Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

(2P) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x) = \int_{-a}^{a} f(x+t)\,dt\,, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0$$

auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie ihre Ableitung.

Aufgabe 2

1. (2P) Verwenden Sie die Formel

   $$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,, \qquad 0 < a < 1$$

   um das unbestimmte Integral

   $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

   zu berechnen.

2. (2P) Verwenden Sie die Identität

   $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,, \qquad a \geq 1\,, b \geq 1$$

   um den Verdoppelungssatz

   $$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a)\,, \qquad a > 0$$

   zu beweisen.

Aufgabe 3

(2P)
Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \int_{x^3}^{x} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,, \qquad x \in [0,1]$$

und

$$g(x) = \int_{\ln(1+x)}^{e^{x^3}} \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dy\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen.