Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

(2P) Berechnen Sie das Kurvenintegral über $F = \nabla f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $f(x, y, z) = xyz$, entlang der nachfolgenden Wege:

(a) $\gamma(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t, 3) \quad , 0 \leq t \leq 2\pi.$

(b) $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, t) \quad , 0 \leq t \leq \pi/4.$

Aufgabe 2

(2P) Gegeben Sei $f(x, y, z) = xe^y \cos(\pi z)$.

(a) Berechnen Sie $F := \nabla f$.

(b) Berechnen Sie $\int_\gamma F\vec{ds}$, wenn $\gamma(t) := (3\cos^4 t, 5\sin^7 t, 0) \quad 0 \leq t \leq \pi$.

(c) Berechnen Sie $\int_\gamma F\vec{ds}$, wenn $\gamma(t) := (3\cos^4 t, 5\sin^7 t, 0) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$.

Aufgabe 3

(3P) Gegeben sei das Vektorfeld $F(x, y, z) = (z^2 - y\sin x, \cos x - 2z, 2xz - 2y + z)$ im $\mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass F ein Gradientenfeld ist und finden Sie eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$F = \nabla\varphi\,.$$

Aufgabe 4

(2P) Die Vektorfelder V, W sowie das Skalarfeld Φ seien der Klasse C^2. Beweisen Sie folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\nabla\Phi) &= 0\,,\\
\operatorname{div}(V \times W) &= W \cdot (\operatorname{rot} V) - V \cdot (\operatorname{rot} W),\\
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} V) &= \operatorname{grad}\operatorname{div} V - \Delta V,\\
\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) &= 0\,,
\end{aligned}$$

wobei $\Delta V = (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)$.