^*(\,\mathrm{d}\chi_j \wedge\omega) \\ &= \sum_j \int_{\partial G_j} \varphi_j^*(\chi_j\omega) - \sum_j \int_{G_j} \varphi_j^*(\,\mathrm{d}\chi_j \wedge\omega) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \omega - \int_\Sigma (\sum_j \,\mathrm{d}\chi_j) \wedge\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega\end{aligned} \tag{9.4.16-B}$$

da auf Σ nach Konstruktion $\sum_j \,\mathrm{d}\chi_j = \,\mathrm{d}\sum_j \chi_j = \,\mathrm{d}1 = 0$ gilt. □

9.5 Die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis

Zwischen Differentialformen und Vektorfeldern kann man bei Vorliegen eines Skalarproduktes direkt übersetzen. Dies holen wir für die Dimensionen zwei und drei nach und erhalten damit neue Einsichten in die Integralsätze. Während der allgemeine Satz von Stokes für alle Dimensionen gleich aussieht, ergeben sich bei geeigneter Neuinterpretation von der Dimension abhängende Formulierungen als Sätze über Vektorfelder.

9.5.1 (Situation in drei Dimensionen). Fixiert man auf dem $\mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, so liefert dies eine Bijektion zwischen Vektorfeldern $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ und Differentialformen $\mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^3)$. Bezeichnen wir diese als $\kappa : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^3)$

$$\langle\kappa(\mathbf{v}), h\rangle = (\mathbf{v}, h), \qquad h \in \mathbb{R}^3, \tag{9.5.1-A}$$

so entspricht dem Differential $\mathrm{d}f$ einer Funktion gerade der *Gradient* der Funktion

$$\kappa(\operatorname{grad} f) = \,\mathrm{d}f. \tag{9.5.1-B}$$

Bezeichnet man die Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ bezüglich einer zugeordneten (orientierten) Orthonormalbasis $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ mit x, y und z, so gilt $\kappa(\mathbf{e}_x) = \,\mathrm{d}x$, $\kappa(\mathbf{e}_y) = \,\mathrm{d}y$ und $\kappa(\mathbf{e}_z) = \,\mathrm{d}z$. Weiter bestimmt die Volumenform $\mathrm{vol} := \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ eine Bijektion

$$\cdot\,\mathrm{vol} : \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \ni f \longmapsto f \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \in \mathbf{\Omega}^3(\mathbb{R}^3) \tag{9.5.1-C}$$

durch Multiplikation und das Einsetzen eines Vektorfeldes als erstes Argument in die Volumenform $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ eine Bijektion $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \mathbf{\Omega}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\smile \mathrm{vol} : \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \longmapsto v_1 \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - v_2 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + v_3 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \mathbf{\Omega}^2(\mathbb{R}^3). \tag{9.5.1-D}$$

Dabei gilt also $\mathbf{e}_x \smile (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\mathbf{e}_y \smile (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ und $\mathbf{e}_z \smile (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Zusammen mit dem der äußeren Ableitung d auf Formen ergibt sich damit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \boldsymbol{\Omega}^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \boldsymbol{\Omega}^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \boldsymbol{\Omega}^3(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & & & \Big\| & & \Big\uparrow{\scriptstyle\kappa} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\smile\mathrm{vol}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\cdot\,\mathrm{vol}} & & \\
 & & & & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3) & &
\end{array}$$

mit entsprechenden noch zu berechnenden Abbildungen in der unteren Zeile.

Da wir Vektorfelder damit sowohl mit Formen aus $\boldsymbol{\Omega}^1(\mathbb{R}^3)$ als auch mit Formen aus $\boldsymbol{\Omega}^2(\mathbb{R}^3)$ identifiziert haben, bestimmen diese Identifikationen insbesondere eine Bijektion

$$\bigstar : \boldsymbol{\Omega}^1(\mathbb{R}^3) \to \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbb{R}^3). \qquad (9.5.1\text{-E})$$

Diese ist charakterisiert durch $\bigstar(\mathrm{d}x) = \mathbf{e}_x \smile (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ und entsprechend $\bigstar(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ sowie $\bigstar(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Zusammen mit der durch $\cdot\,\mathrm{vol}$ gegebenen Bijektion $\bigstar : \boldsymbol{\Omega}^0(\mathbb{R}^3) \to \boldsymbol{\Omega}^3(\mathbb{R}^3)$ erhalten wir damit die Hodge[9]-$\bigstar$-Operatoren auf Differentialformen. Diese sind auch allgemeiner im $\mathbb{R}^n$ oder auf Mannigfaltigkeiten durch das Fixieren eines (lokalen) Skalarprodukts definierbar.

Die sich ergebende Abbildung rot wird als *Rotation* und div als *Divergenz* bezeichnet. Wir geben Gradient, Rotation und Divergenz noch direkt in kartesischen Koordinaten an. Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix}, \qquad (9.5.1\text{-F})$$

ebenso impliziert

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z) \\ &\quad = (\partial_y v_3 - \partial_z v_2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\partial_x v_3 - \partial_z v_1)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + (\partial_x v_2 - \partial_y v_1)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{aligned} \qquad (9.5.1\text{-G})$$

die Darstellung der Rotation

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{bmatrix}. \qquad (9.5.1\text{-H})$$

Weiter impliziert

$$\mathrm{d}(v_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - v_2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + v_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = (\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \qquad (9.5.1\text{-I})$$

für die Divergenz den Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3. \qquad (9.5.1\text{-J})$$

9.5.2. Integralsätze sind ebenso direkt umformulierbar. Es gelten im Dreidimensionalen für das Kurvenintegral eines Gradienten

$$\int_\Gamma \operatorname{grad} f \bullet \vec{\mathrm{d}s} := \int_\Gamma \kappa(\operatorname{grad} f) = \int_a^b \big(\operatorname{grad} f, \dot{\gamma}(t) \big)\,\mathrm{d}t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \qquad (9.5.2\text{-A})$$

[9] Sir William Vallance Douglas Hodge, 1903–1975

entlang der durch eine differenzierbare Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrisierten Kurve Γ. Darüberhinaus gilt der Integralsatz von Stokes

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{v} \bullet \mathrm{d}\vec{A} := \int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{v} \smile \mathrm{vol} = \int_{\partial\Sigma} \kappa(\mathbf{v}) = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{v} \bullet \mathrm{d}\vec{s} \tag{9.5.2-B}$$

für jede glatt berandete orientierte Fläche Σ und der Integralsatz von Gauss

$$\int_G \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}V := \int_G \operatorname{div}\mathbf{v} \cdot \mathrm{vol} = \int_{\partial G} \mathbf{v} \smile \mathrm{vol} = \int_{\partial G} \mathbf{v} \bullet \mathrm{d}\vec{A} \tag{9.5.2-C}$$

für jedes stückweise glatt berandete Gebiet G. Man beachte, dass diese Schreibweisen $\mathrm{d}\vec{s}$ für ein vektorielles Linienelement, $\mathrm{d}\vec{A}$ für ein vektorielles Flächenelement und $\mathrm{d}V$ für ein Volumenelement inkonsistent sind und keine Differentiale darstellen.

9.5.3 (Situation in zwei Dimensionen)**.** Im Zweidimensionalen tritt der Sonderfall ein, dass es zwei verschiedene sinnvolle Identifikationen $\mathcal{X}(\mathbb{R}^2) \to \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^2)$ gibt. Einerseits liefert das Einsetzen eines Vektorfeldes in ein gegebenes Skalarprodukt wiederum die Bijektion κ und das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbf{\Omega}^0(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathbf{\Omega}^2(\mathbb{R}^2) \arrow[r] & \{0\} \\
& & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \mathcal{X}(\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\kappa"'] \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\cdot\,\mathrm{vol}"'] &
\end{tikzcd}$$

bestimmt neben dem Gradienten einen weiteren Operator rot und den Integralsatz

$$\int_G \operatorname{rot}\mathbf{v}\,\mathrm{d}A := \int_G \operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathrm{vol} = \int_{\partial G} \kappa(\mathbf{v}) = \int_{\partial G} \mathbf{v} \bullet \mathrm{d}\vec{s}, \tag{9.5.3-A}$$

bei dessen Randintegral die Tangentialkomponente des Vektorfeldes entlang der Randkurve zu integrieren ist. Dieser Satz entspricht dem schon angegebenen Integralsatz 9.2.7 von Green. Andererseits bestimmt das Einsetzen in die Volumenform über

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbf{\Omega}^0(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathbf{\Omega}^2(\mathbb{R}^2) \arrow[r] & \{0\} \\
& & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathcal{X}(\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\smile\mathrm{vol}"'] \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\cdot\,\mathrm{vol}"'] &
\end{tikzcd}$$

einen Operator div, für den ebenso ein passender Integralsatz aufgeschrieben werden kann. Der ebene Integralsatz von Gauss lautet

$$\int_G \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}A := \int_G \operatorname{div}\mathbf{v} \cdot \mathrm{vol} = \int_{\partial G} \mathbf{v} \smile \mathrm{vol} = \int_{\partial G} \mathbf{v} \bullet \mathrm{d}\vec{s}^{\perp} \tag{9.5.3-B}$$

und es ist am Rand die nach außen gerichtete Normalenkomponente des Vektorfeldes zu integrieren.

9.5.4 (Längen und Flächen). Kurvenlängen und Flächeninhalte lassen sich ebenso als Integrale ausdrücken. Wiederum wird ein Skalarprodukt benötigt und die Integranden hängen von der Kurve beziehungsweise dem Flächenstück ab. Kurvenlängen haben wir schon in Kapitel 7 gesehen. Für eine glatt parametrisierte Kurve Γ mit Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$\mathscr{L}(\Gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma \mathbf{n}_1 \smile \mathrm{vol} \tag{9.5.4-A}$$

mit einem auf $\dot\gamma(t)$ senkrecht stehenden Normalenvektor $\mathbf{n}_1$ in $\gamma(t)$, so dass dieser nach rechts (bezüglich der Richtung von $\dot\gamma(t)$) zeigt. Für Kurven im $\mathbb{R}^3$ gilt entsprechend

$$\mathscr{L}(\Gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma \mathbf{n}_2 \smile (\mathbf{n}_1 \smile \mathrm{vol}) \tag{9.5.4-B}$$

unter der Annahme, dass $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ normiert sind und zusammen mit $\dot\gamma(t)$ im Kurvenpunkt $\gamma(t)$ ein Rechstssystem bilden.

Einer orientierten Fläche Σ im $\mathbb{R}^3$ kann ein Flächeninhalt zugeordnet werden. Dazu bezeichnen wir in jedem Flächenpunkt von Σ durch $\mathbf{n}_+$ einen auf der orientierten Fläche senkrecht stehenden Einheitsvektor. Dann liefert

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \int_\Sigma \mathbf{n}_+ \smile \mathrm{vol} \tag{9.5.4-C}$$

den Flächeninhalt von Σ.

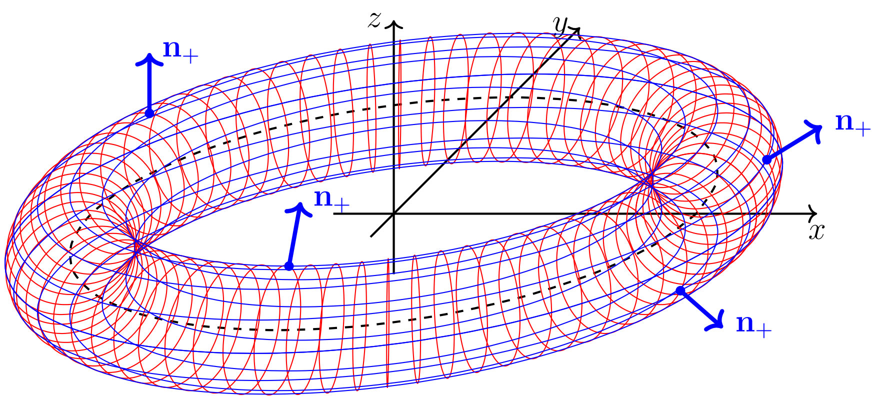
⚒ **9.5.5 Beispiel.** Um die Oberfläche eines durch

$$\varphi : \Phi \ni (\theta,\psi) \mapsto \begin{bmatrix} R\cos\theta + r\cos\theta\cos\psi \\ R\sin\theta + r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{9.5.5-A}$$

durch $\Phi = [0,2\pi)^2$ parametrisierten Torus $\mathbb{T}$ mit Radien R und r zu berechnen, benötigen wir den äußeren Normalenvektor $\mathbf{n}_+$ im Punkt $\varphi(\theta,\psi)$. Dieser ist durch

$$\mathbf{n}_+ = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} \tag{9.5.5-B}$$

gegeben.



Torus $\mathbb{T}$ mit Koordinatenlinien $\theta = \mathrm{const}$ und $\psi = \mathrm{const}$ und äußeren Normalenvektoren $\mathbf{n}_+$

Eingesetzt in die Volumenform $\mathrm{vol} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ liefert dies zusammen mit

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathrm{d}x) &= -(R\sin\theta + r\sin\theta\cos\psi)\,\mathrm{d}\theta - r\cos\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\\ \varphi^*(\mathrm{d}y) &= (R\cos\theta + r\cos\theta\cos\psi)\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\\ \varphi^*(\mathrm{d}z) &= r\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\end{aligned} \tag{9.5.5-C}$$

und damit

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) &= \big((R\cos\theta + r\cos\theta\cos\psi)\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\big)\wedge\big(r\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\big)\\ &= \big(Rr\cos\theta\cos\psi + r^2\cos\theta\cos^2\psi\big)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\\ \varphi^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z) &= \big(-(R\sin\theta + r\sin\theta\cos\psi)\,\mathrm{d}\theta - r\cos\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\big)\wedge\big(r\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\big)\\ &= -\big(Rr\sin\theta\cos\psi + r^2\sin\theta\cos^2\psi\big)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\\ \varphi^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) &= \big(-(R\sin\theta + r\sin\theta\cos\psi)\,\mathrm{d}\theta - r\cos\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\big)\\ &\qquad\wedge\big((R\cos\theta + r\cos\theta\cos\psi)\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\big)\\ &= \big(Rr\sin^2\theta\sin\psi + r^2\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi\\ &\qquad + Rr\cos^2\theta\sin\psi + r^2\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi\big)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\\ &= \big(Rr\sin\psi + r^2\sin\psi\cos\psi\big)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\end{aligned} \tag{9.5.5-D}$$

die zu integrierende Differentialform

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathbf{n}_+ \smile \mathrm{vol}) &= \varphi^*(\mathbf{n}_+ \smile\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)\\ &= \cos\theta\cos\psi\ \varphi^*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) - \sin\theta\cos\psi\ \varphi^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z) + \sin\psi\ \varphi^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\ &= \Big(\cos\theta\cos\psi\big(Rr\cos\theta\cos\psi + r^2\cos\theta\cos^2\psi\big)\\ &\qquad + \sin\theta\cos\psi\big(Rr\sin\theta\cos\psi + r^2\sin\theta\cos^2\psi\big)\\ &\qquad + \sin\psi\big(Rr\sin\psi + r^2\sin\psi\cos\psi\big)\Big)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\\ &= \big(Rr + r^2\cos\psi\big)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi.\end{aligned} \tag{9.5.5-E}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathbb{T}) &= \int_{\mathbb{T}} \mathbf{n}_+ \smile \mathrm{vol} = \int_{\Phi} \big(Rr + r^2\cos\psi\big)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(Rr + r^2\cos\psi\big)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta\\ &= 4\pi^2 rR.\end{aligned} \tag{9.5.5-F}$$

✂ **Ergänzung.** Die Rechnung lässt sich abkürzen, dazu zeigen wir eine Flächeninhaltsformel. Ist

$$\varphi : \Phi \ni (\xi,\eta) \mapsto \begin{bmatrix} x(\xi,\eta)\\ y(\xi,\eta)\\ z(\xi,\eta)\end{bmatrix} \in \Sigma \tag{9.5.5-G}$$

stetig differenzierbare immersive Parametrisierung eines glatten Flächenstücks Σ, so gilt

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) &= (\partial_\xi y\partial_\eta z - \partial_\xi z\partial_\eta y)\,\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta\\ \varphi^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z) &= (\partial_\xi x\partial_\eta z - \partial_\xi z\partial_\eta x)\,\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta\\ \varphi^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) &= (\partial_\xi x\partial_\eta y - \partial_\xi y\partial_\eta x)\,\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{9.5.5-H}$$

Weiter liefert

$$\mathbf{n}(\varphi(\xi,\eta)) = \partial_\xi\varphi(\xi,\eta) \times \partial_\eta\varphi(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \partial_\xi y \partial_\eta z - \partial_\xi z \partial_\eta y \\ \partial_\xi z \partial_\eta x - \partial_\xi x \partial_\eta z \\ \partial_\xi x \partial_\eta y - \partial_\xi y \partial_\eta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(\varphi(\xi,\eta)) \\ \mathbf{n}_2(\varphi(\xi,\eta)) \\ \mathbf{n}_3(\varphi(\xi,\eta)) \end{bmatrix} \tag{9.5.5-I}$$

einen (nicht normierten) Normalenvektor auf Σ, der eingesetzt in die Volumenform vol als Pullback

$$\begin{aligned} \varphi^*(\mathbf{n} \smile \mathrm{vol}) &= \varphi^*(\mathbf{n}_1 \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \mathbf{n}_2 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \mathbf{n}_3 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\ &= \big((\partial_\xi y \partial_\eta z - \partial_\xi z \partial_\eta y)^2 + (\partial_\xi z \partial_\eta x - \partial_\xi x \partial_\eta z)^2 + (\partial_\xi x \partial_\eta y - \partial_\xi y \partial_\eta x)\big)^2 \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta \\ &= |\mathbf{n}(\varphi(\xi,\eta)|^2 \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{9.5.5-J}$$

besitzt. Normieren von $\mathbf{n}$ führt damit auf die Flächeninhaltsformel

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \int_\Sigma \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \smile \mathrm{vol} = \int_\Phi |\mathbf{n}(\varphi(\xi,\eta)| \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta = \int_\Phi |\partial_\xi\varphi \times \partial_\eta\varphi| \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta. \tag{9.5.5-K}$$

Diese haben wir in (9.5.5-F) in Aktion gesehen.

10 Elemente der Variationsrechnung

In diesem Kapitel soll es um einige Themen zu Extremalproblemen gehen, die bisher in den Vorlesungen etwas zu kurz gekommen sind. Das betrifft sowohl Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher mit und ohne Nebenbedingungen als auch Variationsprobleme, bei denen Integrale minimiert oder maximiert werden.

10.1 Extremwertaufgaben

10.1.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann heißt bekanntlich $x_* \in U$ ein lokales Minimum, falls es eine Umgebung $B_\delta(x_*) \subseteq U$ mit

$$f(x) \geq f(x_*) \tag{10.1.1-A}$$

für alle $x \in B_\delta(x_*)$ gibt. Wir haben schon in Kapitel 7 daraus gefolgert, dass dann für jede durch x_* verlaufende differenzierbare Kurve parametrisiert durch

$$x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to B_\delta(x_*) \tag{10.1.1-B}$$

mit $x(0) = x_*$ auch

$$f(x(t)) \geq f(x(0)) = f(x_*) \tag{10.1.1-C}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t))\Big|_{t=0} = 0 \tag{10.1.1-D}$$

gelten muss. Letzteres ist natürlich einfach berechenbar. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} f)(x(0))\, \dot{x}_j(0) = \langle\, \mathrm{d}f(x_*), \dot{x}\rangle = 0. \tag{10.1.1-E}$$

Dabei ist $\dot{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ beliebig (da die Aussage ja für jede differenzierbare Kurve durch x_* gelten soll) und es folgt das *notwendige Kriterium*

$$\mathrm{d}f(x_*) = 0 \tag{10.1.1-F}$$

für ein lokales Minimum der Funktion f im Punkt x_*. Das Kriterium ist sicher nicht hinreichend, da es ebenso für lokale Maxima von f und weitere *kritische Punkte* erfüllt ist.

10.1.2. Wir wollen im weiteren Verlauf Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen betrachten. Wir nehmen also an, dass wir nach Minima oder Maxima einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ nicht auf U sondern nur auf einer in U verlaufenden Untermannigfaltigkeit M der Dimension $m < n$ suchen. Dazu gibt es prinzipiell zwei verschiedene Herangehensweisen. Ist M lokal durch Parametrisierungen

$$\varphi_j : \mathbb{R}^m \supseteq \Phi_j \ni \xi \longmapsto x \in M \cap U_j \tag{10.1.2-A}$$

charakterisiert, so besitzt f in $x_* \in M \cap U_j$ genau dann ein lokales Minimum, wenn

$$\forall_{x \in B_\delta(x_*) \cap M} \quad f(x) \geq f(x_*) \tag{10.1.2-B}$$

gilt. Einsetzen der Parametrisierung macht daraus

$$\forall_{\xi \in B_{\tilde{\delta}}(\xi_*)} \quad f(\varphi_j(\xi)) \geq f(\varphi_j(\xi_*)) \tag{10.1.2-C}$$

mit $x_* = \varphi_j(\xi_*)$ und einem hinreichend klein gewählten $\tilde{\delta} > 0$ und wir suchen nach lokalen Minima der Funktionen $f \circ \varphi_j$ für die lokalen Parametrisierungen φ_j. Dies geschieht natürlich wiederum durch Ableiten, es ergeben sich als notwendige Bedingungen

$$\mathrm{d}(f \circ \varphi_j) = \varphi_j^*(\,\mathrm{d}f) = 0. \tag{10.1.2-D}$$

Dabei ist $\mathrm{d}(f \circ \varphi_j) = 0$ (für ein j und bei bekannten Parametrisierungen φ_j) eine einfach zu berechnende Gleichung zur Bestimmung kritischer Punkte.

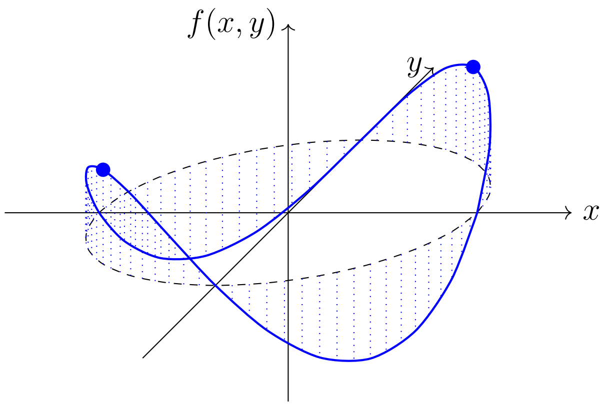
⚒ **10.1.3 Beispiel.** Um das Maximum von $f(x, y) = xy$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ zu bestimmen, genügt es natürlich eine Parametrisierung $x = \cos t$, $y = \sin t$ für $t \in \mathbb{R}$ einzusetzen. Dann ist

$$t \mapsto f(\cos t, \sin t) = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t) \tag{10.1.3-A}$$

zu maximieren. Das Maximum tritt also bei $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ein, was auf die Punkte

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{10.1.3-B}$$

führt.



10.1.4. Die Gleichung (10.1.2-D) besitzt eine natürliche geometrische Interpretation, alle an M im Punkt x_* tangentialen Vektoren müssen im Nullraum von $\mathrm{d}f$ liegen. Dies kann auch genutzt werden, wenn M nicht durch lokale Parametrisierungen sondern über den Satz über die implizite Funktion durch eine Gleichung

$$M = \{x \in U \mid F(x) = 0\} \tag{10.1.4-A}$$

für eine Funktion $F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ gegeben ist. Dazu muss 0 ein regulärer Wert von F sein, also für alle $x \in M$ die Bedingung

$$\operatorname{rank} F'(x) = n - m \tag{10.1.4-B}$$

erfüllt sein. Da die Jacobimatrix $F'(x) \in \mathbb{R}^{(n-m)\times n}$ damit maximalen Rang besitzen muss, sind die Zeilen linear unabhängig. Bezeichnet man die Komponenten des Vektors $F(x)$ mit $F_j(x)$, so sind damit im Punkt x die Differentiale

$$\mathrm{d}F_1(x), \dots, \mathrm{d}F_{n-m}(x) \tag{10.1.4-C}$$

linear unabhängig. Da jeder an $x \in M$ tangentiale Vektor von der Form $\varphi_j'(\xi)\eta$, $\eta \in \mathbb{R}^m$, für eine lokale Parametrisierung $\varphi_j : \mathbb{R}^m \supseteq \Phi_j \to M \cap U_j$ ist, impliziert

$$F(\varphi_j((\xi)) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F'(\varphi_j(\xi))\varphi_j'(\xi) = 0 \tag{10.1.4-D}$$

dass solche tangentialen Vektoren in $\ker \mathrm{d}F_j(x)$ für $j = 1, \dots, n-m$ liegen. Zusammen mit den durch die Parametrisierung gegebenen Differentialen $\mathrm{d}\xi_1, \dots \mathrm{d}\xi_m$ bilden $\mathrm{d}F_1(x), \dots, \mathrm{d}F_{n-m}(x)$ damit lokal eine Basis von $(\mathbb{R}^n)'$. Wir können damit also $\mathrm{d}f(x)$ für $x \in M$ als Linearkombination

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\partial}_{\xi_j} f \,\mathrm{d}\xi_j + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \,\mathrm{d}F_j(x) \tag{10.1.4-E}$$

schreiben. Bedingung (10.1.2-D) für kritische Punkte besagt nun, dass

$$\varphi_j^*(\mathrm{d}f) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\partial}_{\xi_j} f \,\mathrm{d}\xi_j = 0 \tag{10.1.4-F}$$

gilt. Um das ohne die Parametrisierung aufzuschreiben, stellen wir zuerst fest, dass

$$\mathrm{d}f(x) - \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \,\mathrm{d}F_j(x) \tag{10.1.4-G}$$

Differential der Funktion

$$x \mapsto f(x) - \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j F_j(x) = f(x) - \lambda^\top F(x) \tag{10.1.4-H}$$

mit einem zusätzlichen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m}$ ist. Betrachtet man den Parameter ebenso als variabel, betrachtet also die Hilfsfunktion

$$U \times \mathbb{R}^{n-m} \ni (x, \lambda) \mapsto f(x) - \lambda^\top F(x) \in \mathbb{R}, \tag{10.1.4-I}$$

so ergibt sich als Differential

$$\mathrm{d}f(x) - \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \,\mathrm{d}F_j(x) - \sum_{j=1}^{n-m} F_j(x)\,\mathrm{d}\lambda_j. \tag{10.1.4-J}$$

Ist $x_* \in M$ ein lokales Minimum, so folgt aus (10.1.**4-F**) zusammen mit $F_j(x_*) = 0$, dass dieses Differential in x_* verschwindet. Umgekehrt impliziert das Verschwinden dieses Differentials sowohl $x \in M$ als auch Bedingung (10.1.**4-F**).

Die durch

$$\mathrm{d}f(x_*) - \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \,\mathrm{d}F_j(x_*) - \sum_{j=1}^{n-m} F_j(x_*)\,\mathrm{d}\lambda_j = 0 \tag{10.1.4-K}$$

eindeutig bestimmten Parameter λ_j werden als *Lagrangemultiplikatoren* und die Hilfsfunktion (10.1.**4-I**) als *Lagrangefunktion* bezeichnet. Das Einführen der Lagrangefunktion erspart das explizite Auflösen der Nebenbedingungen zu einer Parametrisierung der Mannigfaltigkeit M.

☞ **10.1.5 Satz** (Notwendiges Extremalkriterium unter Nebenbedingungen)**.** *Sei $F : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^{n-m}$ stetig differenzierbar, U offen und 0 ein regulärer Wert von F. Sei weiter M implizit gegeben als $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist dann $x_* \in M$ ein lokales Extremum von f, gilt also*

$$\text{(lokales Maximum)} \qquad \forall_{x\in M\cap B_\varepsilon(x_*)} \quad f(x) \le f(x_*) \tag{10.1.5-A}$$

oder

$$\text{(lokales Minimum)} \qquad \forall_{x\in M\cap B_\varepsilon(x_*)} \quad f(x) \ge f(x_*) \tag{10.1.5-B}$$

für ein $\varepsilon > 0$, so gilt für die Ableitung der Hilfsfunktion

$$H : U \times \mathbb{R}^{n-m} \ni (x, \lambda) \mapsto f(x) - \lambda^\top F(x) \in \mathbb{R} \tag{10.1.5-C}$$

die Gleichung

$$H'(x_*, \lambda_*) = 0 \tag{10.1.5-D}$$

mit einem dadurch eindeutig bestimmten $\lambda_* \in \mathbb{R}^{n-m}$.

⚒ **10.1.6 Beispiel.** Wir betrachten dazu ein Beispiel und suchen die Maxima der Funktion

$$f(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \tag{10.1.6-A}$$

zu gegebenem $a > b > c > 0$ auf der Einheitssphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Da die Einheitssphäre kompakt und die angegebene Funktion stetig ist, gibt es Maximal- und Minimalstellen. Diese müssen das notwendige Kriterium erfüllen und wir erhalten ein Verfahren zur Bestimmung potentieller Extremstellen (kritischer Punkte). Da 1 regulärer Wert von $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ist, bilden wir die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} H(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda\big(1 - F(x, y, z)\big) \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 - \lambda\big(1 - (x^2 + y^2 + z^2)\big) \end{aligned} \tag{10.1.6-B}$$

und erhalten durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\lambda H(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \\ 0 &= \partial_x H(x,y,z,\lambda) = 2a^2x - 4ax(ax^2+by^2+cz^2) + 2\lambda x, \\ 0 &= \partial_y H(x,y,z,\lambda) = 2b^2y - 4by(ax^2+by^2+cz^2) + 2\lambda y, \\ 0 &= \partial_z H(x,y,z,\lambda) = 2c^2z - 4cz(ax^2+by^2+cz^2) + 2\lambda z \end{aligned} \tag{10.1.6-C}$$

und damit neben $x^2+y^2+z^2=1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} x\big((a^2+\lambda) - 2a(ax^2+by^2+cz^2)\big) &= 0, \\ y\big((b^2+\lambda) - 2b(ax^2+by^2+cz^2)\big) &= 0, \\ z\big((c^2+\lambda) - 2c(ax^2+by^2+cz^2)\big) &= 0. \end{aligned} \tag{10.1.6-D}$$

Sind zwei der Koordinaten gleich Null, so ergibt sich

$$(x,y,z) \in \{(0,0,\pm1),(0,\pm1,0),(\pm1,0,0)\} \tag{10.1.6-E}$$

mit dem Funktionswert $f(x,y,z)=0$ und zugehörigen $\lambda \in \{a^2,b^2,c^2\}$. Ist nur eine der Koordinaten (z.B. x) gleich Null, so folgt

$$yz \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (b^2+\lambda) = 2b(by^2+cz^2) \text{ und } (c^2+\lambda) = 2c(by^2+cz^2) \tag{10.1.6-F}$$

und damit nach Subtraktion der Gleichungen

$$2(b-c)(by^2+cz^2) = b^2-c^2 \quad \text{und damit} \quad 2(by^2+cz^2) = b+c. \tag{10.1.6-G}$$

Da ebenso $y^2+z^2=1$ gilt, folgt $2(b-c)y^2+2c=b+c$ und damit $y^2=z^2=\frac{1}{2}$. Durch zyklisches Vertauschen der Variablen sind auch die anderen beiden Fälle berechnet und es ergeben sich die Punkte

$$\begin{aligned} &x=0, \quad y=\pm\frac{\sqrt2}{2}, \quad z=\pm\frac{\sqrt2}{2}, && \text{mit } f\left(0,\pm\frac{\sqrt2}{2},\pm\frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{(b-c)^2}{4}, \\ &x=\pm\frac{\sqrt2}{2}, \quad y=0, \quad z=\pm\frac{\sqrt2}{2}, && \text{mit } f\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},0,\pm\frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{(a-c)^2}{4}, \\ &x=\pm\frac{\sqrt2}{2}, \quad y=\pm\frac{\sqrt2}{2}, \quad z=0, && \text{mit } f\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},\pm\frac{\sqrt2}{2},0\right) = \frac{(a-b)^2}{4}. \end{aligned} \tag{10.1.6-H}$$

Es können nicht alle drei der Koordinaten ungleich Null sein. Die entsprechende Rechnung liefert in diesem Fall die Gleichungen

$$a+b = 2(ax^2+by^2+cz^2), \quad b+c = 2(ax^2+by^2+cz^2), \quad c+a = 2(ax^2+by^2+cz^2) \tag{10.1.6-I}$$

und damit $a+b=b+c=c+a$, also $a=b=c$ im Widerspruch zur Annahme. Die Maximalstellen ergeben sich aus dem größten Funktionswert in (10.1.6-H).

⚒ **10.1.7 Beispiel.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir wollen die lokalen Extremstellen der zugehörigen quadratischen Form $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q_A(x) = x^\top A x \tag{10.1.7-A}$$

auf der euklidischen Einheitssphäre $x^\top x = \sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$ bestimmen. Da die Sphäre ebenso kompakt ist, ergeben sich wiederum alle potentiellen lokalen Extrema aus dem notwendigen Kriterium. Die zugehörige Lagrangefunktion ist durch

$$H(x,\lambda) = x^\top A x - \lambda x^\top x + \lambda \tag{10.1.7-B}$$

gegeben und führt bei partiellem Ableiten nach x zu

$$0 = \partial_x H(x,\lambda) = 2(Ax - \lambda x) \tag{10.1.7-C}$$

und damit zur Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$. Die kritischen Punkte ergeben sich also als Schnitte der Eigenunterräume mit der Sphäre und die zugehörigen Lagrangemultiplikatoren sind die Eigenwerte.

10.2 Variationsprobleme

10.2.1. Wir wollen Extremwertaufgaben auf eine neue Stufe heben und betrachten dazu Variationsprobleme. Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel und fragen nach der Kurve, die eine zwischen zwei Punkten aufgehängte Schnur konstanter Dichte und fixierter Länge unter dem Einfluss der Schwerkraft als Gleichgewichtslage annimmt. Das Problem ist im wesentlichen zweidimensional, wir nehmen an dass die beiden gegebenen Punkte (a_1,b_1), (a_2,b_2) verschiedene x-Koordinaten haben und suchen damit nach einer Kurve

$$\Gamma \quad : \qquad y = f(x), \qquad x \in [a_1,a_2] \tag{10.2.1-A}$$

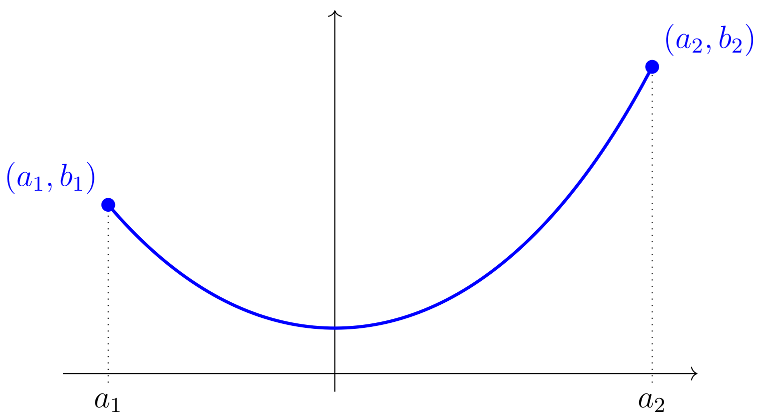
parametrisiert als Graph einer Funktion f. Dabei soll $f(a_1) = b_1$ und $f(a_2) = b_2$) gelten. Die Bedingung konstanter Länge fixiert

$$\mathscr{L}[f] = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = L \tag{10.2.1-B}$$

und wir suchen nach einer differenzierbaren Funktion f auf $[a_1,a_2]$, die die die potentielle Energie

$$\mathscr{E}[f] = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{10.2.1-C}$$

minimiert.



Das ein (nun nicht mehr endlichdimensionales) Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f] &= L = \text{const},\\ \mathscr{E}[f] &\longrightarrow \min\end{aligned} \tag{10.2.1-D}$$

dessen Lösung wir in Beispiel 10.3.3 bestimmen werden.

10.2.2. Als zweites Beispiel betrachten wir Kurven minimaler Länge zwischen zwei Punkten. Wir betrachten dazu wiederum nur differenzierbare Kurven Γ parametrisiert durch $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$. Die zugehörige Kurvenlänge ist durch das Integral

$$\mathscr{L}[x] = \int_0^1 |\dot{x}(t)|\,\mathrm{d}t \tag{10.2.2-A}$$

gegeben. Dabei suchen nun zu zwei vorgegebenen Punkten

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad x(1) = x_1 \in \mathbb{R}^n \tag{10.2.2-B}$$

diejenige Kurve mit $\mathscr{L}[x] \longrightarrow \min$. Da die Länge von Γ und nicht der gewählten Parametrisierung $t \mapsto x(t)$ abhängt, ist der Minimierer nur bis auf Umparametrisierung der Kurve bestimmt. Wir werden die (offensichtliche) Lösung in Beispiel 10.2.6 diskutieren.

Interessanter wird dieses Problem, wenn wir den Minimierer nicht als beliebige Kurve im $\mathbb{R}^n$ sondern innerhalb einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ suchen. Diese könnte zum Beispiel implizit durch eine Gleichung

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\} \tag{10.2.2-C}$$

für eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-n}$ mit 0 als regulärem Wert gegeben sein. Dies ist damit wiederum ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen, wir suchen also eine glatte Kurve Γ parametrisiert durch $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x] &\longrightarrow \min,\\ g(x(t)) &= 0.\end{aligned} \tag{10.2.2-D}$$

Beispiel 10.3.5 diskutiert die Lösung dieses Problems.

Wir beginnen mit einem fundamentalen Lemma.

☞ **10.2.3 Lemma** (Fundamentallemma, Du-Bois-Raymond[1]). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.*

(i) *Gilt für jede stetige Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$*

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{10.2.3-A}$$

so folgt $f(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$.

[1] Emil Heinrich du Bois-Reymond, 1818–1896

(ii) *Gilt für jede stetig differenzierbare Funktion* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit* $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$$\int_a^b f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{10.2.3-B}$$

so folgt $f(t) = \text{const}$ *für* $t \in [a,b]$.

(iii) *Ist* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ebenso stetig und gilt für jede stetig differenzierbare Funktion* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit* $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$$\int_a^b f(t)\varphi'(t) + g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{10.2.3-C}$$

so ist f *stetig differenzierbar und es gilt* $f'(t) = g(t)$ *für alle* $t \in [a,b]$.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind Spezialfälle von (iii), jedoch ist es einfacher, die Aussagen schrittweise zu beweisen.

Beweis zu (i). Da f stetig ist, genügt es, $f(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$ zu zeigen. Angenommen für ein $t \in (a,b)$ gilt $f(t) \neq 0$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(t) > 0$ gilt. Dann gibt es ein Intervall $[t_1,t_2] \subset (a,b)$ mit $f(t) > 0$ auf $[t_1,t_2]$. Betrachtet man nun die Funktion

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-t_1)(t_2-t), & t \in [t_1,t_2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{10.2.3-D}$$

so folgt

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f(t)(t-t_1)(t_2-t)\,\mathrm{d}t > 0. \tag{10.2.3-E}$$

Widerspruch zur Annahme, es gilt also $f(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$.

Beweis zu (ii). Sei

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.2.3-F}$$

Dann gilt für

$$\varphi(t) = \int_a^t \big(f(\tau) - c\big)\,\mathrm{d}\tau \tag{10.2.3-G}$$

nach Wahl von c auch $\varphi(b) = 0 = \varphi(a)$. Damit gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \int_a^b \big(f(t)-c\big)^2\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \big(f(t)-c\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t - c\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big) = 0 \end{aligned} \tag{10.2.3-H}$$

und somit folgt $f(t) = c$ für alle $t \in [a,b]$.

Beweis zu (iii). Wir definieren

$$G(t) = \int_a^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{10.2.3-I}$$

so dass

$$\int_a^b g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b G(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{10.2.3-J}$$

gilt. Also folgt aus (10.2.3-C)

$$\int_a^b \big(f(t) - G(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{10.2.3-K}$$

und damit aus (ii) die Behauptung $f(t) - G(t) = \text{const}$ und damit $f'(t) = g(t)$. □

✂ **Ergänzung.** Die Forderung, dass die Identitäten (10.2.3-A)–(10.2.3-C) für alle stetigen Funktionen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ gelten sollen, ist zu stark. Es genügt, dies für alle beliebig oft differenzierbaren und innerhalb (a,b) kompakt getragenen Funktionen zu fordern.

10.2.4 (Euler–Lagrange-Gleichungen)**.** Wir beginnen mit der einfachsten der Variationsaufgaben. Gesucht ist eine Parametrisierung einer Kurve $x : [0,T] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$, so dass für eine gegebene stetig differenzierbare Funktion

$$F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{10.2.4-A}$$

das Integral

$$\mathscr{F}[x] = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \longrightarrow \min \tag{10.2.4-B}$$

minimal (oder allgemeiner extremal) wird. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, benötigen wir dazu weitere Bedingungen. Dazu betrachten wir entweder die *Randbedingungen*

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad x(T) = x_1 \in \mathbb{R}^n \tag{10.2.4-C}$$

zu gegebenen Punkten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ oder die *Anfangsbedingungen*

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad \dot{x}(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n \tag{10.2.4-D}$$

zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und einer Startgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir beschränken uns vorerst auf den ersten Fall.

Damit $\mathscr{F}[x]$ minimal wird, muss für jede hinreichend kleine *Variation* von x

$$\mathscr{F}[x + \varepsilon\varphi] \geq \mathscr{F}[x] \tag{10.2.4-E}$$

für differenzierbares φ mit $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ gelten. Da die linke Seite nach Voraussetzung in ε differenzierbar ist, folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathscr{F}[x + \varepsilon\varphi]\bigg|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{10.2.4-F}$$

Die Ableitung kann man Ausrechnung. Mit der Leibnizschen Regel folgt

$$0 = \int_0^T (\partial_x F)(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + (\partial_{\dot{x}} F)(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t \tag{10.2.4-G}$$

und damit impliziert das Fundamentallemma 10.2.3, dass $t \mapsto (\partial_{\dot{x}} F)(t, x(t), \dot{x}(t))$ stetig differenzierbar ist und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{10.2.4-H}$$

gilt. Ausgeschrieben ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die zu bestimmende Parametrisierung $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

☞ **10.2.5 Satz** (Notwendiges Extremalkriterium, Euler–Lagrange)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $x : [0, T] \to \Omega$ mit* (10.2.**4-C**) *ein stetig differenzierbares lokales Extremum zu*

$$\mathscr{F}[x] := \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t. \tag{10.2.5-A}$$

Dann ist $t \mapsto (\partial_{\dot{x}} F)(t, x(t), \dot{x}(t))$ stetig differenzierbar und es gilt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{10.2.5-B}$$

⚒ **10.2.6 Beispiel.** Sei $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung einer Kurve Γ, die zwei Punkte $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $x(1) = x_1 \in \mathbb{R}^n$ verbindet. Wir suchen die Kurve minimaler Länge, also x mit

$$\mathcal{L}[x] = \int_0^1 |\dot{x}(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{10.2.6-A}$$

Wir bestimmen die zugehörige Euler–Langrange-Gleichung. Da $\partial_y |y| = \frac{y}{|y|}$ gilt, ist diese durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = 0 \tag{10.2.6-B}$$

gegeben. Der normierte Tangentenvektor ist also konstant. Dafür muss die Kurve eine konstante Richtung haben, wir erhalten also (wie erwartet) die Gerade, welche die beiden Punkte x_0 und x_1 verbindet.

10.2.7. Wir diskutieren noch einige Spezialfälle, die für Anwendungen nützlich sind.

(i) Hängt $F = F(t, \dot{x})$ nicht explizit von x ab, so impliziert die Euler–Langrange-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, \dot{x}) = C \tag{10.2.7-A}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}^n$. Es ist also nur noch eine (implizite) Differentialgleichung erster Ordnung zu lösen.

(ii) Hängt $F = F(x, \dot{x})$ nicht explizit von t ab, so folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x} \overset{!}{=} \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{10.2.7-B}$$

Multiplikation[2] mit $\dot{x}$ führt auf

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}(\dot{x})^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \dot{x}}\dot{x}\ddot{x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\end{aligned} \tag{10.2.7-C}$$

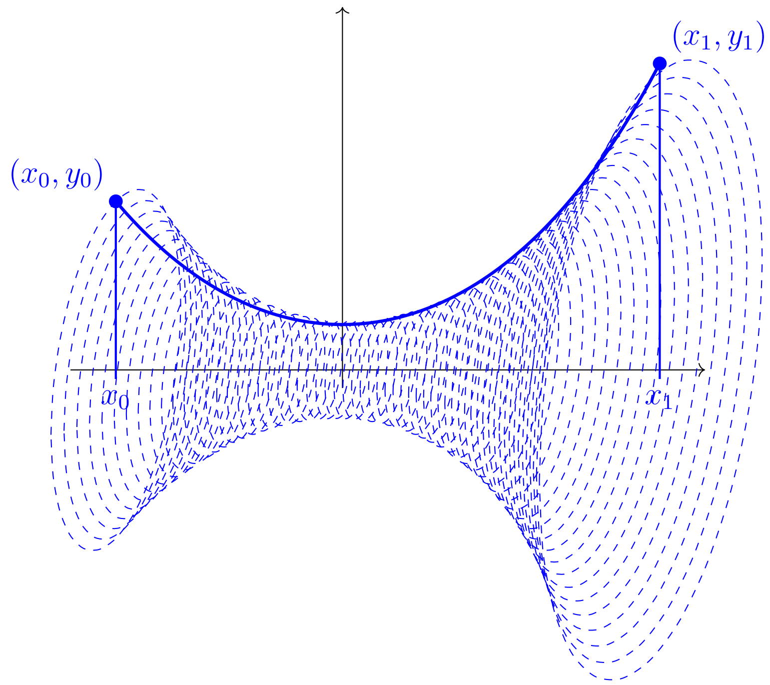
und es ergibt sich

$$F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} = C \tag{10.2.7-D}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Dies ist wiederum eine (implizite) Differentialgleichung erster Ordnung, die oft einfacher zu lösen ist.

(iii) Hängt $F = F(t,x)$ nicht von $\dot{x}$ ab, so vereinfacht sich die Euler–Lagrange-Gleichung zu $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 0$. Diese kann direkt mit dem Satz über implizite Funktionen gelöst werden.

⚒ **10.2.8 Beispiel.** Als nächstes Beispiel suchen wir eine Funktion $y = y(x)$ die zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) so verbindet, dass die sich ergebende Rotationsfläche um die x-Achse minimalen Inhalt besitzt.



Der Flächeninhalt ist durch das Integral

$$\mathscr{A}[y] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{10.2.8-A}$$

gegeben. Da der Integrand nicht explizit von der Integrationsvariablen x abhängt, vereinfacht sich die Euler–Lagrange-Gleichung. Es ergibt sich

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - y\frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C \tag{10.2.8-B}$$

[2] Für $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ ist das ein Skalarprodukt!

für eine Integrationskonstante C und damit

$$y = C\sqrt{1+(y')^2} \qquad \text{und somit auch} \qquad y' = \pm\sqrt{\frac{y^2-C^2}{C^2}}. \tag{10.2.8-C}$$

Diese Gleichung kann mit Trennung der Veränderlichen direkt gelöst werden. Es folgt

$$\pm C \operatorname{arcosh}\frac{y}{C} = \pm\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\frac{y}{C})^2-1}} = \int \mathrm{d}x = x + D \tag{10.2.8-D}$$

und damit $y(x) = C\cosh\frac{x+D}{C}$.

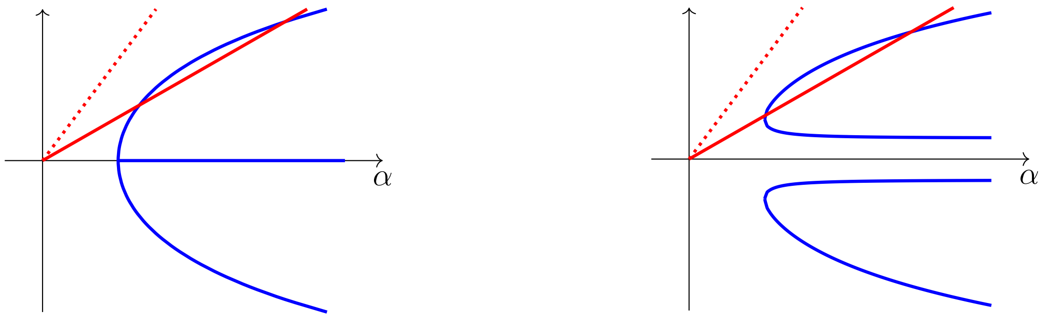
Damit sind wir allerdings mit dem Lösen nicht fertig. Nicht für alle Wahlen von (x_0, y_0) und (x_1, y_1) existiert auch eine differenzierbare Lösung und diese muss auch nicht notwendig eindeutig bestimmt sein. Um dies zu sehen, ändern wie die Notation und setzen $\alpha = 1/C$ und $\beta = D/C$. Dann muss

$$\alpha y_0 = \cosh(\alpha x_0 + \beta) \quad \text{und} \quad \alpha y_1 = \cosh(\alpha x_1 + \beta) \tag{10.2.8-E}$$

und damit durch Eliminieren von $\beta = \operatorname{arcosh}(\alpha y_0) - \alpha x_0$

$$(x_1 - x_0)\alpha = \pm\operatorname{arcosh}(\alpha y_1) \pm \operatorname{arcosh}(\alpha y_0) \tag{10.2.8-F}$$

gelten. Die auftretenden Vorzeichen $\pm$ sind dabei unabhängig voneinander und notwendig, um auch beide Zweige der arcosh-Funktion zu erhalten.



$y_0 = y_1$ $\qquad$ $y_0 < y_1$

Gleichung (10.2.8-F) zur Bestimmung von α kann je nach Wahl von $x_1 - x_0$, y_0 und y_1 keine, genau eine oder zwei Lösungen besitzen.

⚒ **10.2.9 Beispiel.** Die Lösungen eines Variationsproblems müssen nicht so viele Ableitungen besitzen, wie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung erwarten lässt. Auch dazu ein Beispiel. Wir minimieren dazu

$$\mathscr{F}[y] = \int_{-1}^{1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y^2(2x - y')^2\,\mathrm{d}x \tag{10.2.9-A}$$

über alle Funktionen $x \mapsto y(x)$ mit $y(-1) = 0$ und $y(1) = 1$. Offensichtlich gilt $\mathscr{F}[y] \geq 0$ und für die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \tag{10.2.9-B}$$

gilt auch $\mathscr{F}[y] = 0$. Damit handelt es sich bei der angegebenen Funktion um einen Minimierer von $\mathscr{F}$, der in $x = 0$ nur einfach differenzierbar ist.

Trotzdem ist die Euler–Lagrange-Gleichung (in der angegebenen Form) erfüllt. Es gilt für die Lösungsfunktion

$$(\partial_y F)(x, y, y') = 2y(2x - y')^2 = 0 \tag{10.2.9-C}$$

und ebenso

$$(\partial_{y'} F)(x, y, y') = -2y^2(2x - y') = 0, \quad \text{also auch} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\partial_{y'} F)(x, y, y') = 0. \tag{10.2.9-D}$$

✂ **Ergänzung.** Wir geben der Vollständigkeit halber noch ein Kriterium für die zweifache Differenzierbarkeit der Lösung an. Erfüllt eine differenzierbare Parametrisierung $t \mapsto x(t)$ die Euler–Lagrange-Gleichung (10.2.5-B) und ist F zweifach stetig differenzierbar, so besitzt x in allen Punkten $(t, x(t))$, $\xi = \dot{x}(t)$ mit $\partial_\xi^2 F(t, x, \xi) \neq 0$ eine stetige zweite Ableitung.

10.2.10. Wir haben Satz 10.2.5 unter den Randbedingungen (10.2.4-C) gezeigt. Bei Vorliegen von Anfangsbedingungen (10.2.4-D) gilt eine entsprechende Aussage. Dafür nutzen wir zur Variation differenzierbare Funktionen $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$. Dann folgt wiederum

$$\mathscr{F}[x + \varepsilon\varphi] \geq \mathscr{F}[x] \tag{10.2.10-A}$$

für alle ε in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$. Da die linke Seite in ε wiederum differenzierbar ist, folgt analog

$$0 = \int_0^T (\partial_x F)(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + (\partial_{\dot{x}} F)(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t \tag{10.2.10-B}$$

und damit auf Grund des Fundamentallemmas erneut die Differenzierbarkeit von $t \mapsto (\partial_{\dot{x}} F)(t, x(t), \dot{x}(t))$ und die Euler–Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{10.2.10-C}$$

Diese ist nun zusammen mit den Anfangsbedingungen (10.2.4-D) zu lösen.

✂ **Ergänzung.** Es ist die letztere Formulierung, die von zentraler Bedeutung für die klassische Mechanik ist. Bewegt sich ein Massenpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ in einem Potentialfeld $\operatorname{grad}\Phi$, so gelten auf Grund der Newtonschen Axiome der Mechanik

$$m\ddot{x} = -\operatorname{grad}\Phi(x), \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \tag{10.2.10-D}$$

Dies kann als Euler–Lagrange-Gleichung aufgefasst werden. Es ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(x, \dot{x}) \qquad \text{für} \qquad \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 - \Phi(x). \tag{10.2.10-E}$$

Bahnkurven der klassischen Mechanik sind also lokale Extrema des Wirkungsintegrals

$$\int_0^T \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t, \tag{10.2.10-F}$$

es gilt das *Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung*.

10.3 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

10.3.1. Wir wollen zuerst Variationsprobleme

$$\mathscr{F}[x] = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \longrightarrow \min \tag{10.3.1-A}$$

unter Gleichungsnebenbedingungen der Form

$$\int_0^T G(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = 0 \tag{10.3.1-B}$$

betrachten. Dann gilt ein notwendiges Extremalkriterium, welches uns so ähnlich schon im endlichdimensionalen Fall begegnet ist. Wir beschränken uns der Einfachhheit halber auf den Fall einer skalarwertigen Gleichungsnebenbedingung.

☞ **10.3.2 Satz** (Notwendiges Extremalkriterium unter Nebenbedingungen I, Euler–Lagrange). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $F : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $G : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $x : [0,T] \to \Omega$ mit* (10.2.4-C) *ein stetig differenzierbares lokales Extremum zu*

$$\mathscr{F}[x] := \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \tag{10.3.2-A}$$

unter der Gleichungsnebenbedingung

$$\mathscr{G}[x] := \int_0^T G(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = 0. \tag{10.3.2-B}$$

Angenommen x ist kein kritischer Punkt von $\mathscr{G}$. Dann existiert eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass für

$$H(t, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) - \lambda G(t, x, \dot{x}) \tag{10.3.2-C}$$

die Funktion $t \mapsto (\partial_{\dot{x}} H)(t, x(t), \dot{x}(t))$ stetig differenzierbar ist und die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{10.3.2-D}$$

erfüllt ist.

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zu dem von Satz 10.2.5, sobald wir in einem ersten Schritt den Parameter λ geeignet festgesetzt haben. Da x kein kritischer Punkt von $\mathscr{G}$ ist, gibt es ein stetig differenzierbares $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(0) = \psi(T) = 0$ und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathscr{G}[x + \varepsilon\psi]\bigg|_{\varepsilon=0} > 0. \tag{10.3.2-E}$$

Sei nun weiter $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ und ε nahe bei Null. Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen ein stetig differenzierbar von ε abhängendes $\delta(\varepsilon)$ mit

$$\mathscr{G}[x + \varepsilon\varphi + \delta(\varepsilon)\psi] = 0. \tag{10.3.2-F}$$

Jede zulässige (das heißt die Nebenbedingung erfüllende) Variation ist von der Form $t \mapsto x(t) + \varepsilon\varphi(t) + \delta(\varepsilon)\psi(t)$ für kleines ε. Weiter gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathscr{G}[x + \varepsilon\varphi + \delta(\varepsilon)\psi]\bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &\quad + \delta'(0)\int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\psi}(t)\right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{10.3.2-G}$$

und mit

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\psi}(t)\right) \mathrm{d}t}{\int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\psi}(t)\right) \mathrm{d}t} \\ &= -\delta'(0)\frac{\int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\psi}(t)\right) \mathrm{d}t}{\int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\right) \mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{10.3.2-H}$$

folgt auf Grund der Extremalität der Funktion x

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathscr{F}[x + \varepsilon\varphi + \delta(\varepsilon)\psi]\bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &\quad + \delta'(0)\int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\psi}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &\quad - \lambda\int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{10.3.2-I}$$

für alle stetig differenzierbaren $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$. Damit liefert das Fundamentallemma 10.2.3 die Euler–Lagrange-Gleichung für

$$H(t, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) - \lambda G(t, x, \dot{x}). \tag{10.3.2-J}$$

Insbesondere ist also die Funktion $t \mapsto (\partial_{\dot{x}}H)(t, x(t), \dot{x}(t))$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{10.3.2-K}$$

□

⚒ **10.3.3 Beispiel.** Ist f ein lokales Minimum für die Energie $\mathscr{E}[f]$ aus (10.2.1-C)

$$\mathscr{E}[f] = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{10.3.3-A}$$

unter der Nebenbedingung $\mathscr{L}[f] = L$

$$\mathscr{L}[f] = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x = L, \tag{10.3.3-B}$$

so impliziert das gerade gezeigte notwendige Kriterium (in der speziellen Form für von der Integrationsvariablen nicht explizit abhängenden Integranden

$$(f(x) - \lambda)\sqrt{1 + (f'(x))^2} - (f(x) - \lambda)\frac{(f'(x))^2}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = \text{const}\,. \tag{10.3.3-C}$$

Diese Gleichung haben wir in Beispiel 10.2.8 schon einmal gelöst, es ergibt sich als allgemeine Lösung

$$f(x) = \lambda + \alpha^{-1} \cosh(\alpha x + \beta) \tag{10.3.3-D}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zur Bestimmung der Konstanten nutzen wir $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ und

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x &= \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha x + \beta)}\, \mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2} \cosh(\alpha x + \beta)\, \mathrm{d}x \\ &= \alpha^{-1} \sinh(\alpha x + \beta)\Big|_{x=a_1}^{a_2} = L. \end{aligned} \tag{10.3.3-E}$$

Dies liefert drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda + \alpha^{-1} \cosh(\alpha a_1 + \beta) &= b_1, \\ \lambda + \alpha^{-1} \cosh(\alpha a_2 + \beta) &= b_2, \\ \sinh(\alpha a_2 + \beta) - \sinh(\alpha a_1 + \beta) &= \alpha L, \end{aligned} \tag{10.3.3-F}$$

die für $L > \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ zwei Lösungen besitzen. Eine der Lösungen erfüllt $\alpha > 0$ und ist das gesuchte Minimum, für die zweite Lösung gilt $\alpha < 0$ und diese maximiert die Energie.

Das Beispiel erklärt, warum die cosh-Funktion oft als *Kettenlinie* bezeichnet wird.

☞ **10.3.4 Satz** (Notwendiges Extremalkriterium unter Nebenbedingungen II, Euler–Lagrange). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $F : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $G : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $x : [0,T] \to \Omega$ mit (10.2.4-C) ein stetig differenzierbares lokales Extremum zu*

$$\mathscr{F}[x] := \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t \tag{10.3.4-A}$$

unter der Gleichungsnebenbedingung

$$G(t, x(t)) = 0. \tag{10.3.4-B}$$

Angenommen, die partielle Ableitung $(\partial_x G)(t, x(t))$ besitzt für $t \in [0,T]$ keine Nullstelle. Dann existiert eine (stetige) Funktion $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$, so dass für

$$H(t, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) - \lambda(t) G(t, x) \tag{10.3.4-C}$$

die Funktion $t \mapsto (\partial_{\dot{x}} H)(t, x(t), \dot{x}(t))$ *stetig differenzierbar ist und die* Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{10.3.4-D}$$

erfüllt ist.

Beweisskizze. Der Beweis ist wiederum ähnlich zu dem von Satz 10.2.5. Da $(\partial_x G)(t, x(t)) \neq 0$ gilt, gibt es eine Funktion $\psi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(0) = \psi(T) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} G(t, x(t) + \varepsilon\psi(t))\bigg|_{\varepsilon=0} = (\partial_x G)(t, x(t))\psi(t) > 0 \tag{10.3.4-E}$$

für alle $t \in (0, T)$. Sei nun weiter $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ und ε nahe Null. Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen ein stetig differenzierbar von ε und t abhängiges $\delta(\varepsilon, t)$ mit

$$G(t, x(t) + \varepsilon\varphi(t) + \delta(\varepsilon, t)\psi(t)) = 0. \tag{10.3.4-F}$$

Darüberhinaus ist jede zulässige Variation von dieser Form. Weiter gilt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} G(t, x + \varepsilon\varphi(t) + \delta(\varepsilon, t)\psi(t))\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t))\left(\varphi(t) + \frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon}(0, t)\psi(t)\right) \tag{10.3.4-G}$$

und mit der Bezeichnung

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\psi(t)}{\frac{\partial G}{\partial x}(t, x)\psi(t)} \\
&= -\frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon}(0, t)\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\psi(t)}{\frac{\partial G}{\partial x}(t, x)\varphi(t)}
\end{aligned} \tag{10.3.4-H}$$

damit auf Grund der Extremalität von x

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathcal{F}[x + \varepsilon\varphi + \delta(\varepsilon, t)\psi]\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^T \Bigg(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\varphi(t) + \frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon}(0, t)\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\psi(t) \\
&\qquad + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t) - \frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon}(0, t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\psi(t)\Bigg)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \Bigg(\left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \lambda(t)\frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t))\right)\varphi(t) \\
&\qquad + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\varphi}(t)\Bigg)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{10.3.4-I}$$

Letzteres liefert mit dem Fundamentallemma 10.2.3 die Euler–Lagrange-Gleichung für $H(t, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) - \lambda(t)G(t, x)$ und damit folgt die Behauptung. □

⚒ **10.3.5 Beispiel.** Wir suchen auf dem Paraboloid $x^2 + y^2 - z = 0$ zu zwei gegebenen Punkten (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) die Verbindungskurve kürzester Länge. Wir parametrisieren die zu bestimmende Kurve durch $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ mit $t \in [0, 1]$. Dann ist die Länge

$$\mathscr{L}[x, y, z] = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \min \tag{10.3.5-A}$$

unter allen Kurven mit $x^2 + y^2 = z$ und gegebenen Randwerten $x(i) = x_i$, $y(i) = y_i$, $z(i) = z_i$, $i \in \{0, 1\}$ zu minimieren. Wir bilden also das Hilfsfunktional

$$H[x, y, z] = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \lambda(t)(x^2 + y^2 - z)\,\mathrm{d}t \tag{10.3.5-B}$$

und erhalten die zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2x\lambda(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ 0 &= 2y\lambda(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ 0 &= -\lambda(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned} \tag{10.3.5-C}$$

Dies ist (bei gegebener Funktion $t \mapsto \lambda(t)$) ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wir erwarten also eine von sechs Parametern abhängende Familie von Lösungen. Wir haben auch sechs Randbedingungen, was die Lösung dann zumindest festlegen sollte. Allerdings müssen wir noch λ festlegen. Dies geschieht durch Einsetzen der Lösungen in die Gleichung $x^2 + y^2 - z = 0$.

⚒ **10.3.6 Beispiel.** Geht man analog auf der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vor, so ergeben sich die Euler–Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2x\lambda(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ 0 &= 2y\lambda(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ 0 &= 2z\lambda(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned} \tag{10.3.6-A}$$

Damit ist für jedes t der Ortsvektor proportional zur Ableitung des normierten Tangentenvektors,

$$2\lambda(t)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{10.3.6-B}$$

und somit das Kreuzprodukt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{10.3.6-C}$$

bezüglich t konstant. Damit liegt die gesuchte Kurve in der auf diesem Vektor senkrecht stehenden Ebene, ist also (wie schon bekannt) ein Großkreis auf der Sphäre.

B Komplexe Analysis über Formen

Die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ kann durch $z = x + \mathrm{i}y$ als $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Ebenso können alle Aussagen dieses Kapitels über Differentialformen komplexwertig aufgefasst werden, indem man komplexwertige Koeffizientenfunktionen zulässt. Dies erlaubt es, die Hauptsätze auf differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ anzuwenden.

B.1 Differentialformen und Holomorphie auf $\mathbb{C}$

✂ **Ergänzung.** Für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt mit $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y \tag{B.1.1-A}$$

und $\{\mathrm{d}z, \mathrm{d}\overline{z}\}$ bilden eine Basis des komplexifizierten $\mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^2)\otimes\mathbb{C}$. Jede Differentialform $\omega \in \mathbf{\Omega}^1(U)\otimes\mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist damit von der Form

$$\omega = g_1\,\mathrm{d}z + g_2\,\mathrm{d}\overline{z} \tag{B.1.1-B}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $g_1, g_2 : U \to \mathbb{C}$. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ (reell) differenzierbar, so gilt damit für das Differential $\mathrm{d}f$

$$\mathrm{d}f = g_1\,\mathrm{d}z + g_2\,\mathrm{d}\overline{z} = g_1\,(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) + g_2\,(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \partial_x f\,\mathrm{d}x + \partial_y f\,\mathrm{d}y. \tag{B.1.1-C}$$

Koeffizientenvergleich liefert eine Darstellung für die Koeffizienten. Es gilt

$$g_1 = \frac{\partial_x f - \mathrm{i}\partial_y f}{2} =: \partial_z f, \qquad g_2 = \frac{\partial_x f + \mathrm{i}\partial_y f}{2} =: \partial_{\overline{z}} f, \tag{B.1.1-D}$$

die dadurch definierten Symbole ∂_z und $\partial_{\overline{z}}$ werden als *Wirtinger-Ableitungen*[1] bezeichnet. Es bietet sich an, diese für zwei Funktionen zu berechnen. Es gilt

$$\partial_z z = \frac{\partial_x - \mathrm{i}\partial_y}{2}(x + \mathrm{i}y) = 1, \qquad \partial_z \overline{z} = \frac{\partial_x - \mathrm{i}\partial_y}{2}(x - \mathrm{i}y) = 0 \tag{B.1.1-E}$$

sowie

$$\partial_{\overline{z}} z = \frac{\partial_x + \mathrm{i}\partial_y}{2}(x + \mathrm{i}y) = 0, \qquad \partial_{\overline{z}} \overline{z} = \frac{\partial_x + \mathrm{i}\partial_y}{2}(x - \mathrm{i}y) = 1. \tag{B.1.1-F}$$

Dies erklärt die Notation. Ebenso gelten die Leibnizregeln

$$\partial_z(fg) = f\partial_z g + g\partial_z f, \qquad \partial_{\overline{z}}(fg) = f\partial_{\overline{z}} g + g\partial_{\overline{z}} f \tag{B.1.1-G}$$

und für mehrfach differenzierbare Funktionen auch die an den Satz von Schwarz erinnernde Aussage

$$\partial_z\partial_{\overline{z}} f = \frac{\partial_x - \mathrm{i}\partial_y}{2}\frac{\partial_x + \mathrm{i}\partial_y}{2} = \frac{\partial_x^2 + \partial_y^2}{4} f = \partial_{\overline{z}}\partial_z f. \tag{B.1.1-H}$$

Damit kann mit den Wirtinger-Ableitungen wie mit partiellen Ableitungen gerechnet werden. Es bietet sich an, sich Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als Funktionen in den Variablen z und $\overline{z}$ vorzustellen. Jedes reelle Polynom $p(x, y)$ in zwei reellen Variablen ist ebenso ein Polynom $\tilde{p}(z, \overline{z}) = p(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}})$. Es ist genau dann komplexes Polynom, wenn $\partial_{\overline{z}}\tilde{p} = 0$ gilt.

[1] Wilhelm Wirtinger, 1865–1945

✂ **Ergänzung.** Eine (reell) differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt auf U *holomorph*, falls die *Cauchy–Riemann-Gleichungen*

$$\partial_{\overline{z}} f = 0 \tag{B.1.2-A}$$

auf U gelten. Dies impliziert, dass die Differentialform $f(z)\,\mathrm{d}z$ geschlossen ist,

$$\mathrm{d}(f(z)\,\mathrm{d}z) = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z = 0. \tag{B.1.2-B}$$

Also gilt als Folgerung des Satzes von Stokes

☞ **B.1.3 Satz** (Integralsatz von Cauchy). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein geschlossener nullhomologer Weg in U. Dann gilt*

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{B.1.3-A}$$

✂ **Ergänzung.** Nach dem Integralsatz von Cauchy stimmen Kurvenintegrale für homologe Wege überein. Dies impliziert:

☞ **B.1.5 Korollar.** *Sei U einfach zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $f = \partial_z F$. Diese ist bis auf Konstanten eindeutig bestimmt und durch*

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{B.1.5-A}$$

für beliebig gewähltes z_0 und einen z_0 mit z verbindenden Integrationsweg gegeben.

B.2 Die Cauchyschen Integralformeln

✂ **Ergänzung.** Wir berechnen ein weiteres Integral. Es gilt für den positiv orientierten Einheitskreis Γ

$$\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \tag{B.2.1-A}$$

unter Ausnutzung der Parametrisierung $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$. Aus dem Integralsatz von Cauchy folgt allgemeiner

☞ **B.2.2 Satz** (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z \in U$. Dann gilt für jede z einfach positiv umlaufende Kurve Γ*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{B.2.2-A}$$

Beweis. Es genügt, das Integral zu berechnen. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = f(z) \tag{B.2.2-B}$$

unter Ausnutzung der Stetigkeit von f. □

✂ **Ergänzung.** Die Cauchysche Integralformel kann differenziert werden, insbesondere sind holomorphe Funktionen stets beliebig oft differenzierbar.

☞ **B.2.3 Korollar.** *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z \in U$. Dann gilt für jede z einfach positiv umlaufende Kurve Γ*

$$\partial_z^k f(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{B.2.3-A}$$

✂ **Ergänzung.** Speziell für Integrale über Kreislinien $\Gamma_r = \partial B_r(z)$ mit Radius r gilt wegen

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{r^2}(\overline{\zeta} - \overline{z}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}(f(\zeta)(\overline{\zeta} - \overline{z})\,\mathrm{d}\zeta) = f(\zeta)\,\mathrm{d}\overline{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta \tag{B.2.4-A}$$

auch stets

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i} r^2} \oint_{\Gamma_r} f(\zeta)(\overline{\zeta} - \overline{z})\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i} r^2} \int_{B_r(z)} f(\zeta)\,\mathrm{d}\overline{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta. \tag{B.2.4-B}$$

Wegen $\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z = (\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \wedge (\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ist letzteres gerade das Flächenintegral

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(z)} f(\xi + \mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta \tag{B.2.4-C}$$

und der Funktionswert $f(z)$ ist das Mittel der Funktionswerte auf $B_r(z)$. Dies impliziert folgendes Maximumprinzip.

☞ **B.2.5 Korollar.** *Sei U zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z \in U$. Nimmt dann $|f|$ in z ein lokales Maximum an, so ist f konstant.*

Beweis. Nimmt $|f|$ in z ein lokales Maximum an, so gilt die Ungleichung

$$|f(z)| \le \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(z)} |f(\xi + \mathrm{i}\eta)|\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta \le \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(z)} |f(z)|\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta = |f(z)| \tag{B.2.5-A}$$

und damit folgt $|f(z)| = |f(\xi + \mathrm{i}\eta)|$ für alle $\xi + \mathrm{i}\eta \in B_r(z)$. Also folgt

$$f(z)\overline{f(z)} = \text{const.} \tag{B.2.5-B}$$

und damit $\partial_z f(z) = 0$. □

B.3 Holomorphie von Funktionen auf $\mathbb{C}^n$

✂ **Ergänzung.** Fasst man analog $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}^{2n}$ mit der Identifikation $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$ auf, so ergeben sich die Differentiale

$$\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_j, \qquad \mathrm{d}\overline{z}_j = \mathrm{d}x_j - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_j, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{B.3.1-A}$$

Eine (reell) differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt wiederum holomorph, falls ihr Differential keine Anteile in $\mathrm{d}\overline{z}_j$ für $j = 1, \dots, n$ besitzt, falls also

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \partial_{z_j} f\,\mathrm{d}z_j \tag{B.3.1-B}$$

mit den Wirtinger-Ableitungen

$$\partial_{z_j} f = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} - \mathrm{i}\partial_{y_j}\right) f \tag{B.3.1-C}$$

gilt.

✂ **Ergänzung.** Damit ist für holomorphes $f : \mathbb{C}^n \supseteq U \to \mathbb{C}$ insbesondere die n-Form

$$f(z)\,\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n \tag{B.3.2-A}$$

geschlossen. Als Folgerung aus dem Satz von Stokes ergibt sich diesmal:

☞ **B.3.3 Satz** (Verallgemeinerter Cauchyscher Integralsatz)**.** *Sei $f : \mathbb{C}^n \supseteq U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\Sigma \subset U$ eine (reell) $n+1$-dimensionale berandete Untermannigfaltgkeit. Dann gilt*

$$\oint_{\partial\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n = 0. \tag{B.3.3-A}$$

Dieser Satz klingt auf den ersten Blick allgemeiner, als er eigentlich ist. Der Rand $\partial\Sigma$ der (reell) $n+1$-dimensionalen berandeten Untermannigfaltgkeit Σ muss Zusatzbedingungen erfüllen, so dass nicht schon $\big(\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2 \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}z_n\big)\big|_{\partial\Sigma} = 0$ gilt. Ein Beispiel eines geeigneten Randes wäre

$$\partial\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}. \tag{B.3.3-B}$$

Ergänzung. Will man die Integralformel von Cauchy sinnvoll verallgemeinern, so muss man anders vorgehen. Für $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, $z \neq \zeta$, definieren wir die Differentialform

$$\omega(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi\mathrm{i})^n}\frac{1}{|z-\zeta|^{2n}}\sum_{j=1}^{n}(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)\,\mathrm{d}\overline{\zeta}_1 \wedge \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}\overline{\zeta}_j}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta}_n \wedge \mathrm{d}\zeta_n \tag{B.3.3-C}$$

vom Grad $2n-1$ (wobei der Faktor $\mathrm{d}\overline{\zeta}_j$ nicht im Dachprodukt auftritt). Ist nun $f : \mathbb{C}^n \supseteq U \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Menge U, so ist für jedes fest gewählte z und $\zeta \in U \setminus \{z\}$

$$\mathrm{d}f(\zeta) \wedge \omega(\zeta, z) = 0. \tag{B.3.3-D}$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \frac{(n-1)!}{(2\pi\mathrm{i})^n}\frac{1}{|z-\zeta|^{2n}}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{n(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)(\zeta_j - z_j)}{|z-\zeta|^2}\right)\mathrm{d}\overline{\zeta}_j \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta}_1 \wedge \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}\overline{\zeta}_j}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta}_n \wedge \mathrm{d}\zeta_n \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi\mathrm{i})^n}\frac{1}{|z-\zeta|^{2n}}\left(n - n\sum_{j=1}^{n}\frac{(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)(\zeta_j - z_j)}{|z-\zeta|^2}\right)\mathrm{d}\overline{\zeta}_j \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta}_1 \wedge \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}\overline{\zeta}_j}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta}_n \wedge \mathrm{d}\zeta_n \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.3.3-E}$$

Damit verschwindet die äußere Ableitung von $f(\zeta)\omega(\zeta, z)$ für $\zeta \neq z$ und für jedes Gebiet $G \subseteq U$, welches z in seinem Inneren enthält, gilt

$$0 = \int_{G\setminus B_\varepsilon(z)} \mathrm{d}\big(f(\zeta)\omega(\zeta, z)\big) = \int_{\partial G} f(\zeta)\omega(\zeta, z) - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} f(\zeta)\omega(\zeta, z). \tag{B.3.3-F}$$

und da f in z stetig ist und $\omega(\zeta, z)$ ebenso

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \omega(\zeta, z) = \int_{\partial B_1(0)} \omega(\zeta, 0) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi\mathrm{i})^n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial B_1(0)} \overline{\zeta}_j\,\mathrm{d}\overline{\zeta}_1 \wedge \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \overset{\widehat{\mathrm{d}\overline{\zeta}_j}}{\cdots} \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta}_n \wedge \mathrm{d}\zeta_n \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi\mathrm{i})^n}\sum_{j=1}^{n}\int_{B_1(0)} \mathrm{d}\overline{\zeta}_1 \wedge \mathrm{d}\zeta_1 \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\overline{\zeta}_n \wedge \mathrm{d}\zeta_n \\ &= \frac{(n-1)!}{\pi^n}\sum_{j=1}^{n}\int_{B_1(0)} \mathrm{d}\xi_1 \wedge \mathrm{d}\eta_1 \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\xi_n \wedge \mathrm{d}\eta_n = 1\end{aligned} \tag{B.3.3-G}$$

mit dem bekannten $2n$-dimensionalen Kugelvolumen erfüllt, ergibt sich für $\varepsilon \to 0$ eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel:

B.3.4 Satz (Bochner[2]–Martinelli[3])**.** *Sei $f : \mathbb{C}^n \supseteq U \to \mathbb{C}$ holomorph und $G \subseteq U$ ein Gebiet, welches z in seinem Inneren enthält, gilt*

$$f(z) = \oint_{\partial G} f(\zeta)\omega(\zeta, z). \tag{B.3.4-A}$$

[2] Salomon Bochner, 1899–1982
[3] Enzo Martinelli, 1911–1999

C Elektrodynamik mit Formen

Die klassischen Integralsätze im Dreidimensionalen sind zusammen mit der mathematischen Formulierung der Elektrodynamik entstanden. Dies merkt man an ihrer Formulierung, aber auch an natürlichen Interpretationen der Grundgrößen der Elektrodynamik als Differentialformen und Integrale. Wir nehmen im Weiteren an, dass wir die Physik im gesamten $\mathbb{R}^3$ beschreiben. Diese Annahme ist in einigen Schritten wesentlich, wir weisen entsprechend darauf hin.

C.1 Ladungs- und Stromdichte

✂ **Ergänzung.** Die Elektrodynamik beschreibt Ladungen, Ströme und elektrische und magnetische Felder. Dies kann man axiomatisch aufbauen, wir skizzieren die wesentlichen Grundgesetze. Die Ladung in einem Gebiet G beschreibt man am besten als Integral

$$\int_G \boldsymbol{\rho} \tag{C.1.1-A}$$

über eine *Ladungsdichte* $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Omega}^3(\mathbb{R}^3)$. Ladungen können sich im Raum bewegen. Dazu betrachten wir eine zweite Größe, die *elektrische Stromdichte* $\mathbf{j} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Diese beschreibt für jedes Flächenstück Σ den Ladungsstrom durch Σ als Integral

$$\int_\Sigma \mathbf{j}. \tag{C.1.1-B}$$

✂ **Ergänzung** (Erhaltungssatz für Ladungen)**.** Die zeitliche Änderung der Ladung in einem Gebiet G erfolgt durch (Ladungs-) Ströme durch die Oberfläche ∂G. Da Ladungen von Elektronen negativ sind, hat es sich eingebürgert Ströme mit dem eigentlich falschen Vorzeichen zu versehen. Damit folgt für jedes stückweise glatt berandete Gebiet G

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \boldsymbol{\rho} = \int_G \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\rho} = -\int_{\partial G} \mathbf{j}. \tag{C.1.2-A}$$

Da nach dem Integralsatz von Gauss ebenso

$$\int_{\partial G} \mathbf{j} = \int_G \mathrm{d}\mathbf{j} \tag{C.1.2-B}$$

gilt und G beliebig war, folgt der *Erhaltungssatz für Ladungen* in differentieller Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\rho} + \mathrm{d}\mathbf{j} = 0. \tag{C.1.2-C}$$

Dieser verknüpft die Grundgrößen $\boldsymbol{\rho}$ und $\mathbf{j}$.

C.2 Elektrische und magnetische Erregung

✂ **Ergänzung.** Da $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Omega}^3(\mathbb{R}^3)$ nach dem Poincare-Lemma im Wertebereich von d liegt, gibt es ein $\mathbf{D} \in \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\mathrm{d}\mathbf{D} = \boldsymbol{\rho}. \tag{C.2.1-A}$$

Die 2-Form $\mathbf{D}$ wollen wir nach Arnold Sommerfeld[1] als *elektrische Erregung* bezeichnen. Nach dem Integralsatz von Gauss gilt damit das *Gausssche Gesetz*

$$\int_{\partial G} \mathbf{D} = \int_{\partial G} \mathrm{d}\mathbf{D} = \int_G \boldsymbol{\rho}. \tag{C.2.1-B}$$

Damit kann man $\mathbf{D}$ auch als eine *elektrische Flussdichte* interpretieren und man sagt informell, Ladungen seien die Quellen des elektrischen Flusses.

✂ **Ergänzung.** Betrachtet man nun die Größe

$$\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \in \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbb{R}^3) \tag{C.2.2-A}$$

so gilt nach den Gaussschen Gesetz

$$\mathrm{d}(\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}) = \mathrm{d}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\rho} = 0. \tag{C.2.2-B}$$

Damit gibt es nach dem Poincare-Lemma wiederum eine Differentialform $\mathbf{H} \in \boldsymbol{\Omega}^1(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\mathrm{d}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}. \tag{C.2.2-C}$$

In Integralform mittels des Integralsatzes von Stokes ausgeschrieben heißt dies für jedes stückweise glatt berandete Flächenstück Σ gilt

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{H} = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{H} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma} \mathbf{D}. \tag{C.2.2-D}$$

Wir wollen wiederum Sommerfeld folgend $\mathbf{H}$ als *magnetische Erregung* bezeichnen. Das gerade formulierte *Ampere[2]–Maxwell[3]-Gesetz* besagt, dass Ströme und sich zeitlich veränderliche elektrische Flüsse Magnetfelder induzieren. Das Kurvenintegral

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \tag{C.2.2-E}$$

kann als *magnetische Spannung* entlang der Kurve $\partial\Sigma$ interpretiert werden.

✂ **Ergänzung.** Die Definition der Größen $\mathbf{D}$ und $\mathbf{H}$ haben explizit das Poincare-Lemma und damit die triviale de Rham Kohomologie des $\mathbb{R}^3$ genutzt. Wenn man allgemein-relativistisch an gekrümmte Universen und Raumzeiten glaubt, muss man hier vorsichtig sein. Die Definition von $\mathbf{H}$ funktioniert analog, in geschlossenen Universen benötigt die von $\mathbf{D}$ eine Zusatzannahme, die *Ladungsneutralität des Universums.*

C.3 Elektrische und magnetische Felder

✂ **Ergänzung.** Bisher haben wir nur ausgehend von der Erhaltung der Ladung argumentiert, für weitere Betrachtungen bedarf es wieder etwas physikalischen Input. Elektrische und magnetische Felder wirken durch Kräfte auf Ladungen. Dies versteht man besser, wenn man statt über Kräfte über Arbeit

[1] Arnold Sommerfeld, 1868–1951
[2] Marie-André Ampère, 1775–1836
[3] James Clerk Maxwell, 1831–1879

und Energie nachdenkt. Eine (hinreichend kleine und nur zum Messen genutzte) Testladung in einem elektrischen Feld verrichtet bei einer Bewegung entlang einer Kurve Γ eine Arbeit. Diese Arbeit sollte pro Ladungseinheit sinnvoll durch ein Kurvenintegral

$$-\int_\Gamma \mathbf{E} \tag{C.3.1-A}$$

für eine Differentialform $\mathbf{E} \in \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^3)$ beschrieben werden. Die Differentialform $\mathbf{E}$ soll als *elektrisches Feld* bezeichnet werden. Das Integral wird im allgemeinen vom Weg abhängen und wird als *elektrische Spannung* entlang des Weges E bezeichnet. Für geschlossene Wege ist die Bezeichnung *elektrische Ringspannung* suggestiv.

✂ **Ergänzung.** Magnetfelder beschreiben Kraftwirkungen auf elektrische Leiter. Wir nutzen wiederum einen idealen elektrischer Leiter der durch eine Kurve Γ beschrieben wird. Beim verschieben der Kurve Γ durch ein Flächenstück Σ in einem Magnetfeld wird Arbeit verrichtet. Diese sollte damit von Σ abhängen und pro Stromeinheit als Integral

$$\int_\Sigma \mathbf{B} \tag{C.3.2-A}$$

für eine Differentialform $\mathbf{B} \in \mathbf{\Omega}^2(\mathbb{R}^3)$ gegeben sein. Ist $\partial\Sigma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, so entspricht das Integral also der zu verrichtenden Arbeit um den Leiter von der Kurve Γ_1 zur Kurve Γ_2 zu verschieben.

Es hat sich experimentell erwiesen, dass diese Arbeit nicht von der Fläche Σ sondern nur von den beiden Wegen Γ_1 und Γ_2 abhängt. Verbindet man Γ_1 und Γ_2 durch zwei verschiedene Flächen Σ_1 und Σ_2 mit $\partial\Sigma_1 = \Gamma_1 - \Gamma_2 = \partial\Sigma_2$, so ist $\partial(\Sigma_1 - \Sigma_2) = 0$, und diese nun geschlossene Fläche ist selbst Rand eines Gebietes G. Es gilt also $\partial G = \Sigma_1 - \Sigma_2$ und damit

$$0 = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B} - \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} = \int_{\partial G} \mathbf{B} = \int_G \mathrm{d}\mathbf{B}. \tag{C.3.2-B}$$

Dies gilt aber damit auch für jedes stückweise glatt berandete Gebiet G. Es folgt

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = 0. \tag{C.3.2-C}$$

Das magnetische Feld ist also quellenfrei. Es gibt keine magnetischen Ladungen.

✂ **Ergänzung.** Wir benötigen ein weiteres Grundgesetze der Elektrodynamik, welches wir noch formulieren wollen. Es gilt das *Faradaysche*[4] *Induktionsgesetz*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \mathbf{B} + \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} = 0 \tag{C.3.3-A}$$

für jedes Flächenstück Σ. Die Ringspannung entlang $\partial\Sigma$ entspricht gerade minus der zeitlichen Änderung des Flächenintegrals über $\mathbf{B}$. Da dies für jedes Flächenstück Σ gilt, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \mathrm{d}\mathbf{E} = 0. \tag{C.3.3-B}$$

C.4 Materialgesetze und Hodge-★

✂ **Ergänzung.** Damit ergeben sich für die sechs Größen $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ vier unabhängige Gleichungen, die Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, & \mathrm{d}\mathbf{D} &= \boldsymbol{\rho}, \\ \mathrm{d}\mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} & \mathrm{d}\mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{C.4.1-A}$$

[4] Michael Faraday, 1791–1867

Es fehlen zwei weitere Materialgesetze, die die elektrischen und magnetischen Felder **E** und **B** mit den Erregungen **D** und **H** verknüpfen. Dazu nutzen wir den Hodge-Stern

$$\bigstar : \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbf{\Omega}^2(\mathbb{R}^3), \tag{C.4.1-B}$$

der durch $\bigstar(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\bigstar(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ und $\bigstar(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ festgelegt ist. Im Vakuum gilt damit dann

$$\varepsilon_0 \bigstar \mathbf{E} = \mathbf{D}, \qquad \mu_0 \bigstar \mathbf{H} = \mathbf{B} \tag{C.4.1-C}$$

mit der *dielektrischen Konstanten* ε_0 und der *magnetischen Permeabilität* μ_0.

C.5 Poynting-Vektor und Energiefluss

✂ **Ergänzung.** Wenn sich in einem elektrischen Feld Ladungen bewegen, so verrichtet das Feld an den Ladungen Arbeit. Zur Beschreibung sich bewegender Ladungen nutzen wir wieder die Stromdichte $\mathbf{j} \in \mathbf{\Omega}^2(\mathbb{R}^3)$. Diese steht in engem Zusammenhang zu einem Vektorfeld $\mathbf{v}$, welches die Geschwindigkeitsvektoren einzelner Ladungspunkte beschreibt. Es gilt $\mathbf{j} = \mathbf{v} \smile \boldsymbol{\rho}$.

Das elektrische Feld $\mathbf{E} \in \mathbf{\Omega}^1(\mathbb{R}^3)$ verrichtet an einzelnen Ladungspunkten mit Ladung $\boldsymbol{\rho}$ mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ die infinitesimale Arbeit $(\mathbf{v} \smile \mathbf{E})\boldsymbol{\rho} = \langle \mathbf{E}, \mathbf{v} \rangle \boldsymbol{\rho}$. Da $\mathbf{E} \wedge \boldsymbol{\rho} = 0$ und damit $\mathbf{v} \smile (\mathbf{E} \wedge \boldsymbol{\rho}) = 0$ gilt, folgt

$$(\mathbf{v} \smile \mathbf{E})\boldsymbol{\rho} = \mathbf{E} \wedge (\mathbf{v} \smile \rho) = \mathbf{E} \wedge \mathbf{j} \tag{C.5.1-A}$$

und Integration liefert daraus die vom Feld verrichtete Arbeit als

$$\int_G \mathbf{E} \wedge \mathbf{j}. \tag{C.5.1-B}$$

✂ **Ergänzung.** Die in elektrischen und magentischen Feldern enthaltene Energie kann wiederum durch ein Volumenintegral bestimmt werden. Dazu nutzt man die Differentialform

$$\frac{1}{2}\big(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{H}\big) \tag{C.5.2-A}$$

als *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes. Für diese gilt unter Ausnutzung der Materialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \bigstar \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \wedge \bigstar \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \wedge \bigstar \dot{\mathbf{E}} = 2\mathbf{E} \wedge \dot{\mathbf{D}}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) = 2\dot{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{H} \tag{C.5.2-B}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{H}\big) &= \mathbf{E} \wedge \dot{\mathbf{D}} - \dot{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{E} \wedge \mathrm{d}\mathbf{H} - \mathrm{d}\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} - \mathbf{E} \wedge \mathbf{j} \\ &= -\,\mathrm{d}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{E} \wedge \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{C.5.2-C}$$

Die Differentialform

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \tag{C.5.2-D}$$

kann als *Energiestromdichte* interpretiert werden. Sie wird als *Poynting*[5]*-Vektor* oder besser *Poynting-Form* bezeichnet. Es gilt damit für jedes Gebiet G

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_G \mathbf{E} \wedge \mathbf{D} + \mathbf{H} \wedge \mathbf{B} + \oint_{\partial G} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} + \int_G \mathbf{E} \wedge \mathbf{j} = 0, \tag{C.5.2-E}$$

die zeitliche Änderung der Feldenergie in G gleicht dem Fluss des Energiestroms durch den Rand ∂G (in G hinein) minus der durch das Feld im Inneren an Ladungen verrichteten Arbeit.

[5] John Henry Poynting, 1852–1914

Index