Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

(2P)

1. Finden Sie die ersten drei Glieder der Laurent-Entwicklung der Funktionen

$$f(z) = \cot z \quad \text{und} \quad f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$$

im Punkt $z = 0$ und bestimmen Sie jeweils die Art der Singularität.

2. Finden Sie die Laurent-Entwicklung der Funktionen

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{und} \quad f(z) = e^{-1/z^4}$$

im Punkt $z = 0$ und bestimmen Sie die Art der Singularität.

Aufgabe 2

(3P)

1. Sei $f(z) = e^{z-\frac{1}{z}}$, $0 < |z| < \infty$. Geben Sie eine Formel für die Koeffizienten c_n in der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, z^n$$

an. Wo konvergiert diese Reihe?

2. Beweisen Sie die Identität

$$\int_{\gamma(1,0)} \frac{e^{z-\frac{1}{z}}}{z^{n+1}} \, dz = i \int_0^{2\pi} \cos(2\sin\theta - n\theta)\, d\theta\,,$$

wobei $\gamma(r,a) = \{z \in \mathbb{C},\, |z-a| = r\}$.

3. Zeigen Sie schließlich , dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\sin\theta - n\theta)\, d\theta \;= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\,.$$

Aufgabe 3

(2P) Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ und nicht konstant. Beweisen Sie, dass die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.
Hinweis: betrachten Sie die Funktion $\frac{1}{f(z)-a}$ und verwenden Sie den Satz von Liouville.