



## Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Sei  $\gamma(r, a) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| = r\}$ .

### Aufgabe 1

(2P) Berechnen Sie

$$\oint_{\gamma(1/2,0)} \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \oint_{\gamma(1/2,i)} \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \oint_{\gamma(1/2,-i)} \frac{dz}{z^2 + 1},$$

wobei alle Pfade in der positiven Richtung durchgelaufen werden.

### Aufgabe 2

1. (1P) Berechnen Sie

$$\oint_{\Gamma} |z| \bar{z} dz,$$

wobei der Pfad  $\Gamma$  aus dem Halbkreis  $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  und dem Intervall  $-1 \leq x \leq 1, y = 0$  besteht.

2. (2P) Gegeben sei der Pfad  $\Gamma_{ab}$ , der aus zwei Kreisen und einem Intervall besteht:

$$\Gamma_{ab} = \gamma(1, 0) \cup [1, 2] \cup \gamma(1, 3).$$

Der Pfad  $\Gamma_{ab}$  verbindet die Punkte  $a = (1, 0)$  und  $b = (2, 0)$ . Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Gamma_{ab}} \frac{dz}{z(z-3)},$$

falls die Kurve  $\gamma(1, 3)$  in der positiven bzw. negativen Richtung durchgelaufen wird und vergleichen Sie die Ergebnisse.

### Aufgabe 3

1. (1P) Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_{\gamma_+(R,0)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \pi,$$

wobei  $\gamma_+ := \{z \in \gamma(R, 0), \operatorname{Im} z > 0\}$ .

2. (2P) Beweisen Sie die verbesserte Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma_+(R,0)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = O(R^{-1}).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Ungleichung:

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$