Universität Stuttgart
Fakultät Mathematik und Physik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Blatt III

Arbeitsblatt III zur Vorlesung HM 3 WS 2006/07

Abgabe: 16.2.2007, 15:00 Uhr.

Aufgabe 1

(4P)

1. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der von der folgenden Fläche begrenzt wird
$$(x^2+y^2)^2+z^4=y\,.$$
Hinweis: Wenden Sie die Kugelkoordinaten an.

2. Gegeben seien das Vektorfeld
$$v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad v(x,y,z):=(y(1+z),z(2+x),x(y-1))^T$$
und die geschlossene Kurve
$$\gamma(t):=(a\cos t,a\cos t,a\sin t)^T\quad t\in[0,2\pi]\,.$$
Desweiteren sei F die (endliche) Figur, die von γ eingeschlossen wird. Berechnen Sie die Integrale
$$\oint_\gamma v\,\vec{ds},\quad\text{und}\quad\int\int_F \operatorname{rot} v\,\vec{d\sigma}$$
und verifizieren Sie in diesem Spezielfall den Satz von Stokes.

3. Im $\mathbb{R}^2$ seien gegeben folgende Vektorfelder:
$$v_1(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)^T,\quad v_2=(\sin^2 y+2y\sin x\cos x,\ 2x\sin y\cos y-\cos^2 x)^T\,.$$
Desweiteren sei γ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve im $\mathbb{R}^2$, die um den Ursprung einmal positiv umläuft. Berechnen Sie das Integral
$$\oint_\gamma(\alpha\,v_1+\beta\,v_2)\,\vec{ds}\,,\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,.$$
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Stokes.

Aufgabe 2

(3P) Finden Sie die Lösungen $y = y(x)$ folgender Cauchy-Probleme

$$(x^2 - 1)y' + 2xy = 0\,, \quad y(0) = 1\,,$$

$$xy' + y = y^2\,, \quad y(1) = \frac{1}{2}\,.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$x^2 y' - \cos 2y = 1\,,$$

welche die Bedingung

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{9}{4}\,\pi$$

erfüllen.

Aufgabe 3

(4P) Finden Sie sämtliche Lösungen $y = y(x)$ folgender Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
y' + y\,\tan x &= \frac{1}{\cos x}\,, \qquad x \neq k\,\pi/2\,, && (1)\\
(2x+1)y' &= 4x + 2y\,, && (2)\\
\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,y' + \sqrt{y^2+1} &= x^2 + 1\,, && (3)\\
e^{-x}\,y' - e^{-x} &= e^y\,. && (4)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(4P) Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
y'' - 2y' + y &= \frac{e^x}{x}\,, \qquad x \neq 0\,, && (5)\\
x^3(y'' - y) &= x^2 - 2\,, && (6)\\
y'' - 3y' + 2y &= 2^x\,, && (7)\\
y''' - 4y'' + 3y' &= x^2 + xe^{2x}\,. && (8)
\end{aligned}$$