Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I WS 2005/06

Aufgabe 1

(2P) Bestimmen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$ der Folgen

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad b_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Aufgabe 2

(2P) Für $x \in \mathbb{R}^m$ definiert man

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= |x^{(1)}| + \cdots + |x^{(m)}|, \\ \|x\|_2 &:= \left(|x^{(1)}|^2 + \cdots + |x^{(m)}|^2\right)^{1/2}, \\ \|x\|_\infty &:= \max\left\{|x^{(1)}|, \cdots, |x^{(m)}|\right\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ die Normeigenschaften erfüllen und skizzieren Sie die Einheitskreise im $\mathbb{R}^2$ für die jeweils durch $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ induzierten metrischen Räume.

Aufgabe 3

(2P)

1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und X eine Teilmenge von M. Desweiteren bezeichnen $\mathrm{int}(X)$ bzw. $\mathrm{ext}(X)$ die Mengen der inneren bzw. äußeren Punkte von X. Beweisen Sie, dass $\mathrm{int}(X)$ und $\mathrm{ext}(X)$ offene Mengen sind.

2. Beweisen Sie
$$X \cup \partial X = X \cup \mathrm{acc}(X),$$
wobei $\mathrm{acc}(X)$ die Menge der Häufungspunkte von X bezeichnet.