Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

(3P) Finden Sie den Flächeninhalt des Teils der Halbkugeloberfläche $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $R > 0$, $z \geq 0$, der in dem zur $z-$Achse parallelen Kreiszylinder $(x - R/2)^2 + y^2 = R^2/4$ liegt.

Aufgabe 2

(2P) Gegeben sei das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x, y, y(x^2 + y^2)^2)^T$. Berechnen Sie das Integral $\int\int_S F\vec{d}\sigma$, wobei S die Oberfläche des Zylinders $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ bezeichnet.

Aufgabe 3

(2P) Gegeben sei das Vektorfeld $v(x, y, z) = (x(x^2 + y^2 + z^2), y(x^2 + y^2 + z^2), z(x^2 + y^2 + z^2))^T$. Ferner sei ∂B die Kugeloberfläche der Einheitskugel. Berechnen Sie das Integral

$$\int\int_{\partial B} v\,\vec{d}\sigma$$

einmal direkt und einmal mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

Aufgabe 4

(2P) Das Vektorfeld V sowie das Skalarfeld Φ seien der Klasse C^2. Beweisen Sie folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\Phi V) &= (\operatorname{grad}\Phi)\cdot V + \Phi(\operatorname{div} V),\\
\operatorname{rot}(\Phi V) &= (\operatorname{grad}\Phi)\times V + \Phi(\operatorname{rot} V),\\
\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi &= \Delta\Phi\,.
\end{aligned}$$