Vortragsübung zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1

Seien a_n, $n \in \mathbb{N}$ positive Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

eine stetige Funktion auf $[x_0, \infty)$ ist, falls die Reihe für $x = x_0$ konvergiert.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktionenfolgen

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}\,, \quad g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2}} = f_n'(x)$$

für $n \geq 1$ und $x \neq 0$. Bestimmen Sie die Grenzfunktionen f und g bezgl. punktweiser Konvergenz. Konvergieren die Folgen gleichmäßig? Welcher Zusammenhang besteht zwischen f und g?

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden Doppelfolgen:

$$a) \quad a_{n,m} = \frac{nm}{n^2 + m}, \qquad b) \quad a_{n,m} = \frac{nm}{n^2 + m^2}\,.$$

Entscheiden Sie, ob

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

gilt und warum. Bestimmen Sie zusätzlich für $k \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,kn}\,.$$