



## Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III

### Aufgabe 1

(2P) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$  in Polarkoordinaten.

### Aufgabe 2

(3P)

1. Die Zylinderkoordinaten  $(r, \phi, z)$  im  $\mathbb{R}^3$  sind durch die Transformation

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z, \quad r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Berechnen Sie den Jakobian dieser Transformation.

2. Die Kugelkoordinaten  $(r, \phi, \theta)$  im  $\mathbb{R}^3$  sind durch die Transformation

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$$

gegeben. Berechnen Sie den Jakobian dieser Transformation.

3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k,x)}}{|x|^2} dx_1 dx_2 dx_3,$$

wobei  $k, x \in \mathbb{R}^3$  und  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet.

### Aufgabe 3

(2P) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iiint_K \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$$

über das Tetraeder  $K$ , das von den Ebenen  $x=0, y=0, z=0$  und  $x+y+z=1$  begrenzt wird.

### Aufgabe 4

(2P) Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$