Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

1. (2P) Es seien $a_k \in \mathbb{R}$ und es sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, a_k\, x^k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

   für $|x| < R$ beliebig oft gliedweise differenzierbar ist.

2. (1P) Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = 2^4\,.$$

Aufgabe 2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{ikx}\,, \quad a_k \in \mathbb{C}\,.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. (2P) Falls $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|$ konvergiert, dann ist f auf $\mathbb{R}$ stetig.
2. (2P) Falls $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k\, a_k|$ konvergiert, dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Aufgabe 3

(2P) Untersuchen Sie die Funktionenfolgen

$$a) \quad f_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2}, \qquad b) \quad f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$$

auf gleichmäßige Konvergenz für $n \to \infty$ bezüglich $x \in [0,1]$. Berechnen Sie in beiden Fällen $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ist $\varphi(x)$ stetig auf $[0,1]$?

Aufgabe 4

(2P) Betrachten Sie die folgenden Doppelfolgen:

$$a) \quad a_{n,m} = \frac{1}{1+n^2+m^2}, \qquad b) \quad a_{n,m} = \frac{1}{1+e^{n-m}}\,.$$

Entscheiden Sie, ob

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

gilt und warum. Bestimmen Sie dazu den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,n}\,.$$