



Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

(2P) Beweisen Sie folgende Identitäten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^4} dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 2

(2P) Integrieren Sie die Funktion $f(z) = (1 + z^n)^{-1}$, $n = 2, 3, \dots$, längs der Grenze des Sektors

$$G := \left\{ z, |z| \leq R, \arg z \leq \frac{2\pi}{n} \right\}$$

und zeigen Sie damit, dass

$$\int_0^{\infty} (1 + x^n)^{-1} dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Aufgabe 3

(2P)

1. Sei $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$. Finden Sie das Bild der Menge G unter der Abbildung

$$z \mapsto w = \cos z.$$

2. Finden Sie das Bild der Menge $\{z : |z| > a > 0\}$ unter der Abbildung

$$z \mapsto w = z + \frac{a^2}{z}.$$