Vortragsübung zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die ersten 3 (nichtverschwindenden) Glieder der Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \coth(z)$$

im Punkt $z = 0$ und bestimmen Sie die Art der Singularität.

Aufgabe 2

Beweisen Sie das Schwarzsche Lemma:
Sei f holomorph in $U_R(0)$, $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq M$ auf $\overline{U}_R(0)$. Dann gilt

$$f(z) \leq \frac{M}{R}|z| \qquad |z| \leq R\,.$$

Gilt sogar Gleichheit für ein z mit $|z| < R$, so gibt es eine reelle Konstante λ mit $f = Mz\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}/R$ für alle $z \in U_R(0)$.

Aufgabe 3

Setzen Sie die Funktion

$$\ln z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n\,, \qquad \text{für } |z-1| < 1$$

durch Potenzreihenumwandlung auf den Polygonzug $-1, -\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, -1$ fort.