Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

(2P) Beweisen Sie den Satz von Liouville für Polynome: Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ und es gelte

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad |f(z)| \leq A + B\,|z|^N, \qquad A, B > 0,\ N \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $f(z)$ ein Polynom (höchstens) $N-$ten Grades.

Aufgabe 2

(2P) Die Funktionen f, g seien durch folgende Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien R_1 bzw. R_2 definiert:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n\,,$$

Beweisen Sie folgende Behauptung:
Sei

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

Dann gilt

$$h(z) = f(z)\, g(z) \quad \forall\, z : |z| < \min\{R_1, R_2\}\,.$$

Aufgabe 3

(2P) Entwicklen Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{z+2}$$

im Punkt $z_1 = 1$ bzw. $z_2 = -i$ in eine Potenzreihe in $(z-1)$ bzw. $(z+i)$ und bestimmen Sie in beiden Fällen den Konvergenzradius.

Aufgabe 4

(2P) Verwenden Sie die Integralformel von Cauchy und berechnen sie folgende Integrale:

$$\int_{\gamma(1,i)} \frac{z^2}{z^2+1}\, dz, \quad \int_{\gamma(2,0)} \frac{e^{i\pi z/2}}{z^2-1}\, dz\,,$$

wobei $\gamma(r,a) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| = r\}$.