Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II SS 2006

Aufgabe 1

(3P)
a) Betrachten Sie die Funktion

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

und entscheiden Sie, ob diese in den Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$ ein Minimum bzw. ein Maximum annimmt.

b) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $u = \sin x \, \sin y \, \sin z$ unter der Nebenbedingung

$$x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

c) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $u = y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k$ unter der Nebenbedingung

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = nb, \quad b > 0, k > 1.$$

Aufgabe 2

(2P)
a) Gegeben sei die Funktion

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \qquad x,\, y,\, z \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und berechnen Sie die Eigenwerte der Hesse-Matrix in diesen Punkten.

b) Gegeben sei die Funktion

$$u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z), \quad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi,\ 0 \le z \le \pi$$

Entscheiden Sie, von welchen Typ deren kritische Punkte $(\pi/2,\ \pi/2,\ \pi/2)$, (0,0,0) und $(\pi,\ \pi,\ \pi)$ sind. Bestimmen Sie dazu die Eigenwerte der entsprechenden Hesse-Matrizen.

Aufgabe 3

(2P)
Entwickeln Sie das Taylorpolynom für die Funktion

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{\cos y}$$

im Punkt $(0,0)$ bis zu Termen der Ordnung $o(||h||^4)$ sowie für die Funktion

$$g(x, y) = 1 + \text{arccotan}\left(\frac{1 + x + y}{1 - x + y}\right)$$

im Punkt $(0,0)$ bis zu Termen der Ordnung $o(||h||^3)$.