Arbeitsblatt I zur Vorlesung HM 3 WS 2006/07

Abgabe: 20.12.2006

Aufgabe 1

(3P)

1. Zeigen Sie, dass die Menge der gebrochen-linearen Abbildungen $\phi : z \to w$ auf der erweiterten Zahlenebene

$$\phi(z) = w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{1}$$

eine Gruppe bezüglich der Komposition bildet.

2. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten der Abbildung (1) erfüllen, damit w den Einheitskreis um den Ursprung auf die obere Halbebene abbildet?

3. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten der Abbildung (1) erfüllen, damit w den Einheitskreis um den Ursprung in sich selbst abbildet?

Aufgabe 2

(4P) Es sei $\gamma(r,a) := \{z,\, |z-a| = r\}$. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale:

1.
$$\oint_{\gamma(2,2)} \frac{z\, e^z \,\mathrm{d}z}{(z-1)^3}.$$

2.
$$\oint_{\gamma(1/2,0)} \frac{e^z \,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}, \quad \oint_{\gamma(1/2,1)} \frac{e^z \,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}, \quad \oint_{\gamma(2,1)} \frac{e^z \,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}.$$

Aufgabe 3

(6P)

1. Beweisen Sie die Jordansche Ungleichung:

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1, \quad \text{für} \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

2. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Funktion e^{iz^2} längs der Umrandung des Sektors $0 \leq |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ und verwenden Sie die Jordansche Ungleichung.

3. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-b^2}\,, \quad b > 0.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Funktion e^{-z^2} längs der Umrandung des Rechtecks $|x| \leq R$, $0 \leq y \leq b$.

Aufgabe 4

(4P)

1. Gegeben sei die Funktion $f(z)$, welche für

$$0 < |z-a| \leq R, \quad 0 \leq \arg(z-a) \leq \alpha, \ (0 < \alpha \leq 2\pi)$$

stetig ist und es gelte

$$\lim_{z \to a} [(z-a)f(z)] = A.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = i\alpha\,A\,,$$

wobei $\gamma_r := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| = r,\ 0 < \arg(z-a) \leq \alpha\}, \quad r < R.$

2. Verwenden Sie das Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe um zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 5

(4P)

1. Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$$

konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert.

2. Verwenden Sie das Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe um zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2\,.$$

Aufgabe 6

(3P) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, e^{-xy} \, dx$$

für $y > 0$ differenzierbar ist und berechnen Sie ihre Ableitung. Bestimmen Sie desweiteren den Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx \, .$$