Vortragsübung zur Vorlesung Höhere Mathematik III

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Fläche im $\mathbb{R}^2$, die von den Kurven

$$\varphi_1(t) = (t\cosh \pi/2, t\sinh \pi/2) \tag{1}$$

$$\varphi_2(t) = (t\cosh -\pi/2, t\sinh -\pi/2) \tag{2}$$

$$\varphi_3(t) = (\cosh t, \sinh t) \tag{3}$$

berandet wird.

Aufgabe 2. Es sei D das durch die Ellipsen $x^2 + 9y^2 = 9$ und $x^2 + 9y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im ersten Quadranten der xy-Ebene.

a) Finden Sie eine Transformation von D auf ein Rechteck.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$ der Transformation.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von a) und b) die Fläche von D und das Integral

$$I = \iint_D \frac{xy}{x^2 + 9y^2}\, dx\, dy \; .$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Länge der Kardioide

$$r = a(1 + \cos\varphi)\, ,\; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Aufgabe 4. Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\dfrac{z}{x} \\ \dfrac{z}{y} \\ \ln(xy) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K die Parametrisierung

$$C\colon [-1,1] \to K : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{(t^2)} \\ 1 \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

besitzt.