1. Arbeitsblatt Analysis 2 SS 2010

	Vorname	Nachname	Matrikelnummer	Tutor	Uhrzeit
1.					
2.					
3.					

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Code										
Punkte										

Arbeitsblatt I zur Vorlesung Analysis 2 SS 2010

Abgabe: Bis zum 9.6.10, 14 Uhr, im Zi. 8.561 oder 8.345.

Aufgabe 1

Es sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive Zahlenfolge. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort:

1.A

$$a)\qquad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{divergiert.}$$

$$b)\qquad \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergiert.}$$

1.B

$$a)\qquad \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{divergiert.}$$

$$b)\qquad \liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergiert.}$$

Aufgabe 2

2.A.1 Entscheiden Sie, für welche $p > 0$ die folgenden Reihen bzw. uneigentlichen Integrale bedingt und absolut konvergent sind

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{n\pi}{4}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+p}\,), \quad c)\ \int_1^{\infty} \sin(x^p)\,\mathrm{d}x.$$

2.B.1 Entscheiden Sie, für welche $p > 0$ die folgenden Reihen bzw. uneigentlichen Integrale bedingt und absolut konvergent sind

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \quad c)\ \int_1^{\infty} \cos(x^p)\,\mathrm{d}x.$$

2.A.2 Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$(2n-1)!! := 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1), \quad (2n)!! := 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n).$$

Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{2n+1}.$$

2.B.2 Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Zahlenfolge mit dem endlichen Grenzwert a und es sei $x > 0$. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{(x+a_1)(2x+a_2)...(nx+a_n)}$$

auf Konvergenz in Abhängigkeit von a und x.

Aufgabe 3

Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen. Dann gelten die folgenden Konvergenzkriterien für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bertrandsches Kriterium. Es sei

$$B = \lim_{n\to\infty} (\ln n) \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right].$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $B > 1$ konvergent, für $B < 1$ divergent.

Gaußsches Kriterium. Der Quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ lasse sich in der Gestalt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$$

darstellen, wobei λ und μ konstante sind und θ_n eine beschränkte Größe ist. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent für $\lambda > 1$ oder $\lambda = 1$, $\mu > 1$ und divergent für $\lambda < 1$ oder $\lambda = 1$, $\mu \leq 1$.

Ermakoffsches Kriterium. Die gegebene Reihe habe die Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

wobei $f(n)$ der Wert einer für $x \geq 1$ definierten Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = n$ ist. Diese Funktion sei stetig, positiv und monoton fallend für $x > 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn für hinreichend große $x \geq x_0$ die Ungleichung

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q < 1$$

gilt, und divergent, wenn für $x \geq x_0$

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \geq 1$$

gilt.

3.A.1 Beweisen Sie das Bertrandsche und das Gaußsche Kriterium.

Hinweis: Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung 2, S. 262.

3.B.1 Beweisen Sie das Ermakoffsche Kriterium. (Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung 2, S. 268)

3.A.2 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in Abhängigkeit von p und q:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, n^{-p}}{q(q+1)...(q+n)} \qquad p>0,\ q>0.$$

$$b) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\,(\ln\ln n)^p}\,.$$

3.B.2 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in Abhängigkeit von p und q:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p \frac{1}{n^q}\,.$$

$$b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}\,.$$

Aufgabe 4

Diese Aufgabe ist von beiden Gruppen zu bearbeiten.
Es sei

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx, n \in \mathbb{N}.$$

4.1 Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$f_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

4.2 Beweisen Sie die Identität

$$I_n := \int_0^\pi x f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

und berechnen Sie I_{2n-1}.

4.3 Es sei

$$u(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad .$$

Zeigen Sie, dass $0 < u'(x) \leq \frac{1}{2}$ für $0 < x \leq \pi$ gilt.

4.4 Verwenden Sie den Teil 1 dieser Aufgabe um zu beweisen, dass

$$I_{2n-1} = \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\int_0^\pi u'(x)\cos\frac{(4n-1)x}{2}\,\mathrm{d}x\right].$$

4.5 Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$, und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{1}$$

4.6 Leiten Sie aus (1) die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

her.

Aufgabe 5

5.1 (Diese Aufgabe ist von beiden Gruppen zu bearbeiten). Beweisen Sie folgende Behauptung: Es sei $\{a_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge, für welche die Doppelreihe

$$\sum_{k,m\in\mathbb{N}} |a_{k,m}|$$

konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{k,m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,m}$$

5.A.2 Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

5.B.2 Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe 6

6.A Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorentwicklung der Funktionen $\sin x$ und $\ln(x+1)$ im Punkt $x = 0$.

6.B Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorentwicklung der Funktionen $\cos x$ und $\arctan x$ im Punkt $x = 0$.

Aufgabe 7

7.1 (Diese Aufgabe ist von beiden Gruppen zu bearbeiten). Beweisen Sie den Satz von Abel: Ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergent und hat sie die Summe A (im üblichen Sinne), so ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

für $0 < x < 1$ konvergent, und ihre Summe strebt für $x \to 1-0$ gegen den Grenzwert A.

7.A.2 Untersuchen Sie die trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta,$$

für $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\theta \neq 0$ auf Konvergenz nach Poisson bzw. Cesàro und berechnen Sie die entsprechende "verallgemeinerte Summe".

7.B.2 Untersuchen Sie die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta,$$

für $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\theta \neq 0$ auf Konvergenz nach Poisson bzw. Cesàro und berechnen Sie die entsprechende "verallgemeinerte Summe".

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis der Aufgabe 4.1.

Aufgabe 8

8.A.1 Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und es sei

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

8.B.1 Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und es sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

8.A.2 Es sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

absolut konvergent ist. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

$2n-$mal differenzierbar ist, und dass ihre $2n-$te Ableitung sich folgendermaßen darstellen läßt

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

8.B.2 Es sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für welche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{2n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

absolut konvergent ist. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R}$$

$2n-$mal differenzierbar ist, und dass ihre $2n-$te Ableitung sich folgendermaßen darstellen läßt

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

Aufgabe 9

9.A Beweisen Sie die Identität

$$\int_0^1 e^{-x^2} \,\mathrm{d}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

9.B Beweisen Sie die Identität

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}\, x}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n+2}}.$$

Aufgabe 10

Die Eulersche Betafunktion

$$B(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \,\mathrm{d}\, x \quad a,b > 0.$$

lässt sich durch die Substitution $x = \frac{y}{1+y}$ folgendermaßen darstellen

$$B(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} \,\mathrm{d}\, y. \tag{2}$$

10.A Beweisen Sie mit Hilfe der Betafunktion die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\pi}.$$

Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

10.B Zeigen Sie, dass

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\,B\left(\frac{1}{2}\,,a\right),$$

und beweisen Sie damit den Legendresche Verdoppelungssatz

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a),$$

wobei $\Gamma(a)$ die Gammafunktion bezeichnet.