Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Matthias Künzer

Universität Stuttgart

Wintersemester 2018/19

Inhalt

Vorwort

In der Vorlesung sollen grundlegende mathematische Fähigkeiten vermittelt werden. Vorausgesetzt wird Abiturwissen, wenn wir auch Teile davon wiederholen werden.

Kleingedruckte Bemerkungen sind nicht Teil des Pflichtstoffs.

Für Hinweise auf Fehler und Unklarheiten bin ich dankbar.

Stuttgart, Wintersemester 2018/19

Matthias Künzer

Kapitel 1

Zahlen

1.1 Reelle Zahlen

1.1.1 Begriff

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen besteht aus den beliebigen Dezimalbrüchen, die

$$\pm a_n a_{n-1} \ldots a_0\,,\ a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$$

mit ganzen Zahlen $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ geschrieben werden, wobei $n \geqslant 0$. So z.B. sind $-2 = -2{,}00\ldots$, $7/8 = 0{,}87500\ldots$, $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$ und π $(= 3{,}14159\ldots)$ reelle Zahlen.

Sind r, $s \in \mathbb{R}$, so können wir $r + s$, $r - s$, $r \cdot s$ und, falls $s \neq 0$, auch r/s in $\mathbb{R}$ bilden.

Reelle Zahlen können miteinander verglichen werden, ggf. ist $r \leqslant s$ resp. $r < s$.

1.1.2 Teilmengen von $\mathbb{R}$

Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir $\mathbb{R}_{>a} := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\}$. Etc.

Für a, $b \in \mathbb{R}$ schreiben wir die *Intervalle*

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\} \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}\,. \end{array}$$

Üblich ist auch $(a,\infty) := \mathbb{R}_{>a}$ für das unendliche Intervall, etc. Auch $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ selbst gilt als Intervall.

Wir haben die Teilmengen

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Hierbei besteht $\mathbb{Z}$ aus den ganzen Zahlen, d.h. den reellen Zahlen, deren Nachkommastellen gleich 0 sind.

Ferner besteht $\mathbb{Q}$ aus den rationalen Zahlen, d.h. den Brüchen ganzer Zahlen. Dies sind die abbrechenden oder aber periodischen Dezimalbrüche.

1.1.3 Summennotation

Seien $k,\ \ell\ \in\ \mathbb{Z}$.

Ist $k \leqslant \ell$ und ist für $i \in \mathbb{Z}$ mit $k \leqslant i \leqslant \ell$ je eine reelle Zahl $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben, so verwenden wir die Summennotation

$$\sum_{i=k}^{\ell} x_i \ := \ x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_\ell \ .$$

Dazuhin setzen wir $\sum_{i=k}^{\ell} x_i := 0$ falls $k > \ell$.

Z.B. wird $\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$.

1.1.4 Potenzen

Ist $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$, so setzen wir

$$x^k \ := \ \begin{cases} x \cdot x \cdots x & \text{mit } k \text{ Faktoren, falls } k \geqslant 1 \\ 1 & \text{falls } k = 0 \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots \frac{1}{x} & \text{mit } -k \text{ Faktoren, falls } x \neq 0 \text{ und } k \leqslant -1\ . \end{cases}$$

Insbesondere ist also $0^0 = 1$.

1.1.5 Betrag

Von $r \in \mathbb{R}$ können wir den *Betrag*

$$|r| \ := \ \begin{cases} r & \text{falls } r \geqslant 0 \\ -r & \text{falls } r < 0 \end{cases}$$

bilden.

1.2 Binomiales

1.2.1 Binomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ schreiben wir $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, gesprochen "$n$ Fakultät". Ferner setzen wir $0! := 1$. Z.B. ist $4! = 24$.

Für $a,\, b \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$\binom{a}{b} := \begin{cases} \frac{a!}{b!(a-b)!} & \text{falls } 0 \leqslant b \leqslant a \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gesprochen "a über b".

Z.B. ist $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6$.

Z.B. ist $\binom{a}{0} = \frac{a!}{0!a!} = 1$ und $\binom{a}{a} = \frac{a!}{a!0!} = 1$ für $a \geqslant 0$.

Für $0 \leqslant b \leqslant a$ ist $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{a-b}$. Z.B. ist $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10$.

Ist $1 \leqslant b \leqslant a$, so ist

$$\binom{a}{b-1} + \binom{a}{b} = \frac{a!}{(b-1)!(a-b+1)!} + \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!(b+(a-b+1))}{b!(a-b+1)!} = \frac{(a+1)!}{b!((a+1)-b)!} = \binom{a+1}{b} .$$

Ferner ist $\binom{a}{-1} + \binom{a}{0} = 0 + 1 = \binom{a+1}{0}$ und $\binom{a}{a} + \binom{a}{a+1} = 1 + 0 = \binom{a+1}{a+1}$.

Insgesamt ist also für $0 \leqslant b \leqslant a+1$

$$\binom{a}{b-1} + \binom{a}{b} = \binom{a+1}{b} .$$

Dies liefert das (links und rechts um Nullen ergänzte) *Pascalsche Dreieck*

$$\begin{array}{c} \binom{0}{-1}\binom{0}{0}\binom{0}{1} \\ \binom{1}{-1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{2} \\ \binom{2}{-1}\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{2}{3} \\ \binom{3}{-1}\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}\binom{3}{4} \\ \binom{4}{-1}\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}\binom{4}{5} \\ \cdots \end{array} = \begin{array}{c} 0\quad 1\quad 0 \\ 0\quad 1\quad 1\quad 0 \\ 0\quad 1\quad 2\quad 1\quad 0 \\ 0\quad 1\quad 3\quad 3\quad 1\quad 0 \\ 0\quad 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\quad 0 \\ \cdots \end{array}$$

In diesem gibt die Summe aus je zwei horizontal benachbarten Einträgen den mittig darunterstehenden.

1.2.2 Binomischer Lehrsatz

Lemma (Binomischer Lehrsatz). Seien $x,\, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ gegeben. Dann ist

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 y^n .$$

Z.B. ergibt sich folgendes.

$$\begin{array}{rcl} (x+y)^0 &=& \binom{0}{0} x^0 y^0 &=& 1 \\ (x+y)^1 &=& \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 &=& x+y \\ (x+y)^2 &=& \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 &=& x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &=& \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 &=& x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &=& \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4 &=& x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4 \end{array}$$

Kapitel 2

Abbildungen

2.1 Allgemeines

Seien X, Y und Z Mengen.

2.1.1 Begriffe

Es bezeichnet $\emptyset$ die leere Menge, die kein Element enthält.

Schreibe $X \times Y := \{(x, y) \ : \ x \in X, \ y \in Y\}$ für das *kartesische Produkt* von X und Y.

Schreibe $X^n = X \times \cdots \times X = \{(x_1\,, \ \ldots \ , x_n) \ : \ x_i \in X\}$ für das kartesische Produkt aus n Faktoren, wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Seine Elemente heißen n-*Tupel* aus Elementen von X. Wir setzen noch $X^0 := \{()\}$, mit dem leeren Tupel als einzigem Element.

So etwa bezeichnet $\mathbb{R}^n$ die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen.

Eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ ein Element von $f(x) \in Y$ zuordnet, heißt *Abbildung* oder *Funktion,* geschrieben $f : X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f(x)$.

Z.B. ist $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto q(x) := x^2$ eine Abbildung.

Z.B. ist $h : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$ eine Abbildung.

Z.B. ist $k : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 4$, $5 \mapsto 3$ eine Abbildung.

Es heißt $\mathrm{id} = \mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto x$ die *identische* Abbildung.

Es heißt X die *Startmenge* oder der *Definitionsbereich* von $f : X \longrightarrow Y$.

Es heißt Y die *Zielmenge* oder der *Wertebereich* von $f : X \longrightarrow Y$.

Für $U \subseteq X$ schreiben wir $f(U) := \{f(u) \ : \ u \in U\} \subseteq Y$ für das *Bild von U unter f.*

Für $V \subseteq Y$ schreiben wir $f^{-1}(V) := \{x \in X \ : \ f(x) \in V\}$ für das *Urbild von V unter f.*

Z.B. ist $k(\{1, 2, 5\}) = \{1, 3\}$. Z.B. ist $k^{-1}(\{1, 2, 4\}) = \{2, 3, 4\}$.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Seien $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ mit $f(U) \subseteq V$ gegeben. Die dementsprechende *Einschränkung* von f ist als $f|_U^V : U \longrightarrow V$, $u \longmapsto f(u)$ definiert.

Ist $V = Y$, so schreiben wir auch $f|_U := f|_U^Y$.

Der *Graph* einer Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ sei definiert als

$$\Gamma_f \; := \; \{(x, f(x)) \; : \; x \in X\} \; \subseteq \; X \times Y \; .$$

Funktionen $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ werden punktweise addiert und multipliziert, $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $fg = f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

2.1.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung

Besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus wenigstens einem Element für alle $y \in Y$, so heißt f *surjektiv.*

Besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus höchstens einem Element für alle $y \in Y$, so heißt f *injektiv.*

Besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus genau einem Element für alle $y \in Y$, so heißt f *bijektiv.*

Es ist also f genau dann surjektiv, wenn $f(X) = Y$. Es ist f genau dann injektiv, wenn verschiedene Elemente stets auf verschiedene Elemente abgebildet werden. Es ist f genau dann bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so gibt es die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ mit der Eigenschaft, daß $f(x) = y$ genau dann gilt, wenn $x = f^{-1}(y)$.

Der Zusammenhang zur Urbildoperation ist diesenfalls: $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Z.B. ist obiges h nicht surjektiv wegen $h^{-1}(\{2\}) = \emptyset$, d.h. wegen $2 \notin h(\{1,2,3\})$. Ferner ist h nicht injektiv, da $h^{-1}(\{1\}) = \{1,2\}$ mehr als nur ein Element aufweist, d.h. da $1 \neq 2$, aber $h(1) = h(2)$.

Z.B. ist obiges q weder injektiv (z.B. da $q(-1) = q(1)$) noch surjektiv (z.B. da $-1 \notin q(\mathbb{R})$), aber seine Einschränkung $q_+ := q|_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}^{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}$ ist bijektiv, mit $(q_+)^{-1} : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $y \longmapsto \sqrt{y}$.

2.1.3 Schnitt und Vereinigung

Seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Wir erinnern an den Begriff des Schnitts $A \cap B = \{\, x \in X \; : \; x \in A \text{ und } x \in B \,\}$, der Vereinigung $A \cup B = \{\, x \in X \; : \; x \in A \text{ oder } x \in B \,\}$ und der Differenz $A \smallsetminus B = \{\, x \in X \; : \; x \in A, \text{ aber } x \notin B \,\}$.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Seien $U_1, U_2 \subseteq X$.

Es ist $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$.

Es ist $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$. Gleichheit gilt hier, falls f injektiv ist, sonst im allgemeinen nicht.

Seien V_1 , $V_2 \subseteq Y$.

Es ist $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$.

Es ist $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$.

2.1.4 Kompositum

Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Ihr *Kompositum,* auch *Verkettung* genannt, ist durch

$$g \circ f \;:\; X \longrightarrow Z\;, \quad x \longmapsto (g \circ f)(x) \;:=\; g(f(x))$$

definiert (gesprochen "g nach f").

2.2 Folgen und Grenzwerte

2.2.1 Folgen

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Sei Y eine Menge. Eine Abbildung $f : \mathbb{Z}_{\geqslant k} \longrightarrow Y$ heißt auch eine *Folge* und wird auch

$$f \;=:\; (f(n))_{n \geqslant k} \;=\; (f_n)_{n \geqslant k} \;=\; (f_n)_n \;=\; (f_k\,,\, f_{k+1}\,,\, f_{k+2}\,,\, \dots)$$

geschrieben.

Ist $Y = \mathbb{R}$, so spricht man auch von einer *reellen Folge.*

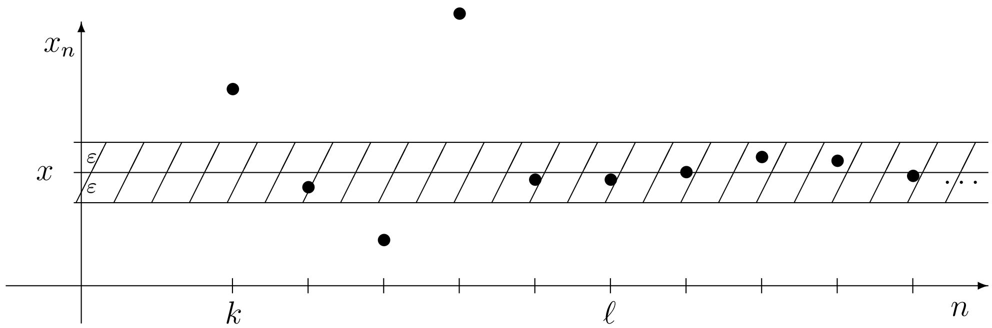
So z.B. ist $(1/n)_{n \geqslant 1} = (1/1, 1/2, 1/3, \dots)$ eine reelle Folge.

2.2.2 Grenzwerte

Sei $(x_n)_{n \geqslant k}$ eine reelle Folge. Es heißt $x \in \mathbb{R}$ ihr *Grenzwert* oder *Limes,* falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant k}$ mit $|x - x_n| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$ existiert. Diesenfalls ist dieser eindeutig bestimmt und wird

$$\lim_{n \to \infty} x_n \;=\; \lim_n x_n \;:=\; x$$

geschrieben.



Es ist x also ein Grenzwert von $(x_n)_n$, falls für jede beliebig kleine Fehlerschranke ε eine Stelle ℓ gefunden werden kann, ab der der Abstand $|x - x_n|$ diese Fehlerschranke nicht mehr überschreitet.

Eine reelle Folge $(x_n)_n$ *konvergiert* oder *ist konvergent,* falls sie einen Grenzwert hat. Sie *divergiert* oder *ist divergent,* falls sie keinen Grenzwert hat.

Grenzwerte werden üblicherweise berechnet, indem man mittels Regeln die zu betrachtende Folge auf bekannte Beispiele zurückführt.

Beispiel.

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die konstante Folge $(x)_n = (x, x, x, \ldots)$ gegen x, d.h. $\lim_{n\to\infty} x = x$.

(2) Sei $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Es ist 0 der Grenzwert von $(n^{-a})_{n\geqslant 1}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} n^{-a} = 0$. Denn für gegebenes $\varepsilon > 0$ ist $|n^{-a} - 0| < \varepsilon$, falls $n > 1/\sqrt[a]{\varepsilon}$. Als ℓ kann somit jede ganze Zahl $\geqslant 1/\sqrt[a]{\varepsilon}$ gewählt werden.

(3) Sei $q \in (-1, 1)$. Es ist 0 der Grenzwert von $(q^n)_{n\geqslant 0}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Dazu können wir $h := 1/|q| - 1 > 0$ setzen und erhalten $|q| = 1/(1 + h)$, gemäß binomischem Lehrsatz aus §1.2.2 also $|q^n - 0| = |q|^n = 1/(1+h)^n \leqslant 1/(1+nh)$. Daher erhalten wir für $\varepsilon > 0$ bereits $|q^n - 0| < 1/(1 + nh) < \varepsilon$, falls nur $n > (\varepsilon^{-1} - 1)/h$ ist, sodaß wir für ℓ jede ganze Zahl $\geqslant (\varepsilon^{-1} - 1)/h$ wählen können.

Bemerkung. Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ konvergente reelle Folgen. Seien λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) &= \lambda(\lim_{n\to\infty} x_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} y_n) \\ \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) &= (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n) \end{aligned}$$

Ist $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ und ist $y_n \neq 0$ stets, dann gilt auch

$$\frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} .$$

So wird z.B.

$$\lim_n \frac{3n^2+4}{2n^2+3n} \;=\; \lim_n \frac{3+4n^{-2}}{2+3n^{-1}} \;=\; \frac{\lim_n 3 + 4\lim_n n^{-2}}{\lim_n 2 + 3\lim_n n^{-1}} \;=\; \frac{3}{2}\,.$$

Bemerkung. Sei $(x_n)_{n\geqslant k}$ eine reelle Folge mit Grenzwert x. Sei $\ell \geqslant k$. Dann ist auch die (vorne abgeschnittene) Folge $(x_n)_{n\geqslant \ell}$ konvergent und hat den Grenzwert x.

Lemma. Sei $(x_n)_n$ eine reelle Folge mit $x_n \leqslant x_{n+1}$ stets. Gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leqslant s$ für alle n, dann konvergiert $(x_n)_n$.

Als Grenzwert ergibt sich hier der "minimale Wert, der nicht von Folgengliedern überlaufen wird". Genauer kennen wir ihn aber im allgemeinen nicht!

Lemma (Sandwich). Seien $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ und $(z_n)_n$ reelle Folgen. Sei $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ stets. Seien $(x_n)_n$ und $(z_n)_n$ konvergent mit $\lim_n x_n = \lim_n z_n$. Dann ist auch $(y_n)_n$ konvergent, und es ist

$$\lim_n x_n \;=\; \lim_n y_n \;=\; \lim_n z_n\,.$$

Beispiel. Da $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ stets, und da die äußeren beiden Folgen gegen 0 konvergieren, ist auch $\lim_n \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

2.3 Reihen

2.3.1 Begriff

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine *(reelle) Reihe* ist eine reelle Folge der Form

$$\textstyle\sum_{i\geqslant k} a_i \;:=\; (\sum_{i=k}^n a_i)_{n\geqslant k} \;=\; (a_k\,,\, a_k + a_{k+1}\,,\, a_k + a_{k+1} + a_{k+2}\,,\, \dots)\,,$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$ für $i \geqslant k$.

Es handelt sich also um eine Folge von Teilsummen der nun zu definierenden "unendlichen Summe".

Existiert ihr Grenzwert, so schreiben wir diesen

$$\textstyle\sum_{i=k}^\infty a_i \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=k}^n a_i \;=\; a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots\,.$$

Lemma. Konvergiert $\sum_{i\geqslant k} |a_i|$, dann konvergiert auch $\sum_{i\geqslant k} a_i$.

2.3.2 Geometrische Summe, geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir haben die *geometrische Summe*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\;,$$

denn $(1-q)(\sum_{i=0}^n q^i) = (\sum_{i=0}^n q^i) - q(\sum_{i=0}^n q^i) = (\sum_{i=0}^n q^i) - (\sum_{i=1}^{n+1} q^i) = q^0 - q^{n+1}$.
Diese liefert für $q \in (-1,+1)$ die *geometrische Reihe* $\sum_{i\geqslant 0} q^i$ mit Grenzwert

$$\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} q^i \;=\; \lim\limits_n \sum_{i=0}^n q^i \;=\; \lim\limits_n \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \;=\; \dfrac{1-\lim_n q^{n+1}}{1-q} \;=\; \dfrac{1}{1-q}\;.$$

So z.B. ist $\sum_{i=0}^{\infty} (1/2)^i = 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$.

2.3.3 Exponentialfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} x^n/n!$, sodaß wir die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die *Exponentialreihe*

$$\mathrm{e}^x \;=\; \exp(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

definieren können.

Begründen wir die Konvergenz.

Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $|x| < n$ gewählt. Für $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant n}$ ist

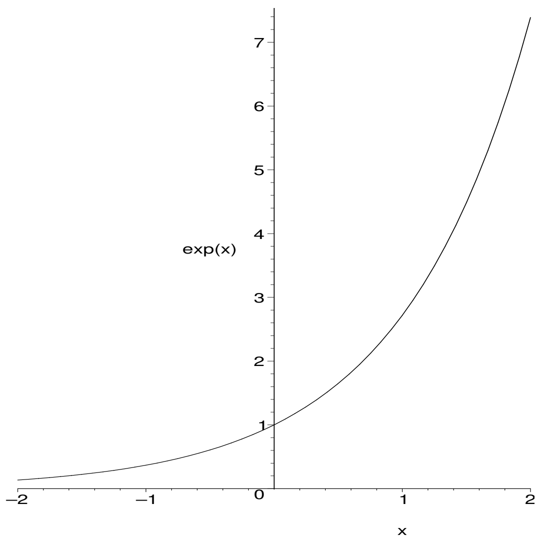
$$\frac{|x^{m+1}/(m+1)!|}{|x^m/m!|} \;=\; |x|/(m+1) \;<\; |x|/n \;=:\; q\;.$$

Die Summanden wachsen von n an also langsamer als die der Reihe $\sum_{m\geqslant n} q^n c$ mit $c \in \mathbb{R}_{>0}$ konstant. Da letztere konvergiert, konvergiert auch erstere; vgl. §2.3.2 und erstes Lemma in §2.2.2.

Für allgemeines $x \in \mathbb{R}$ vgl. nun das Lemma aus §2.3.1.

Z.B. ist $\mathrm{e}^0 = 1$. Es ist $\mathrm{e} := \mathrm{e}^1 = \exp(1) = 2{,}71828182845\ldots$.

Der Graph der Exponentialfunktion exp hat folgende Gestalt.



Um die Exponentenschreibweise e^x zu rechtfertigen, sollten wir begründen, daß

$$\mathrm{e}^{x+y} \;=\; \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$$

ist für $x,\, y \in \mathbb{R}$. Dazu rechnen wir

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y & = & \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \\
& = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\,\frac{y^n}{n!} \\
& \overset{k := m+n}{=} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}\,\frac{y^{k-m}}{(k-m)!} \\
& = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!}\, x^m y^{k-m} \\
& = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}\, x^m y^{k-m} \\
& \overset{\S 1.2.2}{=} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k \\
& = & \mathrm{e}^{x+y}\,.
\end{array}$$

Um die Gültigkeit dieser Rechnung zu belegen, müßte man sich noch die Erlaubnis zu diesem Umsortieren der Summanden besorgen.

Nun folgt $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1$, und somit $\mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)^{-1}$.

Insbesondere ist e^z für $z \in \mathbb{Z}$ in der Tat die z-te Potenz von e im üblichen Sinne.

Es folgt auch, daß $\mathrm{e}^x > 0$ ist für $x \in \mathbb{R}$. Denn ist $x \geqslant 0$, so entnimmt man dies der Definition. Ist dagegen $x < 0$, so ist $\mathrm{e}^x = 1/\mathrm{e}^{-x} > 0$.

Die die Exponentialfunktion definierende Reihe ist ein Beispiel einer *Potenzreihe.* Einiges mehr dazu in §8.1 und §11.2.1.

2.4 Stetigkeit

2.4.1 Abstände im $\mathbb{R}^n$

Sei $n \geqslant 1$. Wir schreiben $\underline{x} := (x_1\,, \ldots\,, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Solche Tupel sollen eintragsweise addiert und subtrahiert werden, also

$$\begin{array}{rcl} \underline{x} + \underline{y} & := & (x_1 + y_1\,, \ldots\,, x_n + y_n)\,, \\ \underline{x} - \underline{y} & := & (x_1 - y_1\,, \ldots\,, x_n - y_n) \end{array}$$

für $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$.

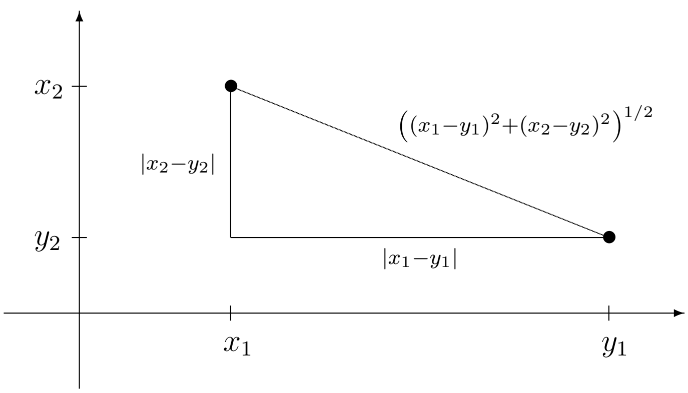
Wir schreiben

$$\|\underline{x}\| \;=\; \|(x_1\,, \ldots\,, x_n)\| \;:=\; (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}\,.$$

für die *Norm* von $\underline{x}$. Es ist

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \;=\; \big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\big)^{1/2}$$

der *Abstand* von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ in $\mathbb{R}^n$.



Z.B. ist der Abstand von $(-1, 2, 3)$ und $(1, 1, 1)$ gleich

$$\|(-1-1,\, 2-1,\, 3-1)\| \;=\; \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \;=\; \sqrt{9} \;=\; 3\,.$$

Wir identifizieren $\mathbb{R}$ auch mit $\mathbb{R}^1$, indem wir kurz $x_1 := (x_1)$ schreiben für das einelementige Tupel mit dem Eintrag $x_1 \in \mathbb{R}$. Es wird $\|(x_1)\| = |x_1|$.

2.4.2 Stetigkeit von Funktionen in einer oder mehreren Variablen

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1\,, \ldots\,, x_n) \longmapsto f(x_1\,, \ldots\,, x_n)$ eine auf dem Definitionsbereich D erklärte Abbildung. Es ist f also eine Funktion in n Veränderlichen.

Beispiel. Das Volumen eines Kegels mit Höhe h und kreisförmiger Grundfläche mit Radius r berechnet sich zu $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Es ist $V : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ also eine Funktion in den beiden Veränderlichen r und h; erklärt nur auf $(r,h) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, damit das noch einen geometrischen Sinn hat.

Unsere Funktion f wollen wir als stetig bezeichnen, wenn "keine Sprünge" auftreten, d.h. keine plötzlichen Änderungen des Funktionswertes. Was also vermieden werden sollte, ist, daß bei einer kleinen Änderung der Veränderlichen eine unmäßig große Änderung des Wertes von f auftritt. Dies formalisiert man wie folgt.

Definition. Es heiße f *stetig* an der Stelle $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, daß für alle $\tilde{\underline{x}} \in D$ mit $\|\tilde{\underline{x}} - \underline{x}\| < \delta$ auch

$$|f(\tilde{\underline{x}}) - f(\underline{x})| \;=\; |f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \;<\; \varepsilon$$

ist.

Umformuliert lautet die Bedingung, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existieren soll mit

$$f(\{\tilde{\underline{x}} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\tilde{\underline{x}} - \underline{x}\| < \delta\}) \;\subseteq\; \{\, y \in \mathbb{R} \,:\, |y - f(\underline{x})| < \varepsilon \,\}\,.$$

Ist also $\tilde{\underline{x}}$ nur nahe genug bei $\underline{x}$ (Abstand $< \delta$), so sollte auch $f(\tilde{\underline{x}})$ nahe bei $f(\underline{x})$ sein (Abstand $< \varepsilon$).

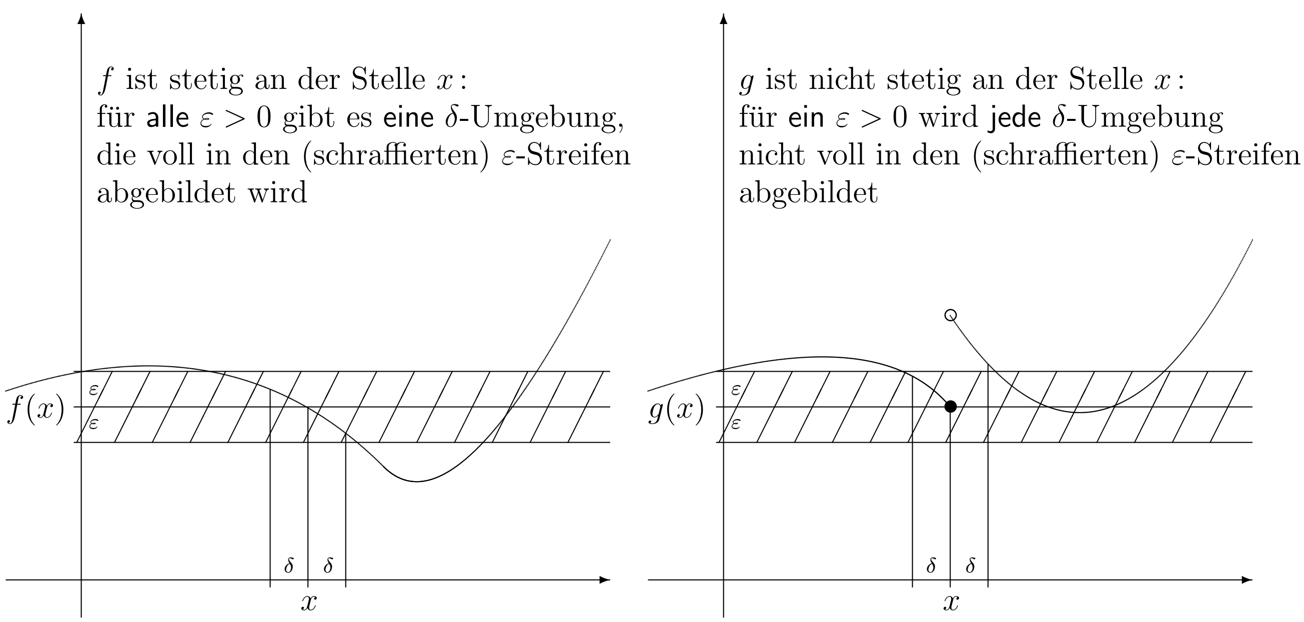
Umgekehrt ist f also nicht stetig an der Stelle $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so gibt, daß für alle $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\tilde{\underline{x}} \in D$ mit $\|\tilde{\underline{x}} - \underline{x}\| < \delta$ so existiert, daß

$$|f(\tilde{\underline{x}}) - f(\underline{x})| \;\geqslant\; \varepsilon$$

ist.

Dies sollte man wie folgt lesen. Es gibt eine Fehlerschranke ε so, daß für jeden noch so kleinen Wert δ diese Fehlerschranke im Abstand $< \delta$ von $\underline{x}$ nicht eingehalten wird. Bei der Stelle $\underline{x}$ liegt also ein Sprung um mindestens ε vor, da für $\tilde{\underline{x}}$ beliebig nahe bei $\underline{x}$ plötzlich eine Änderung von $\geqslant \varepsilon$ auftritt.

Ist $n = 1$, so wird hierbei $\|\tilde{\underline{x}} - \underline{x}\|$ zu $|\tilde{x} - x|$.



Definition. Es heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,* wenn f an jeder Stelle $\underline{x} \in D$ stetig ist.

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und ist $E \subseteq D$, so ist mit also auch die Einschränkung $f|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Im Falle $n = 1$ und eines Intervalls $D \subseteq \mathbb{R}$ ist, anschaulich gesprochen, eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ stetig, falls man ihren Graph zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.

Bemerkung.

(1) Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ konstant. Es definiert $f(\underline{x}) = f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) := y_0$ eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

(2) Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Es definiert $f(\underline{x}) = f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) := x_i$ eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

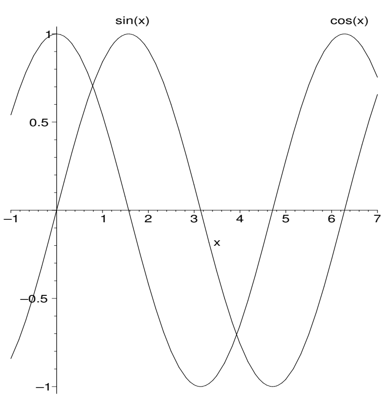
(3) Produkte und Summen stetiger Funktionen sind stetig.

(4) Es ist $f : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = 1/x$ stetig.

(5) Es ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^x$ stetig.

(6) Es ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \sin(x)$ stetig.

(7) Es ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \cos(x)$ stetig.



(8) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $E \subseteq \mathbb{R}$.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $f(D) \subseteq E$.

Sei $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $g \circ (f|_D^E) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto g(f(\underline{x}))$ stetig.

(9) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv.

Es ist $f|_D^{f(D)}$ bijektiv; ihre Umkehrabbildung heiße $g : f(D) \longrightarrow D$.

Ist f stetig, so ist $f(D)$ ein Intervall und die Abbildung $f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x)$ stetig.

Damit kann man nun zusammensetzen.

Beispiel.

(1) Es sind mit (1), (2), (3) alle Polynome stetig, wie etwa

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) = f(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) := x_1^4 x_3 - 5x_1x_2 + 1\ .$$

(2) Es definiert $f(x) := \mathrm{e}^{1/x^2}$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$.

Denn mit (4) und (3) ist $f : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x^2$ stetig.

Mit (5) ist $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ stetig.

Mit (8) ist also auch

$$g \circ f : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad x \ \longmapsto\ g(f(x)) \ = \ g(1/x^2) \ = \ \mathrm{e}^{1/x^2}$$

stetig.

(3) Es definiert $f(x, y) := \frac{x^2+y^2}{xy-1}$ eine stetige Funktion von $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \neq 1\}$ nach $\mathbb{R}$. Wir haben in (8) also das D dem E durch Urbildnahme angepaßt und dann noch (3) angewandt.

(4) Es ist mit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^2$ dank (9) auch

$$g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) \ := \ \sqrt{x}$$

stetig.

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist $(x_n)_n$ eine konvergente reelle Folge mit $x_n \in D$ stets und Grenzwert in D, so ist $(f(x_n))_n$ konvergent mit

$$\lim_n f(x_n) \ = \ f(\lim_n x_n)\ .$$

Schreibe hierzu $x := \lim_n x_n \in D$. Wir wollen zeigen, daß $\lim_n f(x_n) \overset{!}{=} f(x)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f an der Stelle x stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß für $\tilde{x} \in D$ mit $|\tilde{x} - x| < \delta$ noch $|f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon$ ist. Da $(x_n)_n$ gegen x konvergiert, gibt es ein ℓ mit $|x_n - x| < \delta$ für $n \geqslant \ell$. Nach Wahl von δ ist dann aber auch $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$. Damit ist gezeigt, daß $(f(x_n))_n$ gegen $f(x)$ konvergiert, wie gewünscht.

Beispiel. Zusammen mit (4) aus dem vorigen Beispiel gibt diese Bemerkung

$$\lim_n \sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} \ = \ \sqrt{\lim_n (1 + \tfrac{1}{n})} \ = \ \sqrt{1} \ = \ 1\ .$$

Das gilt für nichtstetige Funktionen nicht. Sei etwa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$. Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht stetig, da für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ für alle $\delta > 0$ sicher $f((-\delta, +\delta)) = \{0, 1\} \not\subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist. Desweiteren konvergiert die Folge $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$ gegen 0, während die Folge der Bildpunkte $(f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{3}), f(\frac{1}{3}), f(-\frac{1}{4}), f(\frac{1}{4}), \dots) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ divergiert.

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $I \subseteq D$ ein Intervall. Dann ist auch $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

2.4.3 Funktionsgrenzwerte an endlichen Stellen

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $\underline{x} \in D$. Sei $f : D \smallsetminus \{\underline{x}\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Für $y \in \mathbb{R}$ setzen wir

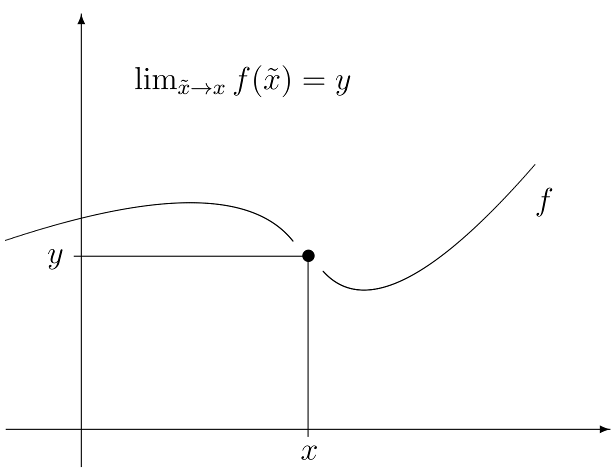
$$\begin{array}{rcl} \hat{f} \; : \; D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \underline{\tilde{x}} & \longmapsto & \begin{cases} f(\underline{\tilde{x}}) & \text{falls } \underline{\tilde{x}} \in D \smallsetminus \{\underline{x}\} \\ y & \text{falls } \underline{\tilde{x}} = \underline{x} \, . \end{cases} \end{array}$$

Definition. Ist $\hat{f}$ stetig in $\underline{x}$ für ein $y \in \mathbb{R}$, so heißt f *konvergent* an der Stelle $\underline{x}$, und es heißt y der *Grenzwert* (oder *Limes*) von f für $\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}$, geschrieben

$$y \; =: \; \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}}) \, .$$

Anschaulich gesprochen füllt dann der Punkt $(\underline{x}, y)$ die Lücke des Graphen von f bei $\underline{x}$.

Skizze im Fall $n = 1$:



Umgekehrt gesprochen ist eine Abbildung $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig in $\underline{x} \in D$, falls $g(\underline{x}) = \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} g|_{D \smallsetminus \{\underline{x}\}}(\underline{\tilde{x}})$. Ist g stetig an einer Stelle $\underline{x} \in D$, so stimmen dort insbesondere Grenz- und Funktionswert überein.

Mehr Beispiele als nur mit den folgenden Regeln werden wir rechnen können, sobald wir die Regel von de l'Hôpital kennen, für die wir noch den Ableitungsbegriff brauchen.

Bemerkung. Seien f, $g : D \smallsetminus \{\underline{x}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergent in $\underline{x}$. Seien λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}}(\lambda f(\underline{\tilde{x}}) + \mu g(\underline{\tilde{x}})) &= \lambda \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}}) + \mu \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} g(\underline{\tilde{x}}) \\ \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}}(f(\underline{\tilde{x}}) \cdot g(\underline{\tilde{x}})) &= (\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}})) \cdot (\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} g(\underline{\tilde{x}})) \end{aligned}$$

Ist $\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} g(\underline{\tilde{x}}) \neq 0$ und ist $g(\underline{\tilde{x}}) \neq 0$ stets, so ist

$$\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}}(f(\underline{\tilde{x}})/g(\underline{\tilde{x}})) = (\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}}))/(\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} g(\underline{\tilde{x}})) \,.$$

Ist $E \subseteq \mathbb{R}$ derart, daß $f(D \smallsetminus \{\underline{x}\}) \subseteq E$ und $\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}}) \in E$ ist, und ist $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} h(f(\underline{\tilde{x}})) = h(\lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}})) \,.$$

2.4.4 Funktionsgrenzwerte an unendlichen Stellen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $y \in \mathbb{R}$.

Sei $D = \mathbb{R}$ oder $D = (a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Es ist $y = \lim_{x \to \infty} f(x)$, falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $s \in D$ so existiert, daß

$$|f(x) - y| < \varepsilon$$

ist für alle $x \in (s\,,\,\infty)$.

Sei $D = \mathbb{R}$ oder $D = (-\infty, a)$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Es ist $y = \lim_{x \to -\infty} f(x)$, falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x_0 \in D$ so existiert, daß

$$|f(x) - y| < \varepsilon$$

ist für alle $x \in (-\infty, s)$.

Die Regeln entsprechen denen für Grenzwerte an endlichen Stellen.

Beispiel. Es ist

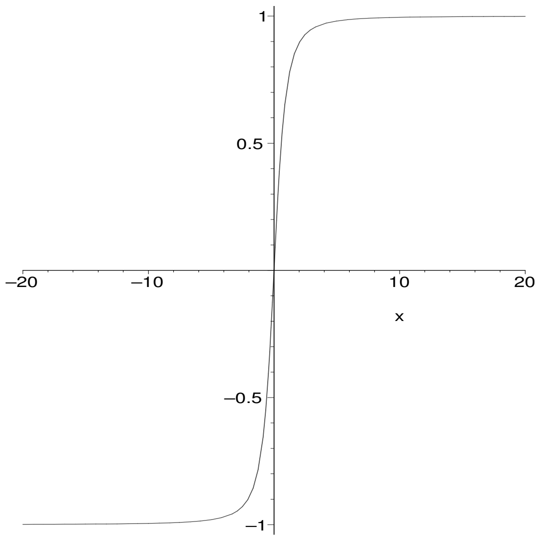
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} = \sqrt{\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 + x^2}} = 1$$

(wobei beim Umformen $x > 0$ verwandt wurde, um auf $x = \sqrt{x^2}$ zu schließen) und

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = -\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} = -\sqrt{\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 + x^2}} = -1$$

(wobei beim Umformen $x < 0$ verwandt wurde, um auf $x = -\sqrt{x^2}$ zu schließen).

In der Tat hat der Graph dieser Funktion folgende Gestalt.



Kapitel 3

Differentialrechnung

3.1 Innere Punkte und Offenheit

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Element $\underline{x} \in D$ heißt *inner,* wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\{\, \underline{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\| < \varepsilon \,\} \;\subseteq\; D\,.$$

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen,* falls alle ihre Elemente inner sind.

Anschaulich gesprochen, eine offene Teilmenge enthält keine Randpunkte.

Z.B. ist $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$, wobei $a < b$.

Dagegen ist $(a, b]$ nicht offen in $\mathbb{R}$, da b kein innerer Punkt ist. Denn es ist $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \not\subseteq (a, b]$, wie klein man $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ auch wählt.

Z.B. ist die offene Kreisscheibe $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1 \,\}$ von Radius 1 offen in $\mathbb{R}^2$.

3.2 Funktionen in einer Variablen

3.2.1 Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition. Sei $x \in D$ ein innerer Punkt.

Falls existent, so schreiben wir

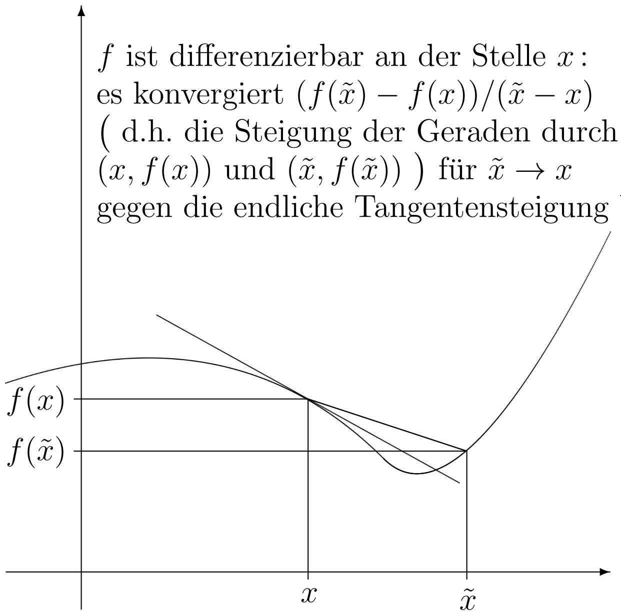
$$f'(x) \;:=\; \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \;\overset{t\,:=\,\tilde{x}\,-\,x}{=}\; \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}\,.$$

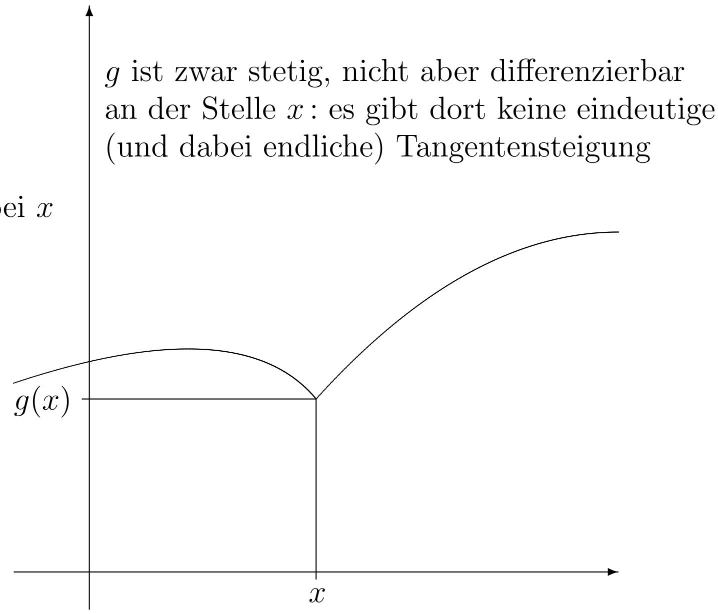
Diesenfalls heißt f *differenzierbar* an der Stelle x.

Ist f differenzierbar an der Stelle x, so ist f dort auch stetig.

Da $\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}$ die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ ist, wird daraus nach Grenzübergang $\tilde{x} \to x$, daß $f'(x)$ die Steigung der Tangenten an den Graphen von f im Punkte $(x, f(x))$ ist.

Ist f stetig an der Stelle x, so lautet die Merkregel: f ist differenzierbar an der Stelle x, wenn der Graph von f dort keinen Knick und keine vertikale Tangente hat.





Definition. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und ist f differenzierbar an jeder Stelle $x \in D$, so heißt f *differenzierbar*. Es heißt $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$ die (erste) *Ableitung* von f. Man schreibt auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := f'$.

Ist f' wieder differenzierbar, so heißt $f'' := (f')'$ die *zweite Ableitung* von f. Usf.

Gebräuchlich ist auch die etwas laxe Schreibweise $(f(x))' := f'(x)$, also z.B. $(x^2)' = 2x$.

Bemerkung.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Seien $f,\ g\ :\ D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien $\lambda,\ \mu\ \in\ \mathbb{R}$.

(1) Ist D ein Intervall, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$ genau dann, wenn f konstant ist, d.h. wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = c$ für $x \in D$.

(2) Es ist $\lambda f + \mu g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$ differenzierbar. Es ist

$$(\lambda f + \mu g)' \ = \ \lambda f' + \mu g' \ .$$

(3) Es ist $f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$ differenzierbar. Die *Produktregel* besagt, daß

$$(f \cdot g)' \ = \ f' \cdot g + f \cdot g' \ .$$

(4) Sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Es ist $f/g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)/g(x)$ differenzierbar. Die *Quotientenregel* besagt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} .$$

Merksatz: "Zähler zuerst ableiten."

(5) Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $f(D) \subseteq E$. Sei $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Die *Kettenregel* besagt

$$(h \circ (f|_D^E))' = (h' \circ (f|_D^E)) \cdot f' .$$

Etwas lax ausgedrückt ist also

$$(h(f(x)))' = h'(f(x)) \cdot f'(x) .$$

Den ersten Faktor, $h'(f(x))$, nennt man hierbei die *äußere* Ableitung, den zweiten, $f'(x)$, die *innere* Ableitung.

(6) Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^x$, so ist auch $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Kurz, $\exp' = \exp$, d.h. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

(7) Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \sin(x)$, so ist $f'(x) = \cos(x)$.

Kurz, $\sin(x)' = \cos(x)$. Noch kürzer, $\sin' = \cos$.

(8) Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \cos(x)$, so ist $f'(x) = -\sin(x)$.

Kurz, $\cos(x)' = -\sin(x)$. Noch kürzer, $\cos' = -\sin$.

Beispiel.

Ist $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ und sind $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so wird

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} \cdot f_i' \cdot f_{i+1} \cdots f_n .$$

Denn mit iterierter Anwendung von (3) folgt

$$\begin{aligned}
(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n)' &= (f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3 \cdots f_n))' \\
&= f_1' \cdot (f_2 \cdot f_3 \cdots f_n) + f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3 \cdots f_n)' \\
&= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot (f_3 \cdots f_n) + f_1 \cdot f_2 \cdot (f_3 \cdots f_n)' \\
&\vdots \\
&= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n' \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} \cdot f_i' \cdot f_{i+1} \cdots f_n .
\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ folgt insbesondere aus $x' = 1$ die Ableitung

$$(*) \qquad (x^n)' = nx^{n-1} .$$

Für Polynome ergibt sich mit (2) also

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0)' \;=\; a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 1 \cdot x^0 \;,$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$.

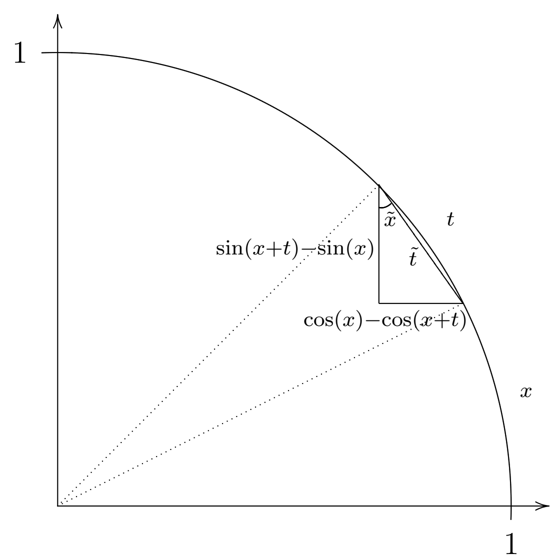
Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ wird mit (4) auch $(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{-(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. Dies zeigt die Gültigkeit von $(*)$ für $n \in \mathbb{Z}$, da diese Formel für $n = 0$ und $n = 1$ ohnehin gilt.

Begründen wir, daß $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ ist. Es wird

$$(\mathrm{e}^x)' \;=\; \big(\textstyle\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\big)' \;=\; \sum_{n=0}^\infty \big(\frac{x^n}{n!}\big)' \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{nx^{n-1}}{n!} \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \;=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} \;=\; \mathrm{e}^x \;.$$

Die Vertauschbarkeit von Ableitung und $\sum_{n=0}^\infty$ müßte man hierzu noch rechtfertigen.

Anhand folgender Skizze kann man sich die Ableitungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ plausibel machen.



Es ist

$$\frac{\sin(x+t)-\sin(x)}{t} \;\approx\; \frac{\sin(x+t)-\sin(x)}{\tilde{t}} \;=\; \cos(\tilde{x}) \;\approx\; \cos(x)$$

und

$$\frac{\cos(x+t)-\cos(x)}{t} \;\approx\; -\frac{\cos(x)-\cos(x+t)}{\tilde{t}} \;=\; -\sin(\tilde{x}) \;\approx\; -\sin(x)\;,$$

wobei die Näherungen umso besser sind, je kleiner $|t|$ ist.

Beispiel.

Es ist $(x^4 + 3x^2 + 2x - 1)' = 4x^3 + 6x + 2$.

Es ist $(1/x)' = -1/x^2$.

Es ist $(1/x^3)' = -3/x^4$.

Es ist $\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+1)'(x^2+1)-(x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ nach Quotientenregel.

Es ist $(x\mathrm{e}^x)' = (x+1)\mathrm{e}^x$ nach Produktregel.

Es ist $(\mathrm{e}^{(x^2)})' = \mathrm{e}^{(x^2)} \cdot 2x$ nach Kettenregel.

Es ist $(\sin(1/x))' = \cos(1/x) \cdot (-1/x^2)$ nach Kettenregel, wobei $D = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

3.2.2 Monotonie

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Lemma.

(1) Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in D$ genau dann, wenn $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ist für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$. Diesenfalls nennt man f *monoton wachsend.*

(2) Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in D$ genau dann, wenn $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ist für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$. Diesenfalls nennt man f *monoton fallend.*

Lemma.

(1) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$, so ist $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$; kurz, f ist *streng monoton wachsend.*

(2) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$, so ist $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$; kurz, f ist *streng monoton fallend.*

Die Umkehrung gilt nicht. Denn z.B. ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(x) = 3x^2$, und also $f'(0) = 0$.

Beispiel. Es ist $\cos(x)$ streng monoton fallend auf $(0, \pi)$, da $\cos(x)' = -\sin(x)$ dort negative Werte aufweist.

3.2.3 Lokale Extremstellen

3.2.3.1 Definition

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sei $\underline{\hat{x}} \in D$.

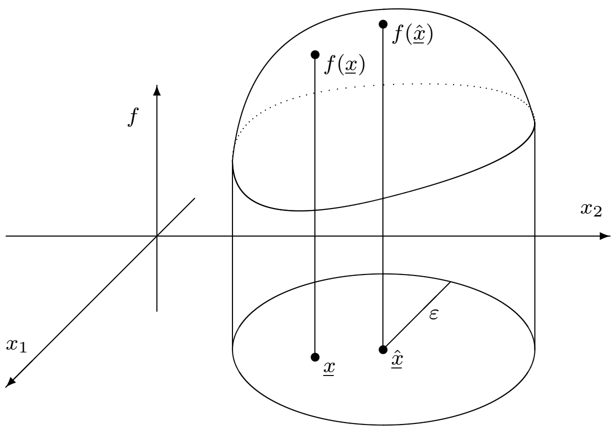
Definition.

(1) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Maximalstelle* von f, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \geqslant f(\underline{x})$ ist für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$.

(2) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Minimalstelle* von f, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \leqslant f(\underline{x})$ ist für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$.

(3) Es heißt $\hat{\underline{x}}$ eine *lokale Extremstelle* von f, falls $\hat{\underline{x}}$ eine lokale Maximal- oder Minimalstelle von f ist.

Skizze einer lokalen Maximalstelle $\hat{\underline{x}}$ von f im Fall $n = 2$.



3.2.3.2 Lokale Extremstellen in einer Variablen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x_0 \in D$.

Definition. Ist $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 eine *Flachstelle* von f.

Bemerkung. Ist x_0 eine lokale Extremstelle von f, so ist x_0 eine Flachstelle von f.

Lemma. Sei auch $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

(1) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle von f.

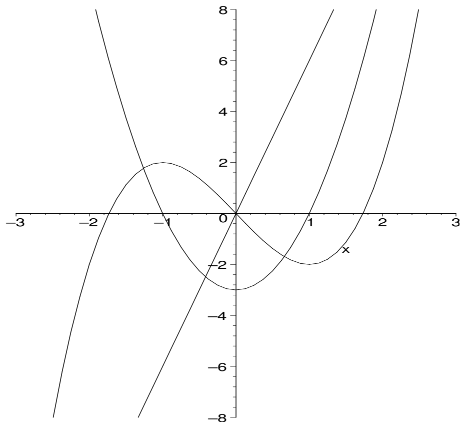
(2) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle von f.

Es genügt im allgemeinen nicht, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geqslant 0$ zu haben, um auf eine lokale Minimalstelle schließen zu können. Denn z.B. ist für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3$ durchaus $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0 \geqslant 0$, aber 0 ist keine lokale Minimalstelle.

Anschaulich sollte bei einer Maximalstelle die Tangentensteigung links davon positiv und rechts davon negativ sein. Also sollte f' in einer Maximalstelle das Vorzeichen von + (links) nach − (rechts) wechseln. Somit sollte f' an einer Maximalstelle den Wert 0 haben und fallen, d.h. ihrerseits negative Tangentensteigung haben. Dies wiederum bedeutet, daß f'' an dieser Stelle negativ sein sollte.

Beispiel. Sei $f(x) = x^3 - 3x$. Es ist $f'(x) = 3x^2 - 3$, mit Nullstellen bei -1 und bei 1. Dies sind die beiden Flachstellen von f. Es ist $f''(x) = 6x$. Also ist $f''(-1) = -6 < 0$, und mithin ist -1 eine lokale Maximalstelle. Nur lokal, weil der Wert $f(-1) = 2$ bei -1 ja für genügend große x noch übertroffen wird. Aber immerhin wird der Wert bei -1 in der unmittelbaren Umgebung von -1 nicht übertroffen. Desweiteren ist $f''(1) = 6$, und also 1 eine lokale Minimalstelle.

Skizze von f, f' und f'':



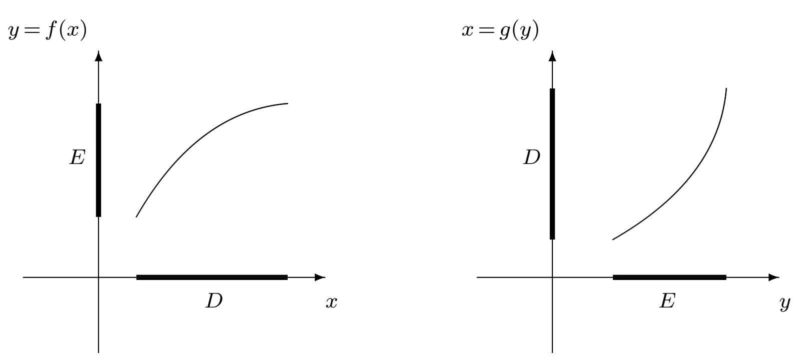
3.2.4 Umkehrabbildung, Logarithmus

3.2.4.1 Ableitung der Umkehrabbildung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$ (resp. $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$). Dann ist f streng monoton wachsend (resp. streng monoton fallend), vgl. zweites Lemma in §3.2.2. Insbesondere ist f injektiv. Es ist $E := f(D) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es ist $f|_D^E$ bijektiv. Sei

$$\begin{array}{rcccl} g & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & y & \longmapsto & g(y) := (f|_D^E)^{-1}(y) \, . \end{array}$$

Es ist also $g(f(x)) = x$ für $x \in D$ und $f(g(y)) = y$ für $y \in E$.

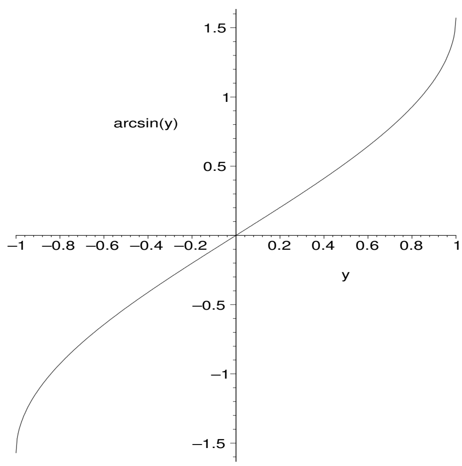


Bemerkung. Sei $x \in D$. Sei $y := f(x)$. Es ist $g'(y) = 1/f'(x) = 1/f'(g(y))$.

Denn aus $g(f(x)) = x$ für $x \in D$ folgt mit der Kettenregel, daß $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ ist.

Beispiel. Sei $D := (-\pi/2, \pi/2)$. Sei $f(x) := \sin(x)$. In obigen Bezeichnungen wird $E = (-1, 1)$ und $g(y) =: \arcsin(y)$. Für $y = \sin(x)$ wird

$$\arcsin(y)' \; = \; g'(y) \; = \; \frac{1}{f'(x)} \; = \; \frac{1}{\cos(x)} \; = \; \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)^2}} \; = \; \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \; .$$



3.2.4.2 Natürlicher Logarithmus

Definition. Für $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\exp(x)' = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sowie $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$; vgl. §2.3.3.

Für letzteres kann man $\exp(x) \geqslant 1 + x$ für $x \geqslant 0$ und $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ anführen.

Sei, in den Bezeichnungen von §3.2.4.1, $D = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}_{>0}$ und $g(y) =: \ln(y)$ $(= \log(y))$ für $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Dies liefert die Abbildung

$$\ln \; : \; \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \, , \quad y \longmapsto \ln(y) \, , \qquad \text{genannt } \textit{natürlicher Logarithmus.}$$

Es ist also $\ln(\exp(x)) = \ln(\mathrm{e}^x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\exp(\ln(y)) = \mathrm{e}^{\ln(y)} = y$ für $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Speziell ist $\ln(1) = \ln \mathrm{e}^0 = 0$ und $\ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^1) = 1$.

Für $y, \tilde{y} \; > \; 0$ ist

$$\ln(y\tilde{y}) \; = \; \ln(y) + \ln(\tilde{y}) \; ,$$

da $\mathrm{e}^{\ln(y\tilde{y})} = y\tilde{y} = \mathrm{e}^{\ln(y)}\mathrm{e}^{\ln(\tilde{y})} = \mathrm{e}^{\ln(y)+\ln(\tilde{y})}$ und exp injektiv ist.

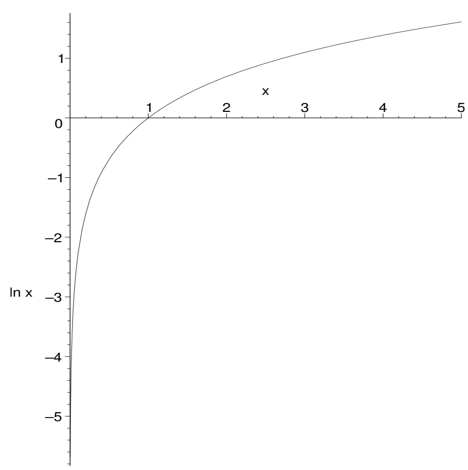
Bemerkung. Für $\ln : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto \ln(y)$ ist, mit $y = \mathrm{e}^x$,

$$\ln(y)' \; = \; g(y)' \; = \; \frac{1}{f(x)'} \; = \; \frac{1}{(\mathrm{e}^x)'} \; = \; \frac{1}{\mathrm{e}^x} \; = \; \frac{1}{y} \; ;$$

vgl. Bemerkung in §3.2.4.1.

Kurz, und wieder in gewohnter Variablenbezeichnung,

$$\ln(x)' \;=\; \frac{1}{x} \qquad \text{für } x > 0\ .$$



3.2.4.3 Potenz- und Logarithmenregeln

3.2.4.3.1 Potenzregeln

Seien $a,\, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Seien $x,\, y \,\in\, \mathbb{R}$.

Definition. Sei $a^x := \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

Es ist $a^0 = 1$ und $a^1 = \mathrm{e}^{\ln(a)} = a$.

Es ist $a^{x+y} = a^x a^y$, da $a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln(a)} = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\mathrm{e}^{y\ln(a)} \;=\; a^x a^y$.

Insbesondere ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Es ist $(a^x)^y = a^{xy}$, da $(a^x)^y = (\mathrm{e}^{x\ln(a)})^y = \mathrm{e}^{y\ln(\mathrm{e}^{x\ln(a)})} = \mathrm{e}^{yx\ln(a)} = a^{xy}$.

Es ist $(a^x)(b^x) = (ab)^x$, da $(a^x)(b^x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\mathrm{e}^{x\ln(b)} = \mathrm{e}^{x(\ln(a)+\ln(b))} = \mathrm{e}^{x\ln(ab)} = (ab)^x$.

Bemerkung. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Setze $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) := x^\lambda$. Dann ist $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Kurz,

$$(x^\lambda)' \;=\; \lambda x^{\lambda-1} \qquad \text{gilt für jedes } \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Denn $(x^\lambda)' = (\mathrm{e}^{\lambda\ln(x)})' = \mathrm{e}^{\lambda\ln(x)} \cdot \frac{\lambda}{x} = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\ln(x)}\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{(\lambda-1)\ln(x)} = \lambda x^{\lambda-1}$.

Bemerkung. Auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist $(a^t)' = (\mathrm{e}^{t\ln(a)})' = \mathrm{e}^{t\ln(a)}\ln(a) = a^t\ln(a)$.

3.2.4.3.2 Logarithmenregeln

Seien a, $b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$. Seien x, $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $z \in \mathbb{R}$.

Definition. Sei $\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ (Logarithmus zur Basis a).

Insbesondere ist $\log_{\mathrm{e}}(x) = \ln(x)$.

Es ist $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

Es ist $a^{\log_a(x)} = x$.

Es ist $\log_a(a^z) = z$.

Ist $x \neq 1$, so ist $\frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$.

3.2.5 L'Hôpital

Lemma. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $x_0 \in D$. Seien f, $g\,:\, D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$.

Dann ist
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;,$$
vorausgesetzt, die rechte Seite konvergiert.

Dies ist nicht mit der Quotientenregel aus §3.2.1 zu verwechseln.

Beispiel. Wir wollen $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ berechnen. Zähler und Nenner sind auf $(0, \infty)$ differenzierbar und haben beide Funktionswert 0 bei $x = 1$. Also ist
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)'}{(x-1)'} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} \;,$$
sofern letzterer Grenzwert existiert. Dies ist wegen $1/x$ stetig an der Stelle $x = 1$ der Fall. Wir erhalten $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$. Insgesamt ergibt sich also
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \;=\; 1 \;.$$

Sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, falls es für alle $s \in \mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(\,(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D\,) \subseteq (s, \infty)$.

Enthalte D ein Intervall (u, ∞) für ein $u \in \mathbb{R}$. Dann sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, falls es für alle $s \in \mathbb{R}$ ein $t \in \mathbb{R}_{>u}$ gibt mit $f(\,(t, \infty)\,) \subseteq (s, \infty)$.

Etc.

Bemerkung. Die obige Regel von l'Hôpital gilt genauso im Falle $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Bemerkung. Die Regel von l'Hôpital gilt genauso für ∞ anstelle von x_0. Entsprechend auch für $-\infty$ anstelle von x_0 .

Dies schließt auch vorstehende Bemerkung ein.

3.3 Partielle Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

3.3.1 Definition

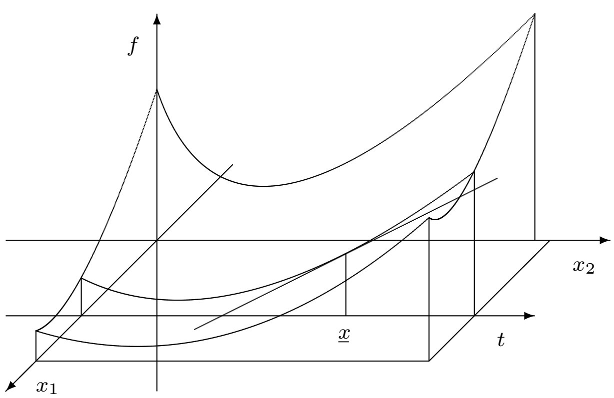
Definition. Sei $\underline{x} = (x_1 \, , \, \dots \, , \, x_n) \in D$.

Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei $D_i := \{t \in \mathbb{R} \, : \, (x_1 \, , \, \dots \, , \, x_{i-1} \, , \, t \, , \, x_{i+1} \, , \, \dots \, , \, x_n) \in D\}$.

Betrachte die Funktion $D_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x_1 \, , \, \dots \, , \, x_{i-1} \, , \, t \, , \, x_{i+1} \, , \, \dots \, , \, x_n)$. Falls die Ableitung dieser Funktion an der Stelle $t = x_i$ existiert, so heißt f *partiell nach* x_i *differenzierbar an der Stelle* $\underline{x}$; den Wert dieser Ableitung bezeichnen wir mit

$$f_{x_i}(x_1 \, , \, \dots \, , \, x_n) \; ,$$

genannt die *partielle Ableitung von* f *nach* x_i an der Stelle $\underline{x}$.



Die Steigung der eingezeichneten Tangente ist $f_{x_2}(\underline{x})$.

Ist f partiell nach x_i differenzierbar an jeder Stelle $\underline{x} \in D$, so heißt f *partiell differenzierbar nach* x_i. Diesenfalls resultiert die partielle Ableitung $f_{x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Man schreibt auch $\frac{\partial f}{\partial x_i} := f_{x_i}$.

In anderen Worten, die partielle Ableitung nach x_i erhält man, indem man alle anderen Variablen $x_1 \, , \, \dots, \, x_{i-1} \, , \, x_{i+1} \, , \, \dots, \, x_n$ als konstant betrachtet, nur x_i als variabel, und dann die Funktion in dieser verbliebenen Variablen x_i ableitet.

Beispiel. Sei $f(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3) = x_1^2 \, x_2^3 \, x_3^7$ auf $\mathbb{R}^3$. Es ist

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3) &= 2x_1 \, x_2^3 \, x_3^7 \\ f_{x_2}(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3) &= 3x_1^2 \, x_2^2 \, x_3^7 \\ f_{x_3}(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3) &= 7x_1^2 \, x_2^3 \, x_3^6 \; . \end{aligned}$$

3.3.2 Schwarz

Ist nun die partielle Ableitung f_{x_i} selbst wieder partiell differenzierbar nach x_j für bestimmte $1 \leqslant i, j \leqslant n$, so bezeichnen wir die partielle Ableitung von f_{x_i} nach x_j mit

$$f_{x_i x_j} := (f_{x_i})_{x_j} .$$

Usf.

Lemma (Schwarz). Sei $f_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ existent und stetig für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dann ist

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Beispiel. Sei $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz}$ auf $\mathbb{R}^3$. Es ist

$$\begin{array}{rcl}
f_x(x, y, z) & = & (2x + yz)\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz} \\
f_{xz}(x, y, z) & = & (y + 2x^2y + xy^2z)\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz} \\
f_z(x, y, z) & = & xy\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz} \\
f_{zx}(x, y, z) & = & (y + 2x^2y + xy^2z)\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz}
\end{array}$$

Also ist $f_{xz} = f_{zx}$.

3.4 Lokale Extremstellen in 2 Variablen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , $f_{yy} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ existent und stetig.

Wir erinnern an die Begriffe der lokalen Maximal-, Minimal- und Extremstelle von f aus §3.2.3.1.

Definition. Ist $f_x(x_0 , y_0) = 0$ und $f_y(x_0 , y_0) = 0$, so heißt (x_0 , y_0) eine *Flachstelle* von f.

Bemerkung. Ist $(x_0 , y_0) \in D$ eine lokale Extremstelle von f, so ist (x_0 , y_0) eine Flachstelle von f.

Lemma. Sei $(x_0 , y_0) \in D$.

(1) Ist an der Stelle (x_0 , y_0) zum einen $f_x = 0$ und $f_y = 0$, und zum anderen $f_{xx} < 0$ und $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, so ist (x_0 , y_0) eine lokale Maximalstelle von f.

(2) Ist an der Stelle (x_0 , y_0) zum einen $f_x = 0$ und $f_y = 0$, und zum anderen $f_{xx} > 0$ und $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, so ist (x_0 , y_0) eine lokale Minimalstelle von f.

(3) Ist an der Stelle (x_0 , y_0) zum einen $f_x = 0$ und $f_y = 0$, zum anderen aber $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, so ist (x_0 , y_0) keine lokale Extremstelle von f, sondern eine *Sattelstelle* von f.

Bei einem anderen Verhalten der zweiten partiellen Ableitungen an einer Flachstelle machen wir keine Aussage über das Vorliegen einer lokalen Extremstelle.

In (1) darf statt $f_{xx} < 0$ äquivalent auch $f_{yy} < 0$ verwandt werden.

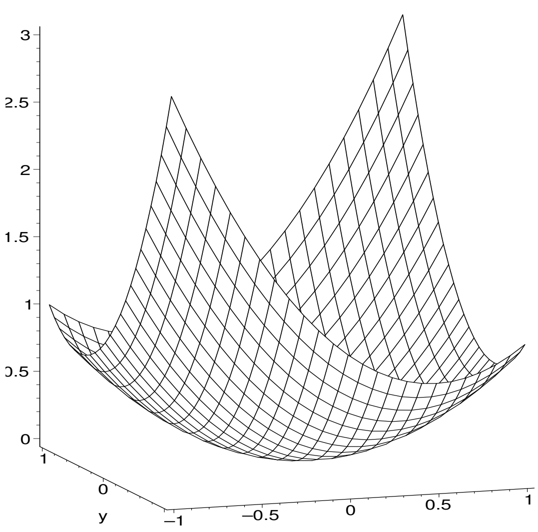
In (2) darf statt $f_{xx} > 0$ äquivalent auch $f_{yy} > 0$ verwandt werden.

Beispiel. Sei $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, definiert auf $D = \mathbb{R}^2$. Wir wollen die lokalen Extremstellen von f bestimmen.

Notwendig ist $f_x(x, y) = 2x + y \stackrel{!}{=} 0$ und $f_y(x, y) = 2y + x \stackrel{!}{=} 0$. Aus der ersten Gleichung erhalten wir $y = -2x$, dies eingesetzt in die zweite Gleichung gibt $-3x = 0$, also insgesamt $(x, y) = (0, 0)$.

Es bleibt also zu untersuchen, ob die einzige Flachstelle $(0, 0)$ von f eine lokale Extremstelle ist.

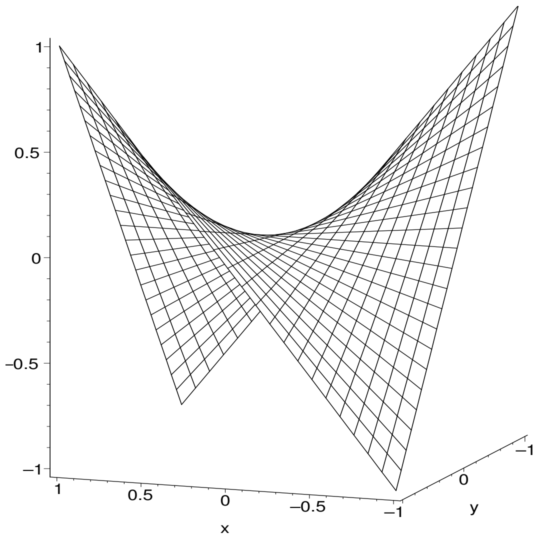
Es ist $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 1$ und $f_{yy}(x, y) = 2$ (in unserem einfachen Beispiel alle konstant). Da speziell $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ und $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0, 0) = 3 > 0$ ist, liegt in $(0, 0)$ eine lokale Minimalstelle vor.



Beispiel. Sei $f(x, y) = xy$, definiert auf $D = \mathbb{R}^2$. Wir wollen die lokalen Extremstellen von f bestimmen.

Notwendig ist $f_x(x, y) = y \stackrel{!}{=} 0$ und $f_y(x, y) = x \stackrel{!}{=} 0$. Also ist $(x, y) = (0, 0)$ die einzige Flachstelle von f.

Es ist $f_{xx}(0, 0) = 0$, $f_{yy}(0, 0) = 0$ und $f_{xy}(0, 0) = 1$. Also ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0, 0) = -1$, und somit liegt keine lokale Extremstelle, sondern eine Sattelstelle vor. Woher dieser Name kommt, entnehme man folgender Skizze des Graphen von f.



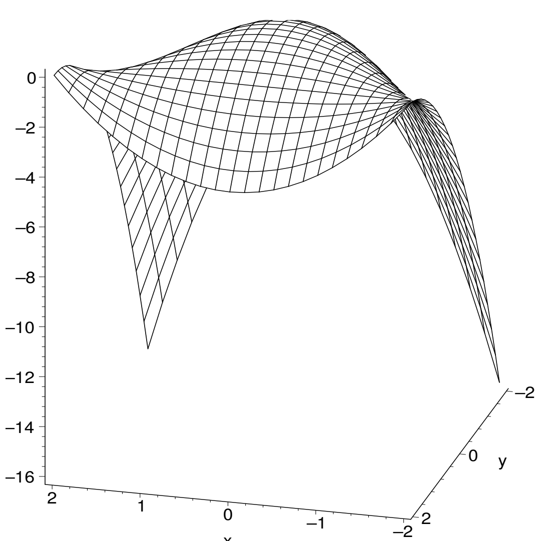
Beispiel. Sei $f(x,y) = x^2y - x^2 - y^2$, definiert auf $D = \mathbb{R}^2$. Wir wollen die lokalen Extremstellen von f bestimmen.

Notwendig ist $f_x(x,y) = 2xy - 2x \overset{!}{=} 0$ und $f_y(x,y) = x^2 - 2y \overset{!}{=} 0$. Aus ersterer Gleichung entnehmen wir $x = 0$ oder $y = 1$. Zweite Gleichung liefert für $x = 0$ die Flachstelle $(0,0)$, und für $y = 1$ die Flachstellen $(-\sqrt{2}, 1)$ und $(\sqrt{2}, 1)$.

Es ist $f_{xx}(x,y) = 2y - 2$, $f_{xy}(x,y) = 2x$ und $f_{yy}(x,y) = -2$.

Es ist $f_{yy}(0,0) = -2 < 0$ und $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0,0) = 4 > 0$. Also ist $(0,0)$ eine lokale Maximalstelle von f.

Es ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(\pm\sqrt{2}, 1) = -8 < 0$. Also sind $(-\sqrt{2}, 1)$ und $(\sqrt{2}, 1)$ Sattelstellen von f.



Kapitel 4

Kapitalentwicklung

- Sei K_0 das Startkapital zum Zeitpunkt 0.

  Wir lassen $K_0 \in \mathbb{R}$ zu; ein negativer Wert bezieht sich auf eine Schuld zum Zeitpunkt 0.

- Das Kapital werde in jeder festen Zeitspanne T mit p Prozent verzinst.

  Wir lassen $p \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ zu; ein negativer Wert bezieht sich auf eine Abschreibung, d.h. auf eine prozentuale Reduktion des Kapitals aufgrund von Abnutzung u.dgl.

  Es heiße
  $$q \ := \ 1 + \frac{p}{100}$$
  der *Zinsfaktor.*

  Die Zeitintervalle $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, $\ldots$ heißen *Zinsperioden.*

- Bei *vorschüssiger* (bzw. *nachschüssiger*) Zahlung werde am Anfang (bzw. am Ende) jeder Zinsperiode eine *Rate* R eingezahlt.

  Wir lassen $R \in \mathbb{R}$ zu; ein negativer Wert bezieht sich auf eine regelmäßige Kapitalentnahme.

- Sei K_n das entstandene Kapital zum Zeitpunkt nT, wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Lemma.

(1) Bei vorschüssiger Zahlung ist
$$K_n \ = \ q^n \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \, .$$
für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

(2) Bei nachschüssiger Zahlung ist

$$K_n \;=\; q^n \cdot K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R\,.$$

für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

(3) Ohne Zinsen wird, vor- wie nachschüssig,

$$K_n \;=\; K_0 + n \cdot R$$

für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. (Das ist der oben nicht zugelassene Fall $p = 0$ und also $q = 1$.)

Beispiel.

(1) Seien $K_0 = 1000$ Euro mit 6% Jahreszins für 4 Jahre verzinst. Es ist also $T = 1$ Jahr. Es mögen keine Ratenzahlungen stattfinden. Es ist $q = 1{,}06$. Nach Ablauf von 4 Jahren erhalten wir ein Kapital von

$$K_4 \;=\; 1{,}06^4 \cdot 1000 \;\approx\; 1262{,}48$$

Euro.

(2) Sei nun $K_0 = 1000$ Euro mit 0,5% Monatszins für 4 Jahre verzinst. Es ist also $T = 1$ Monat. Es mögen ebenfalls keine Ratenzahlungen stattfinden. Es ist $q = 1{,}005$. Nach Ablauf von 4 Jahren = 48 Monaten erhalten wir ein Kapital von

$$K_{48} \;=\; 1{,}005^{48} \cdot 1000 \;\approx\; 1270{,}49$$

Euro.

Beispiel.

(1) Sei in einem Sparvertrag $K_0 = 5000$ Euro angelegt, mit 1,8% Jahreszins und einer am Ende jeden Jahres einzuzahlenden Sparrate von $R = 500$ Euro. Es ist also $q = 1{,}018$. Nach Ablauf von 5 Jahren erhalten wir ein Kapital von

$$K_5 \;=\; 1{,}018^5 \cdot 5000 + \frac{1{,}018^5 - 1}{1{,}018 - 1} \cdot 500 \;\approx\; 8058{,}13$$

Euro.

(2) Bei vorschüssiger Zahlung hätte sich sogar ein Kapital von

$$K_5 \;=\; 1{,}018^5 \cdot 5000 + 1{,}018 \cdot \frac{1{,}018^5 - 1}{1{,}018 - 1} \cdot 500 \;\approx\; 8104{,}78$$

Euro ergeben.

(3) Ohne Zinsen hätten sich nur

$$K_5 \;=\; 5000 + 5 \cdot 500 \;=\; 7500$$

Euro ergeben.

Beispiel. Sei zum Zeitpunkt 0 ein Kredit über 100.000 Euro aufgenommen worden. Es ist also $K_0 = -100.000$. Die Kreditzinsen betragen 12% jährlich. Es ist also $q = 1{,}12$. Es wird eine Rate von jährlich 10.000 Euro zum Ende jeder Zinsperiode (nachschüssig) vereinbart. Es ist also $R = 10.000$. Nach Ablauf von 5 Jahren wird

$$K_5 \;=\; 1{,}12^5 \cdot (-100.000) + \frac{1{,}12^5 - 1}{1{,}12 - 1} \cdot 10.000 \;\approx\; -112.705{,}69\;.$$

Die Restschuld beläuft sich also auf 112.705,69 Euro. Die Rate war im Vergleich zu den Zinsen zu niedrig vereinbart.

Zuweilen ist auch das Kapital zum Zeitpunkt nT vorgegeben, und man möchte bei bekannnten Konditionen auf das benötigte Kapital zum Zeitpunkt 0 zurückschließen.

Ähnlich hierzu möchte man auch bei jeweilig bekannten sonstigen Daten auf den Zinssatz, auf die Rate, auf die Dauer usf. schließen können.

Bemerkung. Sei durchweg nachschüssige Zahlung vereinbart.

(1) Seien n, K_n, q und R bekannt. Dann wird

$$K_0 \;=\; q^{-n}\big(K_n - \frac{q^n - 1}{q - 1}\, R\big)\;.$$

(2) Seien n, K_0, K_n und $R = 0$ bekannt. Dann wird

$$q \;=\; (K_n/K_0)^{1/n}$$

und $p = 100 \cdot (q-1)$.

(3) Seien $n \geqslant 1$, K_0, K_n und q bekannt. Dann wird

$$R \;=\; \frac{q-1}{q^n - 1}(K_n - q^n K_0)\;.$$

(4) Seien K_0, K_n, R und q bekannt. Dann wird

$$n \;=\; \log_q\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) \;=\; \ln\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) / \ln(q)\;.$$

Dieses n, eine ganze Zahl oder nicht, gibt in der Praxis die nötige Mindestlaufzeit, um ein festgelegtes K_n zu erreichen.

Begründen wir (4). Es ist

$$K_n \;=\; q^n \cdot (K_0 + \frac{1}{q-1} \cdot R) - \frac{1}{q-1} \cdot R\;,$$

also

$$q^n \;=\; \frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\;,$$

und somit

$$n \;=\; \log_q(q^n) \;=\; \log_q\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right)\;.$$

Beispiel. Seien 1000 Euro zu 2% jährlich verzinst. Seien keine weiteren Sparraten vereinbart. Es dauert mindestens

$$\log_{1,02}\left(\frac{2000}{1000}\right) \;\approx\; 35{,}003$$

Jahre, in der Praxis also mindestens 36 Jahre, bis die Summe von 2000 Euro erreicht ist.

Mit einer zusätzlichen Sparrate von 10 Euro jährlich, zahlbar jeweils am Jahresende, dauert es nur noch mindestens

$$\log_{1,02}\left(\frac{2000 + \frac{10}{0{,}02}}{1000 + \frac{10}{0{,}02}}\right) \;\approx\; 25{,}796$$

Jahre, in der Praxis also mindestens 26 Jahre, bis die gewünschte Summe von 2000 Euro erreicht ist.

Ohne Zinsen hätte es bei dieser Sparrate 100 Jahre gedauert.

Kapitel 5

Vektoren

5.1 Matrizen

Seien m, n, p, $q \geqslant 0$.

Definition. Eine (*reellwertige*) $m \times n$*-Matrix*

$$A \;=\; (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n} \;=\; (\alpha_{i,j})_{i,j} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,n-1} & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1,1} & \alpha_{m-1,2} & \alpha_{m-1,3} & \cdots & \alpha_{m-1,n-1} & \alpha_{m-1,n} \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \alpha_{m,3} & \cdots & \alpha_{m,n-1} & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

ist eine rechteckige Tafel aus reellen Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

Es heiße $\alpha_{i,j}$ der *Eintrag* von A an *Position* (i,j).

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen werde

$$\mathbb{R}^{m \times n} \;:=\; \{\, (\alpha_{i,j})_{i,j} \;:\; \alpha_{i,j} \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ und } 1 \leqslant j \leqslant n \,\}$$

geschrieben.

> Formal ist eine solche Matrix eine Abbildung von $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ nach $\mathbb{R}$.
>
> Bei den Indizes merke man sich “Zeilenzähler zuerst, Spaltenzähler später”.

Z.B. ist $\left(\begin{smallmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^{1 \times 1}$, schreiben also $\alpha_{1,1} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1,1} \end{smallmatrix}\right)$.

Wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^{1 \times n}$, schreiben also $(\alpha_{1,1}\,,\, \ldots\,,\, \alpha_{1,n}) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \end{smallmatrix}\right)$; vgl. §2.4.1.

Definition. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sei $A' = (\alpha'_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sei $B = (\beta_{j,k})_{1 \leqslant j \leqslant n,\, 1 \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} A + A' & := & (\alpha_{i,j} + \alpha'_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant n} & \in & \mathbb{R}^{m\times n} \\ \lambda A \;=\; \lambda\cdot A & := & (\lambda\alpha_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant n} & \in & \mathbb{R}^{m\times n} \\ AB \;=\; A\cdot B & := & \big(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}\cdot\beta_{j,k}\big)_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant k\leqslant p} & \in & \mathbb{R}^{m\times p}\,. \end{array}$$

Wir setzen

$$\mathrm{E} \;=\; \mathrm{E}_n \;:=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\textit{Einheitsmatrix}} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad 0 \;=\; 0_{m\times n} \;:=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{Nullmatrix}} \in \mathbb{R}^{m\times n}\,.$$

Für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ setzt man noch $A^0 := \mathrm{E}_n$ und $A^k := A\cdot A\cdots A$ (k Faktoren) für $k\geqslant 1$.

Beispiel.

Es ist $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 7 & 16 \\ 4 & 13 & 16 & 4 \end{pmatrix}$.

Es ist $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_2$.

Es ist $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$. Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Definition. Ist $A = (\alpha_{i,j})_{i,j}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, so sei $A^{\mathrm{t}} := (\alpha_{i,j})_{j,i}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ ihre *Transponierte.*

Beispiel. Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Bemerkung. Seien $A,\, A',\, A''\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Seien $B,\, B'\in\mathbb{R}^{n\times p}$. Sei $C\in\mathbb{R}^{p\times q}$. Seien $\lambda,\,\lambda',\,\mu,\,\mu'\in\mathbb{R}$.

Es ist

$$\begin{array}{rcl} A + A' & = & A' + A \\ A + 0_{m\times n} & = & A \\ A + A' + A'' & = & (A + A') + A'' \;=\; A + (A' + A'') \\ (\lambda A + \lambda' A')(\mu B + \mu' B') & = & \lambda\mu AB + \lambda'\mu A'B + \lambda\mu' AB' + \lambda'\mu' A'B' \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} A\,\mathrm{E}_n & = & \mathrm{E}_m\,A & = & A \\ A\,0_{n\times p} & = & 0_{m\times n}\,B & = & 0_{m\times p} \\ ABC & := & (AB)C & = & A(BC) \\ (AB)^{\mathrm{t}} & = & B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}\,. & & \end{array}$$

Bemerkung. Sind $A,\, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ von quadratischer Form und ist $AB = \mathrm{E}_n$, dann ist auch $BA = \mathrm{E}_n$. Diesenfalls ist B durch A eindeutig bestimmt, und wir schreiben auch $A^{-1} := B$, genannt die *inverse* Matrix von A. Zur Berechnung der Inversen siehe §5.3, Bemerkung sowie Beispiel, (3).

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Sei $ad - bc\neq 0$. Sei $B := \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Dann ist $AB = \mathrm{E}_2$ und also $B = A^{-1}$.

5.2 Vektoren im Standardraum

Sei $n \geqslant 0$.

5.2.1 Geometrische Interpretation

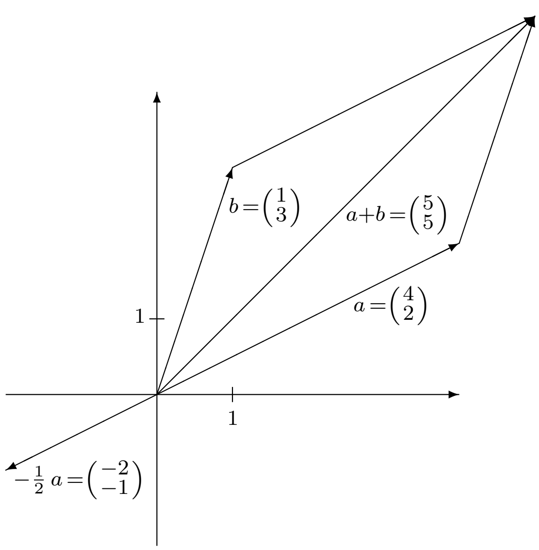
Eine Matrix in $\mathbb{R}^{n\times 1}$ wird oft $a = (\alpha_i)_i = (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ geschrieben und oft als *Vektor* in $\mathbb{R}^{n\times 1}$ bezeichnet.

Die geometrische Interpretation eines solchen Vektors ist die eines Pfeils von $(0,\ldots,0)$ nach $(\alpha_1\,,\,\ldots\,,\,\alpha_n)$ in $\mathbb{R}^n$.

Die geometrische Interpretation der Vektoraddition ist das Aneinandersetzen von Pfeilen.

Die geometrische Interpretation des λ-fachen eines Vektors ist das Strecken um den Faktor λ (Richtungsumkehr, falls $\lambda < 0$).

Beispiel. Sei $n = 2$.



5.2.2 Skalarprodukt

Seien $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Definition. Das Produkt $a^{\mathrm{t}}\, b = a^{\mathrm{t}} \cdot b \in \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt* von a und b.

Es ist $a^{\mathrm{t}}\, b = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n \;=\; b^{\mathrm{t}}\, a$.

Die *Norm* oder *Länge* von a ist als $\|a\| := (a^{\mathrm{t}}\, a)^{1/2} = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{1/2}$ definiert. Vgl. §2.4.1.

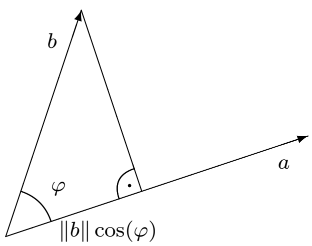
Lemma (Cauchy-Schwarz). Es ist $|a^{\mathrm{t}}\, b| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$.

Bemerkung. Seien a, $b \neq 0$. Ist φ der von a und b eingeschlossene Winkel, so ist

$$a^{\mathrm{t}}\, b \;=\; \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\varphi)\ .$$

Es ist also $\varphi = \arccos(\frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{\|a\| \cdot \|b\|})$.

Insbesondere stehen a und b genau dann orthogonal aufeinander, wenn $a^{\mathrm{t}}\, b = 0$.



Beispiel. Es ist $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)^{\mathrm{t}} \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) = 0$. Also stehen $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ orthogonal, d.h. senkrecht, aufeinander.

Beispiel. Sei $a = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right)$. Sei $b = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Es ist $a^{\mathrm{t}}\, b = 5$. Also ist der von a und b eingeschlossene Winkel gleich $\arccos(\frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{\|a\|\|b\|}) = \arccos(\frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}) \approx \arccos(0{,}98058) \approx 0{,}19740 \approx 11.310°$ (erstere Winkelangabe im Bogenmaß).

Beispiel. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ partiell differenzierbar nach x und nach y. Sei $(x_0\,, y_0) \in D$.

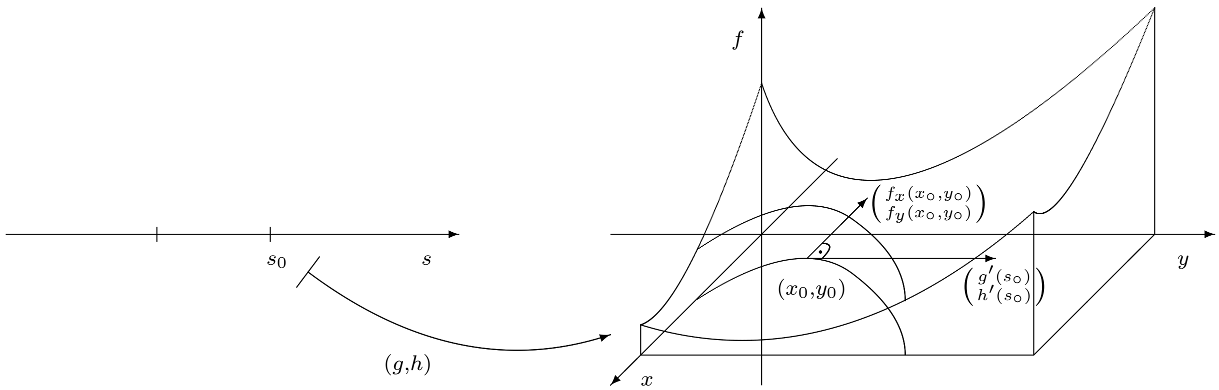
Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $s_0 \in E$. Sei $(g, h) : E \longrightarrow D$ so, daß $(g(s_0), h(s_0)) = (x_0\,, y_0)$, und so, daß $f(g(s), h(s))$ konstant ist, d.h. nicht von s abhängt. In anderen Worten, die Abbildung (g, h) bilde E in eine *Höhenlinie* oder *Isoquante* von f durch $(x_0\,, y_0)$ ab.

Man verifiziert

$$0 \;=\; f_x(x_0\,, y_0) \cdot g'(s_0) + f_y(x_0\,, y_0) \cdot h'(s_0) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}f_x(x_0,y_0)\\ f_y(x_0,y_0)\end{smallmatrix}\right)^{\mathrm{t}} \left(\begin{smallmatrix}g'(s_0)\\ h'(s_0)\end{smallmatrix}\right)\ .$$

Der Vektor $\left(\begin{smallmatrix}g'(s_0)\\ h'(s_0)\end{smallmatrix}\right)$ zeigt bei (x_0, y_0) tangential in Richtung der von (g, h) beschriebenen Kurve in D. Darauf steht der Vektor $\left(\begin{smallmatrix}f_x(x_0,y_0)\\ f_y(x_0,y_0)\end{smallmatrix}\right)$, *Gradient* genannt, also senkrecht.

Der Gradient von f bei $(x_0\,, y_0)$ steht somit senkrecht auf der Richtung der Höhenlinie von f bei $(x_0\,, y_0)$. Er zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.



Beachte in dieser Skizze die perspektivische Verzerrung des rechten Winkels, den $\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ und der Tangentenvektor $\begin{pmatrix} g'(s_0) \\ h'(s_0) \end{pmatrix}$ an die Bildkurve von (g, h) einschließen.

5.2.3 Kreuzprodukt

Seien $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Das *Kreuzprodukt* von a und b ist definiert durch

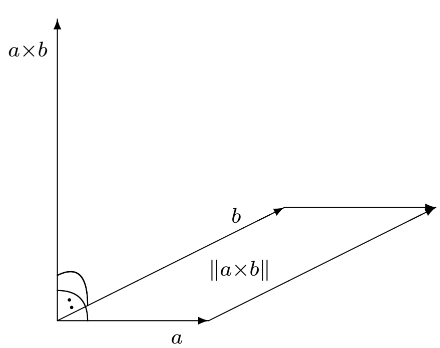
$$a \times b \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix} .$$

Bemerkung.

(1) Es steht $a \times b$ orthogonal auf a und auf b.

(2) Es ist $\|a \times b\|$ der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms. Insbesondere ist $a \times a = 0$.

Wenn, wie üblich, die x_1-Achse bzw. die x_2-Achse bzw. die x_3-Achse in Richtung des Daumens bzw. Mittelfingers bzw. Zeigefingers der linken Hand eingezeichnet werden, und a bzw. b in Richtung des Daumens bzw. Mittelfingers der linken Hand zeigt, dann zeigt $a \times b$ in Richtung des Zeigefingers.

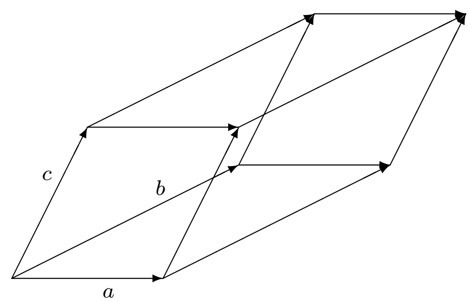


Bemerkung. Seien a, a', b, b', $c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Seien λ, λ', μ, μ' $\in \mathbb{R}$.

(1) Es ist $(\lambda a + \lambda' a') \times (\mu b + \mu' b') = \lambda\mu(a \times b) + \lambda'\mu(a' \times b) + \lambda\mu'(a \times b') + \lambda'\mu'(a' \times b')$.

(2) Es ist $a \times b = -(b \times a)$.

(3) Es ist $|a^{\mathrm{t}}\,(b \times c)|$ der Rauminhalt des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds.



Denn dieser Rauminhalt ist gleich der Grundfläche $\|b \times c\|$, multipliziert mit der Höhe $|a^{\mathrm{t}}\,(b \times c)|/\|b \times c\|$ des Parallelepipeds.

Beispiel.

(1) Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - 5\cdot 1 \\ 5\cdot 3 - 3\cdot 2 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(2) Seien $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\binom{\beta_1}{\beta_2} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Das von $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $\binom{\beta_1}{\beta_2}$ aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt $\left\|\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}\right\| = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$.

5.3 Lineare Gleichungssysteme – Zeilenstufenform

Seien m, $n \geqslant 0$. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Sei $b = (\beta_i)_i \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Wir wollen die Lösungsmenge

$$\{\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \;:\; Ax = b \,\}$$

bestimmen.

Ist $b = 0$, so spricht man von einem *homogenen linearen Gleichungssystem.*

Ist $b \neq 0$, so spricht man von einem *inhomogenen linearen Gleichungssystem.*

Sei allgemein $C = (\gamma_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ gegeben. Seien $1 \leqslant k \leqslant m$ und $1 \leqslant \ell \leqslant n$ so, daß $\gamma_{k,\ell} \neq 0$. Wir *säubern* mit dem Eintrag an Position (k,ℓ) *die ℓ-te Spalte* von C, indem wir die k-te Zeile mit $\gamma_{k,\ell}^{-1}$ multiplizieren und dann das $\gamma_{i,\ell}$-fache der entstandenen k-ten Zeile von der i-ten Zeile subtrahieren für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ mit $i \neq k$. Wir erreichen so, daß die ℓ-te Spalte der umgeformten Matrix bei (k,ℓ) den Eintrag 1 hat, und ansonsten Nullen.

Algorithmus. Es entstehe die Matrix $(A|b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ durch Anfügen von b an A als $(n+1)$-te Spalte. Wir wollen $(A|b)$ schrittweise umformen.

Sei $1 \leqslant \ell_1 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_1-ten Spalte besitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der ersten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(1, \ell_1)$ die ℓ_1-te Spalte.

Sei $1 \leqslant \ell_2 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_2-ten Spalte besitzt, der nicht in der ersten Zeile sitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der zweiten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(2, \ell_2)$ die ℓ_2-te Spalte.

Sei $1 \leqslant \ell_3 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_3-ten Spalte besitzt, der nicht in den Zeilen 1 bis 2 sitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der dritten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(3, \ell_3)$ die ℓ_3-te Spalte.

Sei $1 \leqslant \ell_4 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_4-ten Spalte besitzt, der nicht in den Zeilen 1 bis 3 sitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der vierten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(4, \ell_4)$ die ℓ_4-te Spalte.

Fahre so fort, bis ℓ_{s+1} nicht mehr existiert; was dann der Fall ist, wenn $s+1 > m$ ist oder aber die Zeilen $s+1$ bis m unserer Matrix nur Nulleinträge in den Spalten 1 bis n aufweisen.

Wir haben also insgesamt die Spalten $\ell_1\,, \ldots, \ell_s$ gesäubert. Numeriere die anderen Spalten aufsteigend durch mit $\ell'_1\,, \ell'_2\,, \ldots, \ell'_{n-s}\,$.

Die umgeformte Matrix heiße $(\tilde{A}|\tilde{b})$. Man sagt, $\tilde{A}$ ist in *Zeilenstufenform.* Die *Stufen* von $\tilde{A}$ befinden sich in den Spalten $\ell_1\,, \ldots, \ell_s\,$.

Falls $\tilde{b}$ einen Eintrag ungleich 0 an einer Position $s+1$ bis m hat, dann ist

$$\{\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \;:\; Ax = b \,\} \;=\; \emptyset$$

Falls $\tilde{b}$ nur Nulleinträge an den Positionen $s+1$ bis m hat, dann verfahre wie folgt.

Lies das $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit Eintrag 0 an Position ℓ'_j für alle $1 \leqslant j \leqslant n-s$ ab, das $\tilde{A}x_0 = \tilde{b}$ erfüllt.

Lies für $1 \leqslant i \leqslant n-s$ das $x_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit Eintrag 1 an Position ℓ'_i und Eintrag 0 an Position ℓ'_j für $1 \leqslant j \leqslant n-s$ mit $j \neq i$ ab, das $\tilde{A}x_i = 0$ erfüllt.

Dann ist

$$\{\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \;:\; Ax = b \,\} \;=\; \{\, x_0 + \lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_{n-s}\, x_{n-s} \;:\; \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n-s \,\}$$

Ist $b = 0$, so ist auch $x_0 = 0$.

Bemerkung. Dieselbe Umformung, angewandt auf $n \geqslant 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $(A|\mathrm{E}_n)$, gibt $(\mathrm{E}_n|A^{-1})$, falls die Umformung eine solche Matrix liefert, und ansonsten die Aussage, daß A nicht invertierbar ist.

Bemerkung. Eine Matrix $C = (\gamma_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist also in Zeilenstufenform, falls es für ein $1 \leqslant k \leqslant n$ Stufenspalten mit den Nummern $1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k \leqslant n$ gibt, für welche die Bedingungen $(1, 2)$ gelten.

Sei hierzu noch $\ell_0 := 0$ und $\ell_{k+1} = n + 1$.

(1) Sei $1 \leqslant i \leqslant k$, sei also ℓ_i die Nummer einer Stufenspalte. Dann ist $\gamma_{i,\ell_i} = 1$. Es ist $\gamma_{s,\ell_i} = 0$ für $1 \leqslant s \leqslant i-1$ und für $i+1 \leqslant s \leqslant m$.

(2) Sei $1 \leqslant j \leqslant n$ die Nummer einer Nichtstufenspalte, sei also $\ell_i < j < \ell_{i+1}$ für ein $0 \leqslant i \leqslant k$. Dann ist $\gamma_{s,j} = 0$ für $i+1 \leqslant s \leqslant m$.

Beispiel.

(1) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&2&2\\ 2&2&4&6\\ 2&2&3&5 \end{smallmatrix}\right)$, sei $b = \left(\begin{smallmatrix} 0\\ 2\\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir wollen $\{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = b \,\}$ und zugleich auch noch $\{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$ bestimmen.

Zunächst bilden wir
$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 0&0&2&2&0\\ 2&2&4&6&2\\ 2&2&3&5&0 \end{array}\right)$$
durch Nebeneinanderstellen.

Es ist $\ell_1 = 1$. Wir säubern mit dem Eintrag an Position $(2, 1)$ die erste Spalte, indem wir die zweite Zeile mit $1/2$ multiplizieren und sodann ihr 2-faches von der dritten Zeile subtrahieren. Schließlich wird noch die zweite Zeile in die erste getauscht. Das gibt:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&1\\ 0&0&2&2&0\\ 0&0&-1&-1&-2 \end{array}\right) .$$

Die zweite Spalte muß nun übersprungen werden, da die Einträge an den Positionen $(2, 2)$ und $(3, 2)$ null sind, hier also nicht gesäubert werden kann.

Es wird $\ell_2 = 3$. Wir säubern mit dem Eintrag an Position $(3, 3)$ die dritte Spalte, indem wir die dritte Zeile mit -1 multiplizieren und ihr mit 2-faches von der ersten Zeile und von der zweiten Zeile subtrahieren. Schließlich wird noch die dritte Zeile in die zweite getauscht. Das gibt:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&-3\\ 0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&-4 \end{array}\right) \;=:\; (\tilde{A}|\tilde{b}) .$$

Die Umformungen sind beendet. Die dabei nicht gesäuberten Spalten von A werden durchnumeriert mit $\ell'_1 := 2$ und $\ell'_2 := 4$.

Wir lesen ab, daß

$$\{ x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = b \} \;=\; \{ x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; \tilde{A}x = \tilde{b} \} \;=\; \emptyset$$

ist, da die dritte Zeile nicht erfüllbar ist.

Ferner lesen wir ab, daß

$$\{ x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \} \;=\; \{ x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; \tilde{A}x = 0 \} \;=\; \{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1 , \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

ist, wobei wir an den Positionen ℓ'_i (also in die Kästchen) jeweils eine 1 und ansonsten Nullen eingesetzt und dann so ergänzt haben, daß jeweils $\tilde{A}x = 0$ ist.

Eine Probe macht man, indem man in die ursprüngliche Gleichung einsetzt.

(2) Wir suchen alle $q, r, s, t, u, v, w \in \mathbb{R}$, welche das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0q & + & 2r & + & 4s & + & 6t & + & 0u & + & 8v & + & 4w & = & 0 \\ 0q & + & r & + & 2s & + & 3t & + & u & + & 9v & + & 3w & = & 0 \\ 0q & + & r & + & 2s & + & 3t & + & 0u & + & 4v & + & 3w & = & 1 \\ 0q & + & (-1)r & + & (-2)s & + & (-3)t & + & 0u & + & (-4)v & + & (-2)w & = & 0 \end{array}$$

erfüllen. In anderen Worten, wir suchen $\{ x := \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 1} \;:\; Ax = b \}$ für

$(A|b) := \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Dazu formen wir wie folgt um.

$$\begin{array}{lccc} (A|b) & \overset{\text{säubern mit } (2,2)}{\rightsquigarrow} & \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -10 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) & \overset{\text{säubern mit } (4,5)}{\rightsquigarrow} & \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ & \overset{\text{säubern mit } (4,7)}{\rightsquigarrow} & \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & =: & (\tilde{A}|\tilde{b}) \end{array}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \{ x \in \mathbb{R}^{7\times 1} \;:\; Ax = b \} \;&=\; \{ x \in \mathbb{R}^{7\times 1} \;:\; \tilde{A}x = \tilde{b} \} \\ = \; \{ \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -2 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -2 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -3 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -4 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -5 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \;&:\; \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant 4 \} \,. \end{aligned}$$

(3) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ wird

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) ,$$

und also ist A nicht invertierbar.

Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1\\ 1&1&1\\ 1&1&0 \end{smallmatrix}\right)$ wird

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&1&-1&-1&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&-1&0&-1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&1\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&0&1&-1 \end{array}\right),$$

und also $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1&-1&1\\ -1&1&0\\ 0&1&-1 \end{smallmatrix}\right)$.

Eine Probe macht man jeweils, indem man $A \cdot A^{-1}$ (oder $A^{-1} \cdot A$) berechnet.

Wer keine Probe macht, ist selbst schuld.

5.4 Vektorräume

5.4.1 Definition

Definition. Ein ($\mathbb{R}$-) *Vektorraum* ist eine Menge V, zusammen mit Abbildungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} (+) & : & V \times V & \longrightarrow & V\,, & (v,w) & \longmapsto & v+w\,, \\ (\cdot) & : & \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V\,, & (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda \cdot v =: \lambda v\,, \end{array}$$

derart, daß folgende Eigenschaften (V 1–7) gelten.

(V 1) Es gibt ein Element $0 \in V$ mit $v + 0 = v$ für $v \in V$.

(V 2) Für alle $v \in V$ gibt es ein Element $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$.

(V 3) Es ist $v + w = w + v$ für $v,\, w \,\in\, V$.

(V 4) Es ist $v + w + x := (v + w) + x = v + (w + x)$ für $v,\, w,\, x \,\in\, V$.

(V 5) Es ist $1 \cdot v = v$ für $v \in V$.

(V 6) Es ist $(\lambda + \mu) \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w + \mu \cdot v + \mu \cdot w$ für $\lambda,\, \mu \,\in\, \mathbb{R}$ und $v,\, w \,\in\, V$.

(V 7) Es ist $\lambda \cdot \mu \cdot v := (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ für $\lambda,\, \mu \,\in\, \mathbb{R}$ und $v \in V$.

Die Elemente eines Vektorraums heißen *Vektoren,* in Verallgemeinerung des bisherigen Begriffs; vgl. Beispiel, (1).

Wir schreiben auch $v - w = v + (-w)$ für $v,\, w \,\in\, V$.

Beispiel.

(1) Seien $m,\, n \,\geqslant\, 0$. Es ist $\mathbb{R}^{m\times n}$, zusammen mit der in §5.1 eingeführten Matrixaddition und der Multiplikation von Elementen aus $\mathbb{R}$ mit Matrizen, ein Vektorraum.

Insbesondere ist der Standardraum $\mathbb{R}^{m\times 1}$ ein Vektorraum.

(2) Sei M eine Menge. Sei $\mathbb{R}^M := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, f \text{ ist eine Abbildung}\}$. Setze

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(m) & := & f(m)+g(m) \\ (\lambda \cdot f)(m) & := & \lambda \cdot f(m) \end{array}$$

für $f,\, g \in \mathbb{R}^M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $m \in M$; vgl. §2.1.1. Damit wird $\mathbb{R}^M$ zu einem Vektorraum.

Bemerkung. Sei V ein Vektorraum, sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $v \in V$. Es ist $\lambda \cdot v = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $v = 0$. Es ist $(-1) \cdot v = -v$.

Ist $v \in V$, so ist $0 \cdot v \overset{\text{(V 1,2,4)}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v - 0 \cdot v \overset{\text{(V 6)}}{=} (0+0) \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v - 0 \cdot v \overset{\text{(V 2)}}{=} 0$.
Analog zeigt man auch $\lambda \cdot 0 = 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ist umgekehrt $\lambda v = 0$, und ist dabei $\lambda \neq 0$, dann ist $v = \lambda^{-1}\lambda v = 0$.

Es ist $(-1) \cdot v \overset{\text{(V 1,2,4)}}{=} (-1) \cdot v + 1 \cdot v - 1 \cdot v \overset{\text{(V 5,6)}}{=} ((-1)+1) \cdot v - v = 0 \cdot v - v \overset{\text{s.o.}}{=} -v$.

5.4.2 Dimension

Sei V ein Vektorraum. Sei $n \geqslant 0$. Sei $(v_1\,, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel aus Elementen von V.

Definition.

(1) Das *Erzeugnis* von $(v_1\,, \ldots, v_n)$ ist die Menge

$$\langle\, v_1\,, \ldots, v_n \,\rangle \;=\; {}_{\mathbb{R}}\langle\, v_1\,, \ldots, v_n \,\rangle \;:=\; \{\lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n \,:\, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n\} \;\subseteq\; V$$

aller *Linearkombinationen* dieses Tupels.

(2) Es heißt das Tupel $(v_1\,, \ldots, v_n)$ *erzeugend,* wenn

$$V = \langle\, v_1\,, \ldots, v_n \,\rangle\,.$$

(3) Es heißt das Tupel $(v_1\,, \ldots, v_n)$ *linear unabhängig,* wenn mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ die Gleichung

$$\lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n \;=\; 0$$

nur für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist.

(4) Es heißt das Tupel $(v_1\,, \ldots, v_n)$ eine *Basis* von V, falls es linear unabhängig und erzeugend ist.

(5) Ist $(v_1\,, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so heißt $\dim(V) := n$ die *Dimension* von V.

Hat V eine (endliche) Basis, so heiße V *endlichdimensional.*

Hat V keine (endliche) Basis, so heiße V *unendlichdimensional,* und wir schreiben $\dim(V) := \infty$.

Bemerkung.

(1) Es ist $(v_1\,,\,\ldots\,,\,v_n)$ genau dann eine Basis von V, wenn für alle $v \in V$ genau ein n-Tupel $(\lambda_1\,,\,\ldots\,,\,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$v \;=\; \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n$$

existiert.

(2) Die Dimension von V hängt nicht von der gewählten Basis von V ab. In anderen Worten, sind $(v_1\,,\,\ldots\,,\,v_n)$ und $(v'_1\,,\,\ldots\,,\,v'_{n'})$ Basen von V, dann ist $n = n'$.

Bemerkung. Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Schreibe $\mathrm{e}_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, wobei die 1 an Position $(i,1)$ sitzt, für den i-ten *Standardbasisvektor.*

Es ist $(\mathrm{e}_1\,,\,\ldots\,,\,\mathrm{e}_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^{n\times 1}$, die *Standardbasis.* Also ist $\dim(\mathbb{R}^{n\times 1}) = n$.

Bemerkung. Sei $m \geqslant 0$. Sei $(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_m)$ ein m-Tupel in $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Habe $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die i-te Spalte $x_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$; d.h. entstehe A durch Nebeneinanderstellen der Vektoren x_i.

(1) Es ist $(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_m)$ genau dann erzeugend, wenn die Zeilenstufenform von A keine Nullzeile enthält.

(2) Es ist $(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_m)$ genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilenstufenform von A genau m Nichtnullzeilen enthält.

(3) Es ist $(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_m)$ genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^{n\times 1}$, wenn $m = n$ ist und A die Zeilenstufenform E_n hat.

Beispiel.

(1) Es ist $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ weder linear unabhängig noch erzeugend. Denn die zugehörige Matrix wird zur Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

umgeformt, und diese hat 1 (> 0) Nullzeile und 2 (< 4) Nichtnullzeilen.

(2) Es ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, denn die zugehörige Matrix wird zur Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{E}_n$$

umgeformt.

(3) Ist M eine unendliche Menge, dann ist auch $\dim(\mathbb{R}^M) = \infty$.

5.4.3 Unterräume

Sei V ein Vektorraum.

Definition. Ein *Unterraum* (oder *Teilraum*) von V ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ so, daß $0 \in U$ und daß für alle λ, $\lambda' \in \mathbb{R}$ und u, $u' \in U$ auch

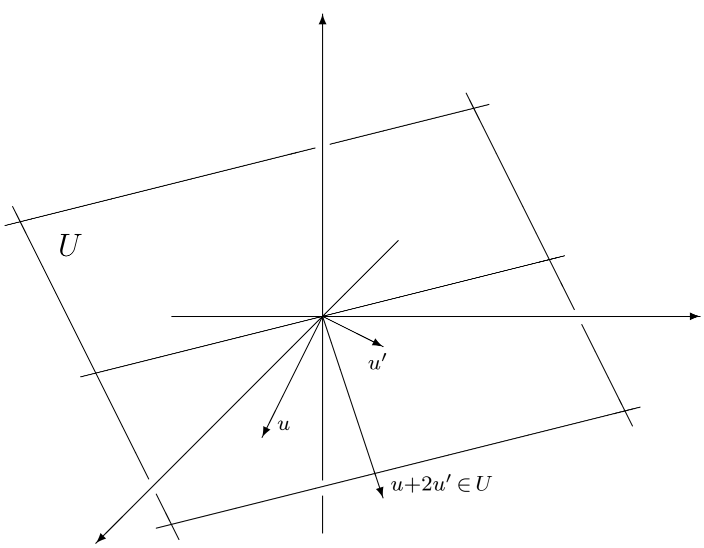
$$\lambda u + \lambda' u' \ \in \ U$$

ist.

So z.B. sind $0 := \{0\}$ und V Unterräume von V.

Bemerkung. Ist U ein Unterraum von V, so ist U, zusammen mit den eingeschränkten Abbildungen $(+)|_{U\times U}^{U}$ und $(\cdot)|_{\mathbb{R}\times U}^{U}$, selbst ein Vektorraum.

Skizze eines zweidimensionalen Unterraumes $U \subseteq \mathbb{R}^3$.



Beispiel. Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $M := (a, b)$. Es ist

$$\{\, f : M \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist differenzierbar} \,\} \ \subseteq \ \mathbb{R}^M$$

ein Unterraum.

Bemerkung. Seien T, $U \subseteq V$ Unterräume. Dann sind auch $T \cap U$ und

$$T + U \ := \ \{\, t + u \ : \ t \in T,\ u \in U \,\}$$

Unterräume.

Sei V nun endlichdimensional.

(1) Es ist $\dim(U) \leqslant \dim(V)$.
Es ist $\dim(U) = 0$ genau dann, wenn $U = 0$.
Es ist $\dim(U) = \dim(V)$ genau dann, wenn $U = V$.

(2) Es ist $\dim(T) + \dim(U) = \dim(T+U) + \dim(T \cap U)$.

Bemerkung. Sei $n \geqslant 0$. Sei $(v_1\,, \dots, v_n)$ ein n-Tupel in V. Dann ist

$$U \;:=\; \langle\, v_1\,, \dots, v_n \,\rangle \;\subseteq\; V$$

ein Unterraum. Das Tupel $(v_1\,, \dots, v_n)$ enthält eine Basis von U als Teiltupel.

Ist $m \geqslant 1$ und $V = \mathbb{R}^{m\times 1}$, so kann eine solche Basis von U wie folgt ermittelt werden. Habe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die i-te Spalte v_i für $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei $\tilde{A}$ die Zeilenstufenform von A. Seien dabei die Spalten $\ell_1\,, \dots, \ell_s$ gesäubert worden; Bezeichnungen wie in §5.3. Dann ist $(v_{\ell_1}\,, \dots, v_{\ell_s})$ eine Basis von U.

Bemerkung. Seien $m, n \geqslant 0$. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Es ist $U := \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \;:\; Ax = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Zur Bestimmung einer Basis von U bestimmen wir die Zeilenstufenform von A wie in §5.3. In der dortigen Bezeichnung ist dann $(x_1\,, \dots, x_{n-s})$ eine Basis von U.

Bemerkung. Seien $m, n, p \geqslant 0$.

Sei $(t_1\,, \dots, t_n)$ ein linear unabhängiges n-Tupel in $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Sei

$$T \;:=\; \langle\, t_1\,, \dots, t_n \,\rangle \subseteq \mathbb{R}^{m\times 1}\,.$$

Sei $(u_1\,, \dots, u_p)$ ein linear unabhängiges p-Tupel in $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Sei

$$U \;:=\; \langle\, u_1\,, \dots, u_p \,\rangle \subseteq \mathbb{R}^{m\times 1}\,.$$

Schreibe $v_i := t_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $v_i := u_{i-n}$ für $n+1 \leqslant i \leqslant n+p$.

Habe $A \in \mathbb{R}^{m\times(n+p)}$ die i-te Spalte v_i für $1 \leqslant i \leqslant n+p$. D.h. entstehe A durch Nebeneinanderstellen aller Vektoren t_j und u_j.

Sei $\tilde{A}$ die Zeilenstufenform von A. Seien dabei die Spalten $\ell_1\,, \dots, \ell_s$ gesäubert worden; Bezeichnungen wie in §5.3. Dann ist $(v_{\ell_1}\,, \dots, v_{\ell_s})$ eine Basis von $T+U$.

Sei, in der Bezeichnung von §5.3, $(x_1\,, \dots, x_{n+p-s})$ die dort gefundene Basis von $\{\, x \in \mathbb{R}^{(n+p)\times 1} \,:\, Ax = 0\,\}$. Schreibe $x_i =: \begin{pmatrix} \xi_{1,i} \\ \vdots \\ \xi_{n+p,\,i} \end{pmatrix}$ für $1 \leqslant i \leqslant n+p-s$. Dann ist

$$\big(\xi_{1,1}\, t_1 + \dots + \xi_{n,1}\, t_n \;,\; \dots \;,\; \xi_{1,n+p-s}\, t_1 + \dots + \xi_{n,n+p-s}\, t_n\big)$$

eine Basis von $T \cap U$.

Denn $A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n+p} \end{pmatrix} = 0$ ist äquivalent zu $\xi_1\, t_1 + \dots + \xi_n\, t_n \;=\; -(\xi_{n+1}\, u_1 + \dots + \xi_{n+p}\, u_p)$, und diese Bedingung charakterisiert Elemente in $T \cap U$.

Da $\dim(T) = n$, $\dim(U) = p$, $\dim(T+U) = s$ und $\dim(T \cap U) = n+p-s$, wird in der Tat $\dim(T) + \dim(U) = n+p = \dim(T+U) + \dim(T \cap U)$.

Beispiel. Sei $T := \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{5\times 1}$. Sei $U := \langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{5\times 1}$.

Wir wollen Basen für $T+U$ und $T\cap U$ bestimmen. Wir rechnen.

$$A := \begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0\\1&1&0&-1&1&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0\\0&1&-1&-1&1&-1\\0&0&0&0&1&-1\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&1&-1&-1&1&-1\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&1\\0&1&0&0&2&-1\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&-1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Es ist $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 3$ und $\ell_4 = 5$. Also ist eine Basis von $T+U$ gegeben durch $(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix})$.

Eine Basis von $\{\, x \in \mathbb{R}^{6\times 1} \,:\, Ax = 0 \,\}$ ist gegeben durch $(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\\boxed{1}\\0\\\boxed{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\\boxed{0}\\1\\\boxed{1}\end{pmatrix})$. Also ist eine Basis von $T\cap U$ gegeben durch

$$(1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix})\ .$$

Kapitel 6

Integration

6.1 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)$ eine stetige Abbildung.

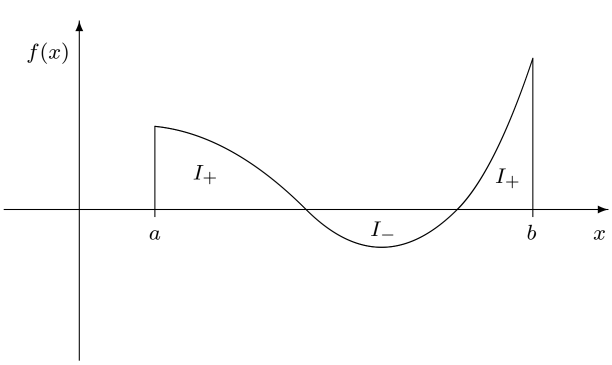
Definition.

Sei I_+ der vom Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Flächeninhalt.

Sei I_- der vom Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Flächeninhalt.

Sei das (*bestimmte*) *Integral von f in den Grenzen von a nach b* definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ I_+ - I_- \ .$$



Wir setzen noch $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

> Auch auf die Frage, was denn ein Flächeninhalt ist, hat die Mathematik Antworten gefunden, etwa durch das sogenannte Riemann-Integral.

Definition. Ist $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig auf* $[a,b]$, d.h. gibt es

$$a \;=\; c_0 \;<\; c_1 \;<\; \cdots \;<\; c_{k-1} \;<\; c_k = b$$

und $g_i : [c_i\,,\,c_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g_i|_{(c_i\,,\,c_{i+1})} = g|_{(c_i\,,\,c_{i+1})}$ für $0 \leqslant i \leqslant k-1$, dann setzen wir

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} g_i(x)\,\mathrm{d}x\;.$$

Anschaulich gesprochen ist g stückweise stetig auf $[a,b]$, wenn sein Graph zwischen a und b nur endlich viele Sprungstellen aufweist.

6.2 Eigenschaften

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

Bemerkung.

(1) Seien $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b \leqslant c$ und $[a,c] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ eine auf $[a,c]$ stückweise stetige Abbildung. Dann ist

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$$

und

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\;.$$

(2) Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Seien $f,\, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stückweise stetig. Seien $\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x \;=\; \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\;.$$

(3) Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stückweise stetig.

Wir haben $|I_+ + (-I_-)| \leqslant |I_+| + |-I_-| = I_+ + I_-$ und damit die erste Ungleichung in

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \;\leqslant\; \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; (b-a)\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\;.$$

Die zweite resultiert daher, daß die fragliche Fläche in ein Rechteck der Breite $b-a$ und der Höhe $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ eingeschlossen werden kann.

Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine differenzierbare Funktion $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *Aufleitung* von f, falls

$$F' = f \ .$$

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Sind F und $\tilde{F}$ Stammfunktionen von f, dann gibt es ein $y_0 \in \mathbb{R}$ mit ist $F(x) - \tilde{F}(x) = y_0$ für alle $x \in D$.

In anderen Worten, die Aufleitung von f ist nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Denn es ist $(F - \tilde{F})'(x) = F'(x) - \tilde{F}'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für $x \in D$.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$.

(1) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $f := F'$ stetig. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ = \ F(b) - F(a) \ .$$

(2) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$G \ : \ D \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ , \ \ x \ \longmapsto \ G(x) \ := \ \int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u$$

differenzierbar, und es gilt $G' = g$.

Begründung.

Zu (2). Sei $x \in D$. Wir haben $\lim_{t \to 0} \frac{G(x+t) - G(x)}{t} \overset{!}{=} g(x)$ zu verifizieren.

Schreibe $E := \{\, \tilde{x} - x \ : \ \tilde{x} \in D \,\}$ für den um x nach links verschobenen Definitionsbereich D.

Wir haben zu zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} (G(x+t) - G(x))t^{-1} & \text{für } t \in E \smallsetminus \{0\} \\ g(x) & \text{für } t = 0 \end{cases} \end{array}$$

stetig in $t = 0$ ist.

Für $t \in E \smallsetminus \{0\}$ ist

$$\begin{array}{rcl} (G(x+t) - G(x))t^{-1} - g(x) & = & \big((\int_a^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u) - (\int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u) \big) t^{-1} - g(x) \\ & = & \big(\int_x^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u \big) t^{-1} - g(x) \\ & = & \big(\int_x^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u \big) t^{-1} - \big(\int_x^{x+t} \overbrace{g(x)}^{\text{konst.}}\ \mathrm{d}u \big) t^{-1} \\ & = & \big(\int_x^{x+t} (g(u) - g(x))\,\mathrm{d}u \big) t^{-1} \ . \end{array}$$

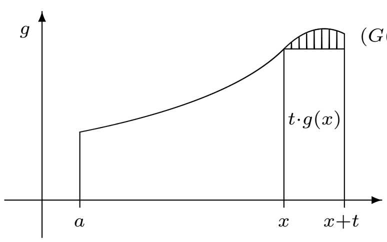
Der Betrag dieses Ausdrucks wird klein für kleines $|t|$, da $g(u)$ dann wegen $u \in (x-|t|, x+|t|)$ nahe bei $g(x)$ liegt. Dies wollen wir noch etwas formalisieren.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da g stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x-\delta, x+\delta) \subseteq D$ so, daß $|g(u) - g(x)| < \varepsilon$ ist für alle $u \in (x-\delta, x+\delta)$. Damit wird

$$\begin{array}{rcl} |(G(x+t) - G(x))t^{-1} - g(x)| & = & |\big(\int_x^{x+t} (g(u) - g(x))\,\mathrm{d}u\big)t^{-1}| \\ & \overset{\text{Bem. (3)}}{\leqslant} & \big(|t| \cdot \max_{u \in [x-|t|,\, x+|t|]} |g(u) - g(x)|\big)|t|^{-1} \\ & = & \max_{u \in [x-|t|,\, x+|t|]} |g(u) - g(x)| \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

für $t \in (-\delta, +\delta)$.

Skizze im Fall $t > 0$. Wir erkennen darin, daß $\frac{G(x+t)-G(x)}{t} \approx \frac{t \cdot g(x)}{t} = g(x)$; der Fehler im Zähler bei der Näherung ist der kleine schraffierte Flächeninhalt.



$(G(x+t) - G(x)) - t \cdot g(x) = (\int_a^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u) - (\int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u) - t \cdot g(x)$

Zu (1). Es ist $(\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u)' \overset{(2)}{=} f(x) = (F(x))'$, und also $\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u - F(x) = y_0$ für eine von x unabhängige Konstante $y_0 \in \mathbb{R}$.

Setzen wir $x = a$, so wird $y_0 = \int_a^a f(u)\,\mathrm{d}u - F(a) = -F(a)$.

Setzen wir nun $x = b$, so wird $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u - F(b) = y_0 = -F(a)$, und also

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \;=\; F(b) - F(a)\;.$$

Man nimmt den Hauptsatz auch zum Anlaß, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \text{konst.}$ zu schreiben, um auszudrücken, daß F eine Stammfunktion von f ist.

Ist F eine Stammfunktion von f, so schreibt man auch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [F(x)]_{x=a}^b \;:=\; F(b) - F(a)\;.$$

Beispiel.

(1) Für $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$ hat $f(x) = x^\alpha$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Stammfunktion $F(x) = (\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1}$.

Z.B. ist $\int_1^7 \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^7 x^{1/4}\,\mathrm{d}x = [x^{5/4} \cdot 4/5]_{x=1}^7 = (7^{5/4} - 1) \cdot 4/5 \approx 8{,}3088$.

Ist $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, so gilt diese Stammfunktion uneingeschränkt auf $\mathbb{R}$.

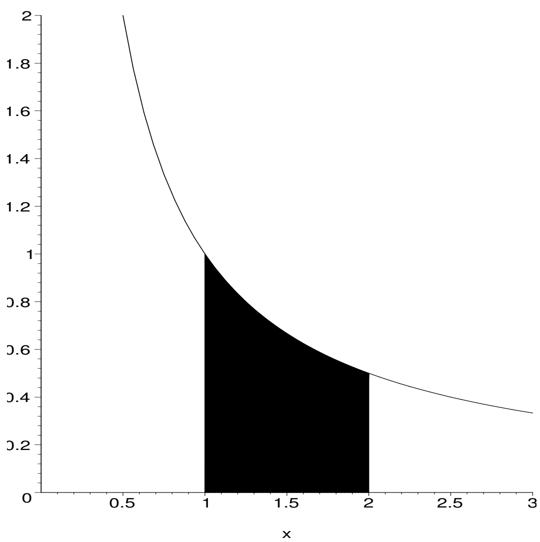
Z.B. ist $\int_{-1}^2 x^4\,\mathrm{d}x = [x^5/5]_{x=-1}^2 = 32/5 - (-1)/5 = 33/5 = 6{,}6$.

Ist $\alpha \in \mathbb{Z}_{\leqslant -2}$, so gilt diese Stammfunktion separat auf $\mathbb{R}_{>0}$ und auf $\mathbb{R}_{<0}$.

Z.B. ist $\int_{-5}^{-4} x^{-3}\,\mathrm{d}x = [x^{-2}/(-2)]_{x=-5}^{-4} = ((-4)^{-2} - (-5)^{-2})/(-2) = -9/800 \approx -0{,}01125$.

Sonderfall. Es hat $g(x) = x^{-1} = 1/x$ für $x > 0$ die Stammfunktion $G(x) = \ln(x)$.

Z.B. ist $\int_1^2 x^{-1}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_{x=1}^2 = \ln(2) \approx 0{,}6931$.

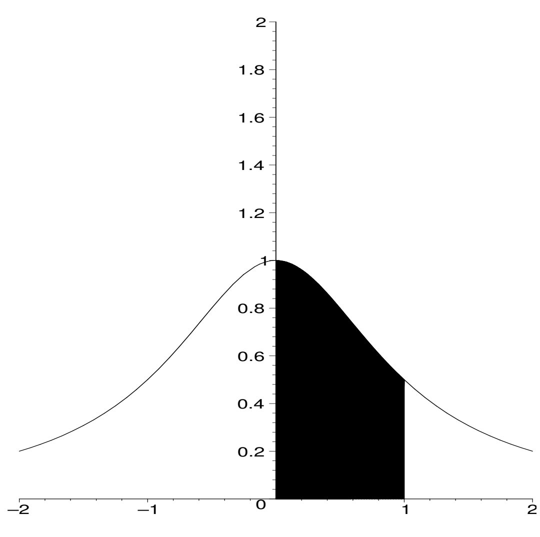


(2) Es ist e^x auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von e^x.

Z.B. ist $\int_{-1}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{x=-1}^0 = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - 1/\mathrm{e} \approx 0{,}6321$.

(3) Es ist $\arctan(x)$ auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $(x^2+1)^{-1}$; vgl. Aufgabe **??**.(2).

Z.B. ist $\int_0^1 (x^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_{x=0}^1 = \pi/4 \approx 0{,}7854$.



(4) Es ist $\arcsin(x)$ auf $(-1,+1)$ eine Stammfunktion von $(1-x^2)^{-1/2}$; vgl. §3.2.4.1.

Z.B. ist $\int_{-1/2}^{1/2} (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = [\arcsin(x)]_{x=-1/2}^{1/2} = \pi/6 - (-\pi/6) = \pi/3 \approx 1{,}0472$.

6.3 Techniken

6.3.1 Substitution

Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Sei $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, mit g' stetig. Sei $g([a,b]) \subseteq E$.

Lemma (Substitutionsregel). Es ist

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Denn ist $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$, dann ist nach Kettenregel $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, mithin $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$. Wir erhalten $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Beispiel.

(1) Wir wollen $\int_1^4 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Wir setzen $g(x) := 1 + x^2$. Es ist $g'(x) = 2x$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_1^4 \tfrac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;&=\; \tfrac{1}{2}\int_1^4 \tfrac{x^2}{1+x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{2}\int_1^4 \tfrac{g(x)-1}{g(x)} \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{2}\int_2^{17} \tfrac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &=\; \tfrac{1}{2}\int_2^{17}(1-u^{-1})\,\mathrm{d}u \;=\; \tfrac{1}{2}[u - \ln(u)]_{u=2}^{17} \;=\; \tfrac{1}{2}(15 - \ln(\tfrac{17}{2})) \;\approx\; 6{,}4300\ .\end{aligned}$$

(2) Wir wollen $\int_0^v \tan(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen für $v \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Da $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, setzen wir $g(x) := \cos(x)$. Es ist $g'(x) = -\sin(x)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^v \tan(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; -\int_0^v \tfrac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_0^v \tfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_1^{\cos(v)} \tfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &=\; \int_{\cos(v)}^1 \tfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u \;=\; [\ln(u)]_{u=\cos(v)}^1 = -\ln(\cos(v))\ .\end{aligned}$$

(3) Seien $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $\mu \in \mathbb{R}$. Wir wollen $\int_a^b f(\lambda x + \mu)\,\mathrm{d}x$ berechnen unter Verwendung einer Stammfunktion F von f. Wir setzen $g(x) := \lambda x + \mu$. Es ist $g'(x) = \lambda$. Wir erhalten

$$\int_a^b f(\lambda x + \mu)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(g(x)) \cdot \lambda^{-1} \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\lambda a+\mu}^{\lambda b+\mu} f(u) \cdot \lambda^{-1}\,\mathrm{d}u \;=\; \tfrac{1}{\lambda}(F(\lambda b + \mu) - F(\lambda a + \mu))\ .$$

6.3.2 Produktregel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei F eine Stammfunktion von f. Sei $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, mit g' stetig.

Lemma (Produktregel). Es ist

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \;=\; [F(x) \cdot g(x)]_{x=a}^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x \;.$$

Diese Regel nennt man auch *partielle Integration.*

Denn nach der Produktregel aus §3.2.1 ist $F(x)\, g(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)\, g(x) + F(x)\, g'(x)$, woraus sich $\int_a^b (f(x)\, g(x) + F(x)\, g'(x)) \, \mathrm{d}x = [F(x)\, g(x)]_{x=a}^b$ ergibt.

Beispiel.

(1) Es ist $\int_0^1 \mathrm{e}^x \cdot x \, \mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x \cdot x]_{x=0}^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_{x=0}^1 = 1.$

(2) Für $v \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$\int_1^v \ln(x) \, \mathrm{d}x \;=\; \int_1^v 1 \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x \;=\; [x \cdot \ln(x)]_{x=1}^v - \int_1^v x \cdot x^{-1} \, \mathrm{d}x \;=\; v \cdot \ln(v) - v + 1 \;.$$

6.3.3 Partialbruchzerlegung (reell zerfallender Nenner)

Sei $m \geqslant 1$. Seien $s_i \in \mathbb{R}$ für $i \in [1, m]$ gegeben mit $s_i \neq s_j$ für $i,\, j \in [1, m]$ mit $i \neq j$.

Sei $D := \mathbb{R} \smallsetminus \{s_1\,,\, \ldots\,,\, s_m\}$.

Seien $k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $i \in [1, m]$.

Sei $f(x)$ ein Polynom, dessen Grad kleiner als $\sum_{i=1}^m k_i$ ist.

Wir wollen Konstanten $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ so finden, daß

$$\frac{f(x)}{(x - s_1)^{k_1} \cdot (x - s_2)^{k_2} \cdots (x - s_m)^{k_m}} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(x - s_i)^j}$$

für alle $x \in D$.

Zur Bestimmung der $a_{i,j}$ multipliziere man beide Seiten mit $(x - s_1)^{k_1} \cdots (x - s_m)^{k_m}$ und vergleiche die Koeffizienten. Dies liefert ein lineares Gleichungssystem.

In der Praxis verwendet man üblicherweise Bezeichnungen A, B, C, $\ldots$ statt der $a_{i,j}$.

Beispiel.

(1) Wir wollen $\int_2^3 \frac{x^4}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$ bestimmen.

Der Zähler hat nicht kleineren Grad als der Nenner. Also multiplizieren wir aus, $(x-1)(x+1) = x^2-1$, und führen eine Polynomdivision durch, welche $x^4 = (x^2-1)(x^2+1)+1$ liefert. Das gibt

$$\int_2^3 \frac{x^4}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_2^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x\;.$$

Davon ist $\int_2^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{3}$.

Nun suchen wir $A,\, B \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\;.$$

Durchmultiplizieren mit $(x-1)(x+1)$ liefert die Bedingung

$$1 \;\overset{!}{=}\; A(x-1) + B(x+1)\;.$$

Koeffizientenvergleich liefert also die Bedingung $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir rechnen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)\;.$$

Also ist $A = -1/2$ und $B = 1/2$. Damit wird

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_2^3 \left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\right)\mathrm{d}x \;=\; -\tfrac{1}{2}\cdot[\ln(x+1)]_{x=2}^3 + \tfrac{1}{2}\cdot[\ln(x-1)]_{x=2}^3 \\ &=\; -\tfrac{1}{2}\cdot(\ln(4)-\ln(3)) + \tfrac{1}{2}\cdot(\ln(2)-\ln(1)) \;=\; \tfrac{1}{2}\ln(3/2)\;. \end{aligned}$$

Insgesamt wird somit $\int_2^3 \frac{x^4}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{3} + \frac{1}{2}\ln(3/2) \approx 7{,}5361$.

(2) Wir wollen $\int_2^3 \frac{x-1}{(x+1)^3\cdot x^2}\,\mathrm{d}x$ bestimmen. Dazu suchen wir $A,\, B,\, C,\, E,\, F \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x-1}{(x+1)^3\,\cdot\,x^2} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{E}{x} + \frac{F}{x^2}\;.$$

Durchmultipliziert liefert das die Bedingung

$$x-1 \;\overset{!}{=}\; A(x^4+2x^3+x^2)+B(x^3+x^2)+Cx^2+E(x^4+3x^3+3x^2+x)+F(x^3+3x^2+3x+1)\;.$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \\ F \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} 0&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&3&1 \\ 1&1&1&3&3&0 \\ 2&1&0&3&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r} 1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&3&1 \\ 0&1&1&2&3&0 \\ 0&1&0&1&1&0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r} 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&3&1 \\ 0&0&1&1&2&0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r} 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&2&0 \\ 0&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&3&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccr|r} 1&0&0&0&-3&-1 \\ 0&1&0&0&-2&-1 \\ 0&0&1&0&-1&-1 \\ 0&0&0&1&3&1 \\ 0&0&0&0&1&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r} 1&0&0&0&0&-4 \\ 0&1&0&0&0&-3 \\ 0&0&1&0&0&-2 \\ 0&0&0&1&0&4 \\ 0&0&0&0&1&-1 \end{array}\right)$$

Also ist $A=-4$, $B=-3$, $C=-2$, $E=4$ und $F=-1$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x-1}{(x+1)^3\cdot x^2}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_2^3 \left(\frac{-4}{x+1} + \frac{-3}{(x+1)^2} + \frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{4}{x} + \frac{-1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &=\; [-4\ln(x+1) + 3(x+1)^{-1} + (x+1)^{-2} + 4\ln(x) + x^{-1}]_{x=2}^3 \\ &=\; 4\ln(9/8) - 67/144 \;\approx\; 0{,}005854\;. \end{aligned}$$

Man beachte noch, daß keine der Nullstellen s_i des Nenners im Intervall liegen sollte, über das integriert wird.

Die Partialbruchzerlegung mit nicht mehr reell zerfallendem Nenner wird später in §11.3 mittels komplexer Zahlen behandelt. Das Beispiel $\frac{1}{x^2+1}$ hierfür haben wir in §6.2 schon integriert.

6.4 Uneigentliche Integrale

Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{u \to a} \int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

sofern die rechte Seite definiert ist. Diesenfalls sagt man auch, das vorliegende *uneigentliche Integral konvergiert.*

Sei $c \in \mathbb{R}$. Sei $g : [c, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen

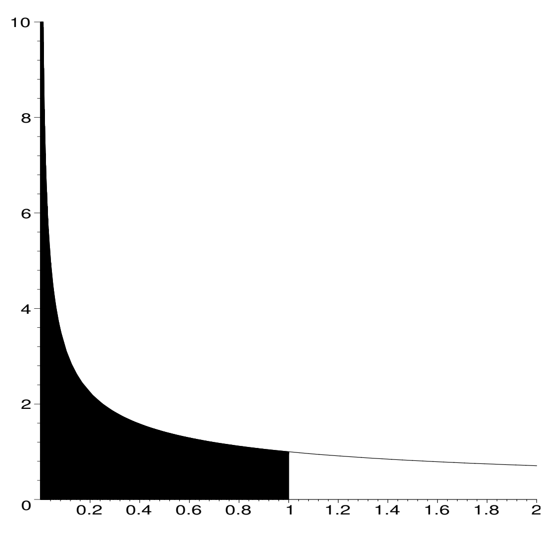
$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{v \to \infty} \int_a^v g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

sofern die rechte Seite definiert ist. Diesenfalls sagt man auch, das vorliegende *uneigentliche Integral konvergiert.*

Die weiteren Fälle endlicher oder unendlicher undefinierter Integralgrenzen entsprechend – wann immer der Integrand an der Grenze selbst nicht definiert ist, ist ein Grenzwert zu bilden.

Beispiel.

(1) Es ist $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{u \to 0} \int_u^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{u \to 0} [2x^{1/2}]_{x=u}^1 = \lim_{u \to 0}(2 - 2u^{1/2}) = 2.$

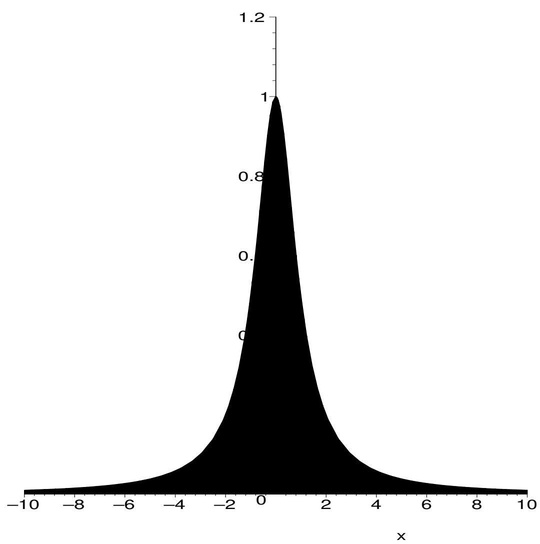


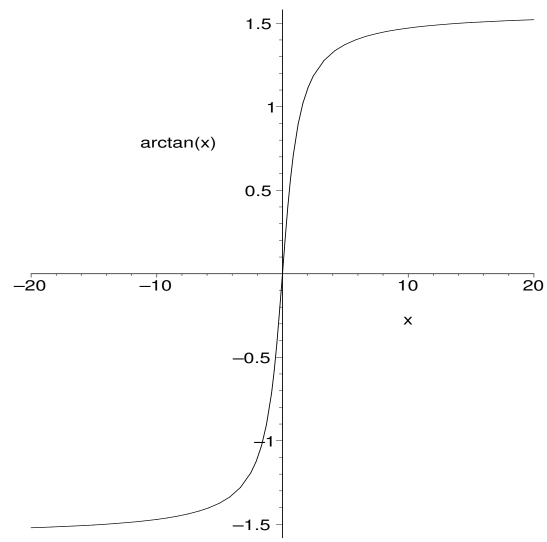
(2) Es ist $\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to\infty}\int_1^v x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to\infty}[-x^{-1}]_{x=1}^v = \lim_{v\to\infty}(-v^{-1}+1) = 1.$

(3) Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{v\to\infty}\int_0^v (1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{v\to\infty}[\arctan(x)]_0^v \\ &= \lim_{v\to\infty}(\arctan(v)-\arctan(0)) \\ &= \pi/2 - 0 \\ &= \pi/2\,.\end{aligned}$$

Genauso ist $\int_{-\infty}^0 (1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x = \pi/2$.





Kapitel 7

Wachstumsrate und Elastizität

7.1 Wachstumsrate

Sei eine differenzierbare (Kapital-)Funktion

$$\begin{array}{rcccc} K & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & K(t) \end{array}$$

gegeben, die das Kapital $K(t)$ abhängig von der Zeit t angibt. Sei hierbei $K(t) > 0$ stets.

> Man denke etwa an festangelegtes Kapital.
>
> Es ist auch möglich, einen kleineren Definitionsbereich zu wählen, etwa ein Zeitintervall.

Definition. Die *Wachstumsrate* von K zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{R}_K(t) \;:=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \big(\ln(K(t))\big)' \,.$$

Die zweite Gleichheit resultiert hierbei aus der Kettenregel.

Beispiel. Seien 250 Euro zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt. Es wird $K(t) = 250 \cdot 1{,}05^t = 250 \cdot \mathrm{e}^{t\cdot\ln(1{,}05)}$. Die Wachstumsrate ergibt sich zu

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \frac{250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot \mathrm{e}^{t\cdot\ln(1{,}05)}}{250 \cdot \mathrm{e}^{t\cdot\ln(1{,}05)}} \;=\; \ln(1{,}05) \;\approx\; 0{,}04879 \,.$$

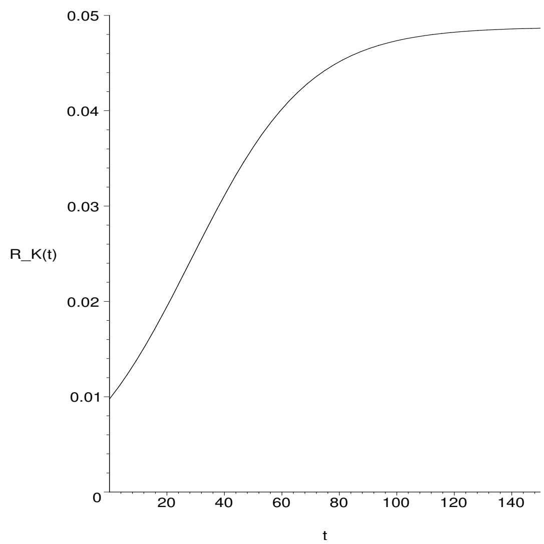
> Die Wachstumsrate ist bei fester Verzinsung konstant, wofür wir eben ein Beispiel sahen.
>
> Allgemein mißt die Wachstumsrate den "momentan benötigten Faktor λ im Exponenten", so man die gegebene Funktion $K(t)$ um einen gewählten Zeitpunkt mit einer Exponentialfunktion $a \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ bestmöglich annähern will.

Beispiel. Seien 250 Euro zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt. Seien jährlich 10 Euro Kontoführungsgebühr fällig, die zwischen den vollen Jahren anteilig berechnet werde. Es wird

$$K(t) = 250 \cdot 1{,}05^t - \frac{1{,}05^t - 1}{1{,}05 - 1} \cdot 10 \;=\; 250 \cdot 1{,}05^t - (1{,}05^t - 1) \cdot 200 \;=\; 50 \cdot 1{,}05^t + 200\,.$$

Also wird

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \frac{50 \cdot \ln(1{,}05) \cdot 1{,}05^t}{50 \cdot 1{,}05^t + 200} \;=\; \ln(1{,}05) \cdot \frac{1}{1 + 4 \cdot 1{,}05^{-t}}\,.$$



Erst als sich genügend Zinsen und Zinseszinsen angesammelt haben, schlagen die Kontogebühren nicht mehr so zu Buche, was die Wachstumsrate angeht, so daß sich letztere nach einiger Zeit wieder der Wachstumsrate 0,04879 bei bloßer Verzinsung annähert.

7.2 Elastizität

7.2.1 Definition Elastizität

Sei eine auf $\mathbb{R}_{>0}$ zweimal differenzierbare Funktion

$$\begin{array}{rccc} f \;:\; & \mathbb{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

gegeben, wobei $f(x) > 0$ stets.

Definition. Die *Elastizität* von f bei $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{E}_f(x) \;:=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \;=\; (\ln(f(x)))' \cdot x\,.$$

Die zweite Gleichheit resultiert hierbei aus der Kettenregel.

Beispiel. Sei $x_0 > 0$. Sei $f(x) = (x + x_0)^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}_{<0}$. Dann wird

$$\mathrm{E}_f(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \;=\; \frac{\alpha(x+x_0)^{\alpha-1}}{(x+x_0)^\alpha} \cdot x \;=\; \alpha \cdot \frac{x}{x+x_0}\,.$$

Bemerkung. Gehört zu x die Einheit A (z.B. Euro/kg), zu $f(x)$ die Einheit B (z.B. kg), so gehört zu $f'(x)$ die Einheit B/A, also zu $\mathrm{E}_f(x)$ die Einheit $\frac{B/A}{B} \cdot A = 1$. Die Elastizität ist also auch in der Anwendung eine bloße Zahl, ohne Einheit.

7.2.2 Gewinn maximieren

Sei $f(x)$ aus §7.2.1 nun die Nachfrage nach einem Produkt in Abhängigkeit vom Stückgewinn x (auch Gewinnmarge genannt), d.h. von der Differenz von Preis und Kosten pro Einheit.

Der Gesamtgewinn ergibt sich zu

$$G(x) \;:=\; f(x) \cdot x\,,$$

sofern die Nachfrage voll befriedigt wird, wovon wir ausgehen wollen.

Diese Variante findet also Anwendung, wenn das Angebot größer als die Nachfrage ist.

Üblicherweise sinkt die Nachfrage bei steigendem Stückgewinn.

Lemma. Sei $f(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $f'(x) < 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Sei ferner vorausgesetzt, daß $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$ ist für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$, so nimmt der Gesamtgewinn beim Stückgewinn von x_0 ein Maximum $G(x_0) = f(x_0) \cdot x_0$ an, bei einer Nachfrage von $f(x_0)$ Einheiten.

Genauer, es ist $G(x_0) > G(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \smallsetminus \{x_0\}$.

Das Maximum ist also nicht nur lokal im Sinne von §3.2.3.1 zu verstehen.

Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ zu verlangen, daß $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$ ist, ist äquivalent dazu, zu verlangen, daß für kein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ sowohl $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ als auch $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$ ist. Es ist für die Anwendung des Lemmas also günstig, wenn E_f und $\mathrm{E}_{f'}$ stets nahe beieinanderliegen.

Begründung. Es ist $G'(x) = f'(x)x + f(x) = f(x)(\mathrm{E}_f(x) + 1)$. Aus $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$ folgt also $G'(x_0) = 0$, so daß G bei x_0 eine Flachstelle hat.

Ferner ist $G''(x) = f''(x)x + 2f'(x) = f'(x)(\mathrm{E}_{f'}(x) + 2)$. Da stets $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$, ist an jeder Stelle $G''(x) < 0$ oder $G'(x) < 0$. Somit ist $G'(x)$ streng monoton fallend, solange $G'(x) > 0$ und um x_0. Sobald $G'(x)$ zum ersten Mal in den negativen Bereich läuft, kann es diesen nicht mehr verlassen, da es diesenfalls eine Stelle mit sowohl $G'(x) \geqslant 0$ als auch $G''(x) \geqslant 0$ gäbe. Also ist $G'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $G'(x) < 0$ für $x > x_0$. Es folgt $G(x) < G(x_0)$ für $x < x_0$ und $G(x) < G(x_0)$ für $x > x_0$; vgl. §3.2.2.

Beispiel. Sei $f(x) = 100 \cdot 0{,}94^x$. Wir haben $f(x) > 0$ stets.

Ferner ist $f'(x) = 100 \cdot \ln(0{,}94) \cdot 0{,}94^x < 0$ stets, da $\ln(0{,}94) \approx -0{,}062$.

Die Elastizität von f ergibt sich zu

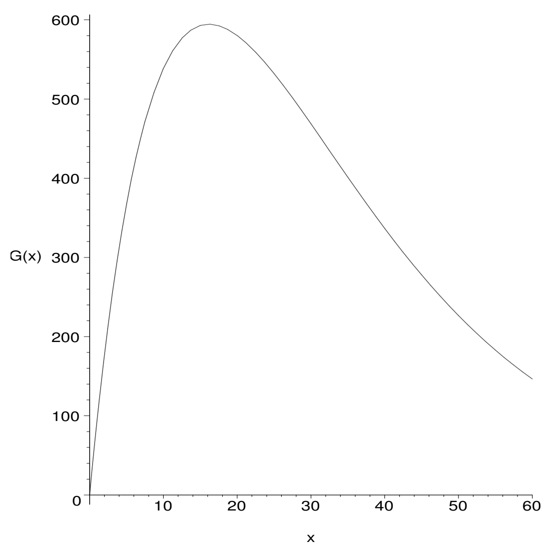
$$\mathrm{E}_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{100 \cdot \ln(0{,}94) \cdot 0{,}94^x}{100 \cdot 0{,}94^x} \cdot x = \ln(0{,}94) \cdot x \, .$$

Die Elastizität von f' ergibt sich zu

$$\mathrm{E}_{f'}(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = \frac{100 \cdot (\ln(0{,}94))^2 \cdot 0{,}94^x}{100 \cdot \ln(0{,}94) \cdot 0{,}94^x} \cdot x = \ln(0{,}94) \cdot x \, .$$

Da diese beiden Elastizitäten zufällig übereinstimmen, ist nie $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$, und also stets $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$.

Aus der Bedingung $\mathrm{E}_f(x_0) = \ln(0{,}94) \cdot x_0 \stackrel{!}{=} -1$ erhalten wir $x_0 = -1/\ln(0{,}94) \approx 16{,}1615$. Der maximale Gesamtgewinn ist also bei einem Stückgewinn von 16,1615 erzielbar und beträgt $G(x_0) = 100 \cdot 0{,}94^{-1/\ln(0{,}94)} \cdot (-1/\ln(0{,}94)) \approx 594{,}55$, bei einer Nachfrage von $f(x_0) = 100 \cdot 0{,}94^{-1/\ln(0{,}94)} \approx 36{,}7879$.



Kapitel 8

Taylorentwicklung

8.1 Taylor in einer Variablen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine offenes Intervall. Sei die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Ihre k-te Ableitung werde auch mit $f^{(k)}(x)$ bezeichnet; also z.B. $f^{(2)}(x) = f''(x)$.

Satz (Taylor). Sei $x_0 \in D$. Sei $n \geqslant 0$. Für $x \in D$ ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\right)}^{\text{Taylorpolynom von Ordnung } n} + \overbrace{\tfrac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t}^{\text{Restglied}} \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom von Ordnung } n} + \underbrace{\tfrac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}} \,. \end{aligned}$$

Man spricht von der *Taylorentwicklung* von $f(x)$ um x_0 von Ordnung n.

Die Entwicklung ohne das Restglied heißt auch *Taylorpolynom* von $f(x)$ um x_0 von Ordnung n, vgl. oben.

Das Restglied ist für x nahe bei x_0 als klein im Vergleich zu den anderen Summanden zu denken.

Wenn für ein gegebenes $x \in D$ die Folge $\left(\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ der Restglieder gegen 0 konvergiert, dann ist

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \,.$$

Diesenfalls spricht man schlicht von der *Taylorentwicklung* von $f(x)$ um x_0.

Begründung für die Taylorentwicklung (mit Restglied). Die Produktregel der Integration aus §6.3.2, mehrfach angewandt, gibt

$$\begin{array}{rl} & f(x) \\ = & f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + [f'(t)(t-x)]_{t=x_0}^x - \int_{x_0}^x f''(t)\cdot(t-x)\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) - \int_{x_0}^x f''(t)\cdot(t-x)\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) - [f''(t)\cdot\frac{1}{2}(t-x)^2]_{t=x_0}^x + \int_{x_0}^x f'''(t)\cdot\frac{1}{2}(t-x)^2\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{1}{2}(x-x_0)^2 + \int_{x_0}^x f'''(t)\cdot\frac{1}{2}(t-x)^2\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{1}{2}(x-x_0)^2 + [f'''(t)\cdot\frac{1}{6}(t-x)^3]_{t=x_0}^x - \int_{x_0}^x f^{(4)}(t)\cdot\frac{1}{6}(t-x)^3\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{1}{2}(x-x_0)^2 + f'''(x_0)\cdot\frac{1}{6}(x-x_0)^3 - \int_{x_0}^x f^{(4)}(t)\cdot\frac{1}{6}(t-x)^3\,\mathrm{d}t \\ = & \ldots\,. \end{array}$$

Bemerkung. Manchmal verwendet man in der Situation des Satzes von Taylor für die Taylorentwicklung auch das alternative Restglied in

$$f(x) \;=\; \left(\sum_{k=0}^n \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\right) + \overbrace{\tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + s(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}}^{\text{alternatives Restglied}}\,,$$

mit einem $s \in [0,1]$, welches von x_0, f und x abhängt.

Beispiel.

(1) Sei $D = \mathbb{R}$. Sei $f(x) = (x+1)^3$. Wir wollen die Taylorentwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ in dritter Ordnung betrachten, also $n = 3$ setzen.

Es ist $f^{(4)}(x) = 0$, also verschwindet das Restglied.

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^3 & = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 \\ & = & (0+1)^3 + 3(0+1)^2(x-0) + \frac{1}{2!}\,6(0+1)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\,6(x-0)^3 \\ & = & 1 + 3x + 3x^2 + x^3\,, \end{array}$$

wie man auch aus der binomischen Formel erkennt.

So kann man einsehen, daß der Satz von Taylor eine "auf beliebige Funktionen verallgemeinerte binomische Formel" ist.

(2) Sei $D = \mathbb{R}$. Sei $f(x) = \mathrm{e}^x$. Es ist $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ für $n \geqslant 0$. Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ in n-ter Ordnung gibt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x & = & \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\right) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ & = & \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^0(x-0)^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x \mathrm{e}^t(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ & = & \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\,x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x \mathrm{e}^t(x-t)^n\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

Für das Restglied gilt, daß

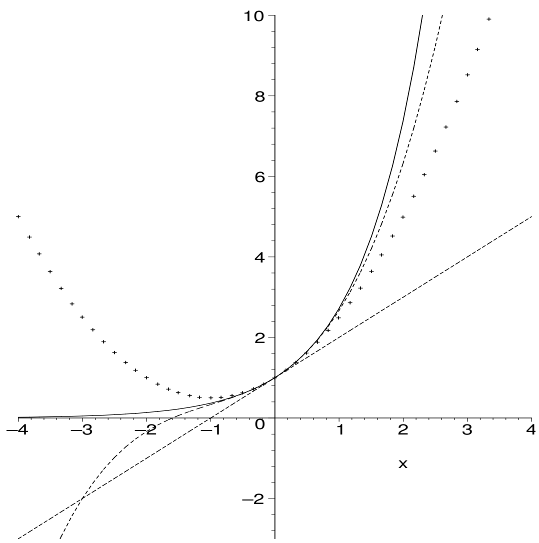
$$\left|\tfrac{1}{n!}\int_0^x \mathrm{e}^t(x-t)^n\,\mathrm{d}t\right| \overset{\S 6.2}{\leqslant} \tfrac{1}{n!}\,|x|\cdot\max_{t\in[-|x|,+|x|]}|\mathrm{e}^t(x-t)^n| \;\leqslant\; \tfrac{1}{n!}\,|x|\cdot\mathrm{e}^{|x|}|2x|^n\,,$$

wobei das Maximum über einen etwas größeren Bereich als nötig genommen wurde. Dies zeigt, daß das Restglied gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Also ist

$$\mathrm{e}^x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k$$

für $x \in \mathbb{R}$. Wir haben also die Definition von e^x zurückerhalten; vgl. §2.3.3.

Wir zeichnen zum Graph von e^x die Graphen der Taylorpolynome in erster, zweiter und dritter Ordnung ein, d.h. von $1+x$, von $1+x+\frac{1}{2}\,x^2$ und von $1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3$.



(3) Sei $D = \mathbb{R}$. Sei $f(x) = \sin(x)$. Sei $x_0 = 0$.

Es ist $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x)$ und $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x)$ für $k \geqslant 0$. Insbesondere ist $f^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \sin(0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(x_0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$. Bei Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ in $(2n+1)$-ter Ordnung verbleibt also

$$\begin{aligned} \sin(x) \;&=\; \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(x_0)(x-x_0)^{2k+1}\right) + \frac{1}{(2n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(2n+2)}(t)(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t \\ &=\; \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\int_0^x \sin(t)(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t\;. \end{aligned}$$

Für das Restglied gilt, daß

$$\begin{aligned} & \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\int_0^x \sin(t)(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right| \\ \overset{\S 6.2}{\leqslant}\;& \frac{1}{(2n+1)!}\,|x|\cdot \max_{t\in[-|x|,+|x|]} |\sin(t)(x-t)^{2n+1}| \\ \leqslant\;& \frac{1}{(2n+1)!}\,|x|\cdot|2x|^{2n+1}\;, \end{aligned}$$

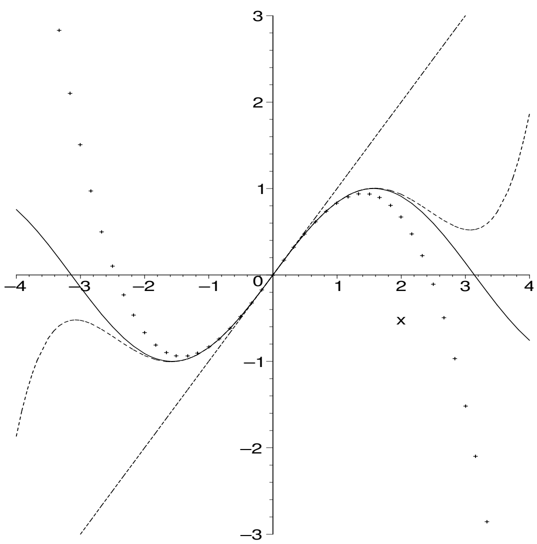
wobei das Maximum über einen etwas größeren Bereich als nötig genommen wurde. Dies zeigt, daß das Restglied gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Also ist

$$\sin(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \;=\; \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \;=\; x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \pm \cdots$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Der rechten Seite ist die Periodizität $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ nicht mehr ohne weiteres anzusehen.

Wir zeichnen zum Graph von $\sin(x)$ die Graphen der Taylorpolynome in erster, dritter und fünfter Ordnung ein, d.h. von x, von $x - \frac{1}{6}\,x^3$ und von $x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5$.



8.2 Der Gradient und die Hessematrix

Sei $m \geqslant 1$.

Wir erinnern an die abkürzende Schreibweise $\underline{x} := (x_1\,, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$; vgl. §2.4.1.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$ eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion; vgl. §3.3.1.

8.2.1 Der Gradient

Definition. Der *Gradient* von f in $\underline{x} \in D$ ist gegeben durch

$$\nabla_f(\underline{x}) \;:=\; \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{x}) \\ f_{x_2}(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_{x_m}(\underline{x}) \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{m\times 1}\,.$$

Der Buchstabe ∇ spricht sich “nabla”.

Vgl. Beispiel in §5.2.2.

Beispiel. Sei $m = 3$. Sei $D = \mathbb{R}^3$. Sei $f(\underline{x}) = f(x_1\,, x_2\,, x_3) = x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3$. Es ist

$$\nabla_f(\underline{x}) \;=\; \nabla_f(x_1\,, x_2\,, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{x}) \\ f_{x_2}(\underline{x}) \\ f_{x_3}(\underline{x}) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3x_1^2+x_2^2+x_2x_3 \\ 2x_1x_2+x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{3\times 1} \;.$$

Beispiel. Ist $m = 2$, und verwenden wir die Variablenbezeichnungen x und y anstelle von x_1 und x_2 , so ist $\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$.

8.2.2 Die Hessematrix

Definition. Die *Hessematrix* von f in $\underline{x} \in D$ ist gegeben durch

$$\mathrm{H}_f(\underline{x}) \;:=\; \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x}) & f_{x_1x_2}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_1x_m}(\underline{x}) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x}) & f_{x_2x_2}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_2x_m}(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_mx_1}(\underline{x}) & f_{x_mx_2}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_mx_m}(\underline{x}) \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{m\times m} \;.$$

Nach dem Lemma von Schwarz ist $\mathrm{H}_f(\underline{x}) = \mathrm{H}_f(\underline{x})^{\mathrm{t}}$; vgl. §3.3.1, §5.1. Man sagt auch, die Hessematrix ist *symmetrisch.*

Beispiel. Sei $m = 3$. Sei $D = \mathbb{R}^3$. Sei wieder $f(\underline{x}) = f(x_1\,, x_2\,, x_3) = x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3$. Es ist

$$\mathrm{H}_f(\underline{x}) \;=\; \mathrm{H}_f(x_1\,, x_2\,, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x}) & f_{x_1x_2}(\underline{x}) & f_{x_1x_3}(\underline{x}) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x}) & f_{x_2x_2}(\underline{x}) & f_{x_2x_3}(\underline{x}) \\ f_{x_3x_1}(\underline{x}) & f_{x_3x_2}(\underline{x}) & f_{x_3x_3}(\underline{x}) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 6x_1 & 2x_2+x_3 & x_2 \\ 2x_2+x_3 & 2x_1 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \;.$$

Wir sehen, daß in der Tat $\mathrm{H}_f(\underline{x}) = \mathrm{H}_f(\underline{x})^{\mathrm{t}}$ ist.

Beispiel. Ist $m = 2$, und verwenden wir die Variablenbezeichnungen x und y anstelle von x_1 und x_2 , so ist $\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$.

8.2.3 Näherungspolynome in mehreren Variablen

Definition. Sei $\underline{\hat{x}} = (\hat{x}_1\,, \ldots, \hat{x}_m) \in D$ eine Stelle, in deren Umgebung wir eine Näherung für die Funktion f suchen.

Es ist

$$f(\underline{\hat{x}}) + (\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \nabla_f(\underline{\hat{x}})$$

die *Näherung erster Ordnung von f um die Stelle $\underline{\hat{x}} \in D$.*

Es ist

$$f(\underline{\hat{x}}) + (\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \nabla_f(\underline{\hat{x}}) + \tfrac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}}) \cdot (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}}$$

die *Näherung zweiter Ordnung von f um die Stelle* $\underline{\hat{x}} \in D$.

Beispiel.

Sei $D = \mathbb{R}^2$. Sei $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$. Wir wollen die Näherung zweiter Ordnung von f um die Stelle $(0,0)$ bestimmen.

Es wird $f_x(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$, $f_y(x,y) = 2\mathrm{e}^{x+2y}$, $f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$, $f_{xy}(x,y) = 2\mathrm{e}^{x+2y}$ und $f_{yy}(x,y) = 4\mathrm{e}^{x+2y}$.

Folglich wird $\nabla_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Ferner wird $\mathrm{H}_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir erhalten als Näherung zweiter Ordnung von e^{x+2y} um die Stelle $(0,0)$ folgendes Polynom.

$$\begin{array}{rl} & 1 + \left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right) \cdot \nabla_f(0,0) + \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{H}_f(0,0) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\ & 1 + \left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\ = & 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2\ . \end{array}$$

Als Näherung erster Ordnung von e^{x+2y} um die Stelle $(0,0)$ folgendes Polynom ergibt sich übrigens

$$1 + x + 2y\ ,$$

wie man durch Weglassen des Terms mit der Hessematrix erkennt.

Kapitel 9

Mehr über Matrizen

9.1 Determinanten

Algorithmus (und Definition). Sei $n \geqslant 1$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix von quadratischer Gestalt.

Wir wollen die *Determinante* von A, geschrieben $\det A$, definieren und berechnen.

Hierzu bringen die Matrix A auf Zeilenstufenform; vgl. §5.3. Wird dabei bei einem Säuberungsschritt eine Zeile durch einen Faktor dividiert, um in der operierenden Zeile an vorderer Stelle eine 1 zu bekommen, so notieren wir uns diesen Faktor. Beim Hinauf- oder Hinuntertauschen einer Zeile um k Zeilen notieren wir uns den Faktor $(-1)^k$.

Falls die Zeilenstufenform von A gleich E_n ist, so ist $\det A$ das Produkt dieser notierten Faktoren.

Falls die Zeilenstufenform eine Nullzeile enthält, so ist $\det A = 0$.

Beachte, daß beim ersten Auftreten einer Nullzeile während der Umformung die Rechnung mit dem Ergebnis $\det A = 0$ abgebrochen werden kann, da im weiteren Verlauf diese Nullzeile erhalten bliebe.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 2&2&2&3\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Wir formen um. Auf die Pfeile schreiben wir uns jeweils die zu notierenden Faktoren.

$$\begin{pmatrix} 2&2&2&3\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} \overset{2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&1&1&3/2\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&3/2\\ 0&-1&-1&-5/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix} \overset{(-1)^1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&1&1&3/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&-1&-1&-5/2\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&5/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&-1&-7/2\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&1&5/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&7/2\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&7/2\\ 0&0&0&-9/2 \end{pmatrix} \overset{(-9/2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&7/2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_4\,.$$

Also ist $\det A = \det\begin{pmatrix} 2&2&2&3\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} = 2\cdot(-1)^1\cdot(-1)\cdot(-9/2) = -9.$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Wir formen um. Auf die Pfeile schreiben wir uns jeweils die zu notierenden Faktoren.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{(-1)^1\cdot 2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & -3/2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-1)^2\cdot 3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & -3/2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-1)^2\cdot 5}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/5 & -3 \end{pmatrix} \overset{(-1)^1\cdot(-3/5)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & -3/2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/2 \end{pmatrix} \overset{(-7/2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit wird $\det A = (-1)^1 \cdot 2 \cdot (-1)^2 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \cdot 5 \cdot (-1)^1 \cdot (-3/5) \cdot (-7/2) = 63$.

Später werden wir das Herausziehen der Faktoren und das Säubern der entsprechenden Spalte wieder in einem Schritt vollziehen.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir formen um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\det A = 0$.

Bemerkung.

(1) Es ist $\det(\alpha_{1,1}) = \alpha_{1,1}$.

Es ist $\det\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}$.

Es ist

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2}\,\alpha_{3,3} + \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,3}\,\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\,\alpha_{2,1}\,\alpha_{3,2} - \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,3}\,\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}\,\alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}\,\alpha_{2,2}\,\alpha_{3,1}$$

(genannt *Regel von Sarrus*).

Hierbei sei $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $i,\, j \in \{1, 2, 3\}$.

Die Regel im Fall 2×2 ist fast immer nützlich, die im Fall 3×3 zuweilen.

(2) Seien $k,\, \ell \geqslant 1$. Sei $S \in \mathbb{R}^{k\times k}$, sei $T \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ und sei $U \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$. Es ist

$$\det\left(\begin{array}{c|c} S & T \\ \hline 0 & U \end{array}\right) = (\det S) \cdot (\det U)\,.$$

So z.B. ist $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \det(7) = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) \cdot 7 = -35$.

Dies kann man auch iterieren.

Ein paar Begriffe. Die (*Haupt-*)*Diagonale* einer Matrix $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $n \geqslant 1$, besteht aus den Einträgen $\alpha_{1,1}\,,\ \ldots,\ \alpha_{n,n}$. Eine *obere Dreiecksmatrix* hat unterhalb der Diagonalen nur Nulleinträge. Eine *untere Dreiecksmatrix* hat oberhalb der Diagonalen nur Nulleinträge. Eine *Diagonalmatrix* hat außerhalb der Diagonalen nur Nulleinträge.

Iteration obengenannter Tatsache liefert nun z.B., daß die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonaleinträge ist. Z.B. ist $\det\left(\begin{smallmatrix} 3&6&5\\ 0&2&5\\ 0&0&7 \end{smallmatrix}\right) = 3\cdot 2\cdot 7 = 42$.

Insbesondere ist die Determinante einer Diagonalmatrix gleich dem Produkt der Diagonaleinträge. Z.B. ist $\det\left(\begin{smallmatrix} 3&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&7 \end{smallmatrix}\right) = 3\cdot 2\cdot 7 = 42$.

(3) Sei $n \geqslant 1$.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es ist $\det A = \det(A^{\mathrm{t}})$.
Insbesondere gilt alles in (2) Gesagte auch in der transponierten Version.

(b) Es ist $\det \mathrm{E}_n = 1$.

(c) Es ist $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$ für $A,\ B\ \in\ \mathbb{R}^{n\times n}$.

(4) Sei $n\ \geqslant\ 1$. Sei $1\ \leqslant\ i\ \leqslant\ n$. Sei $(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)$ ein Tupel von $n-1$ Vektoren aus $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Seien $\lambda,\ \mu\ \in\ \mathbb{R}$. Seien $y,\ z\ \in\ \mathbb{R}^n$.

Sei $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit dem Spaltentupel

$$(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,y,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)\ .$$

Sei $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit dem Spaltentupel

$$(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,z,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)\ .$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit dem Spaltentupel

$$(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,\lambda y+\mu z,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)\ .$$

Dann ist

$$\det A\ =\ \lambda\det(Y)+\mu\det(Z)\ .$$

Kurz, man kann Linearkombinationen, insbesondere also Faktoren, aus jeder Spalte einzeln herausziehen.

Dank (3.a) gilt entsprechendes für die Zeilen.

(5) Sei $n \geqslant 1$. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Es ist das Tupel der Spalten von A genau dann linear abhängig, wenn $\det A = 0$.

Insbesondere ist $\det A = 0$, falls A wenigstens eine Nullspalte enthält.

Es ist das Tupel der Zeilen von A genau dann linear abhängig, wenn $\det A = 0$.

Insbesondere ist $\det A = 0$, falls A wenigstens eine Nullzeile enthält.

Vgl. §5.4.2.

(6) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht.

Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte ändert den Wert der Determinante nicht.

Vertauschen von zwei Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante.

Vertauschen von zwei Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.

Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert auch den Wert der Determinante mit diesem Faktor λ; vgl. (4).

Multiplikation einer Spalte mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert auch den Wert der Determinante mit diesem Faktor λ; vgl. (4).

In anderen Worten, ein Schritt im Algorithmus der Form $\overset{\mu}{\rightsquigarrow}$ ändert die Determinante um den Faktor μ^{-1}; ein Schritt der Form $\rightsquigarrow$ ändert die Determinante nicht; wobei $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(7) Beschreiben wir noch kurz die *Laplace-Entwicklung.*

Sei $n \geqslant 2$. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Für $1 \leqslant k,\, \ell \leqslant n$ sei $A_{k,\ell} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und der ℓ-ten Spalte entsteht.

Wählen wir ein $1 \leqslant k \leqslant n$, dann wird

$$\det A \;=\; \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \alpha_{k,\ell} \cdot \det(A_{k,\ell}) \qquad \text{(Laplace-Entwicklung nach der k-ten Zeile)}$$

Wählen wir ein $1 \leqslant \ell \leqslant n$, dann wird

$$\det A \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \alpha_{k,\ell} \cdot \det(A_{k,\ell}) \qquad \text{(Laplace-Entwicklung nach der ℓ-ten Spalte)}$$

Man kann auch eine Formel für die Determinante angeben, die die Formeln aus (1) verallgemeinert, die sogenannte *Leibniz-Formel.* Sie entstammt einer iterierten Anwendung der Laplace-Entwicklung.

Sei $n \geqslant 1$. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Sei S_n die Menge aller Bijektionen der Menge $M(n) := \{\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n \,\}$ in sich. Für $\sigma \in \mathrm{S}_n$ sei f_σ die Anzahl der Elemente in $\{\, (i,j) \in M(n) \times M(n) \,:\, i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j) \,\}$. Sei das *Signum* von σ definiert durch $\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^{f_\sigma}$. Die Leibniz-Formel besagt nun, daß

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \,\in\, \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha_{1,\sigma(1)}\, \alpha_{2,\sigma(2)} \,\cdots\, \alpha_{n,\sigma(n)}$$

ist. Für $n = 2$ wird dies zu $\det(A) = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}$. Für $n = 3$ wird dies zur Regel von Sarrus. Vgl. (1).

Für $n = 4$ erhalten wir eine vorzeichenbehaftete Summe aus 24 Produkten aus je 4 Faktoren (und nicht eine alternierende Summe von 8 Produkten, wie schon mancher in falscher Verallgemeinerung der Regel von Sarrus gedacht hat).

Für $n \geqslant 4$ würde die Anwendung dieser Formel zu einem erheblichen Rechenaufwand führen.

Beispiel.

Wir wollen die Determinante von $A := \left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right)$ auf verschiedene Weisen berechnen.

- Nach Definition wird

$$\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 0&-7&-4\\ 0&-6&-5 \end{smallmatrix}\right) \overset{(-7)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{smallmatrix} 1&0&2/7\\ 0&1&4/7\\ 0&0&-11/7 \end{smallmatrix}\right) \overset{(-11/7)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right) ,$$

  und also $\det A = (-7) \cdot (-11/7) = 11$.

- Mit Sarrus wird

$$\det\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 1\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 \;=\; 38 - 27 \;=\; 11\;.$$

- Wir können auch Methoden mischen. Z.B. wird

$$\det\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{B.}\,(6)}{=} \det\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 0&-7&-4\\ 0&-6&-5 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{B.}\,(2)}{=} \det(1)\cdot\det\left(\begin{smallmatrix} -7&-4\\ -6&-5 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{B.}\,(1)}{=} 1\cdot((-7)(-5) - (-4)(-6)) \;=\; 35-24 \;=\; 11\;.$$

Dank Bemerkung, (3.a) kann man auch tricksen und zur Berechnung der Determinante abwechselnd Zeilen- und Spaltenumformungen durchführen. Wer sich dabei nicht wirklich sicher ist, was er da tut, sollte damit vorsichtig sein.

9.2 Definitheit

Sei $n \geqslant 1$.

Definition. Eine Matrix $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heiße *symmetrisch,* falls $A = A^{\mathrm{t}}$.

In anderen Worten, es ist A symmetrisch genau dann, wenn $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ für alle $i,\ j\ \in\ [1,n]$.

Vgl. §5.1, §8.2.2.

Definition. Sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben.

Es heiße A *positiv definit,* falls $x^{\mathrm{t}}Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \smallsetminus \{0\}$.

Es heiße A *negativ definit,* falls $x^{\mathrm{t}}Ax < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \smallsetminus \{0\}$.

Beispiel.

(1) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 2&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit, da

$$\left(\begin{smallmatrix} \xi_1&\xi_2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 2&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \xi_1\\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 2\xi_1^2 + \xi_2^2 \;>\; 0$$

für $\left(\begin{smallmatrix} \xi_1\\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 1} \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(2) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit, da

$$\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \;=\; -3\xi_1^2 - 3\xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \;=\; -3(\xi_1 - \tfrac{1}{3}\,\xi_2)^2 - \tfrac{8}{3}\,\xi_2^2 \;<\; 0$$

für $\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 1} \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, wofür wir hier einmal den Trick der quadratischen Ergänzung verwandt haben.

(3) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ weder positiv noch negativ definit, da auf der einen Seite $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$, auf der anderen Seite aber $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -1$ ist.

Bemerkung. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

(1) Es ist A genau dann positiv definit, wenn $-A$ negativ definit ist.

(2) Gibt es ein $1 \leqslant i \leqslant n$ mit $\alpha_{i,i} \leqslant 0$, dann ist A nicht positiv definit.

Vorsicht, die Umkehrung gilt nicht. Z.B. ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ wegen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = -2$ nicht positiv definit. Aber die Hauptdiagonaleinträge sind alle positiv.

Gibt es ein $1 \leqslant i \leqslant n$ mit $\alpha_{i,i} \geqslant 0$, dann ist A nicht negativ definit.

Vorsicht, die Umkehrung gilt nicht. Z.B. ist $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ wegen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = 2$ nicht negativ definit. Aber die Hauptdiagonaleinträge sind alle negativ.

Ist insbesondere ein Hauptdiagonaleintrag von A gleich 0, so ist A weder positiv noch negativ definit.

Zu (1). Es ist $x^{\mathrm{t}}(-A)x = -x^{\mathrm{t}}Ax < 0$ genau dann, wenn $x^{\mathrm{t}}Ax > 0$ für $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Zu (2), positive Definitheit. Ist $\alpha_{i,i} \leqslant 0$, dann ist $\mathrm{e}_i^{\mathrm{t}} A \mathrm{e}_i = \alpha_{i,i} \leqslant 0$ nicht positiv; vgl. §5.4.2.

Definition. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

Sei $1 \leqslant k \leqslant n$. Der *$k$-te Hauptminor* von A ist definiert als

$$\mathrm{M}_k(A) \;:=\; \det\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k,1} & \cdots & \alpha_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Die Hauptminoren von $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ sind

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{M}_1(A) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}\right) & = \; 1 \\ \mathrm{M}_2(A) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) & = \; 1 \\ \mathrm{M}_3(A) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) & = \; 2 \end{array}$$

Satz (Hauptminorenkriterium).

Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.

(1) Es ist A positiv definit genau dann, wenn $\mathrm{M}_k(A) > 0$ für $1 \leqslant k \leqslant n$.

Es ist also A genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind.

(2) Es ist A negativ definit genau dann, wenn $(-1)^k \cdot \mathrm{M}_k(A) > 0$ für $1 \leqslant k \leqslant n$.

Es ist also A genau dann negativ definit, wenn die Hauptminoren von A abwechselndes Vorzeichen haben, angefangen mit $\mathrm{M}_1(A) < 0$.

Beispiel.

(1) Es ist $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit, da $\mathrm{M}_1(A) = 1 > 0$, $\mathrm{M}_2(A) = 1 > 0$ und $\mathrm{M}_3(A) = 2 > 0$ sind; vgl. vorstehendes Beispiel.

(2) Es ist $B := \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit, da $\mathrm{M}_1(B) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 \end{smallmatrix}\right) = -3 < 0$ und $\mathrm{M}_2(B) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right) = (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 = 2 > 0$ sind.

Kapitel 10

Extremstellen von Funktionen mehrerer Veränderlicher

10.1 Lokale Extremstellen in mehreren Variablen, ohne Nebenbedingungen

Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

> Den Fall von $n = 1$ Variablen haben wir schon in §3.2.3.2 betrachtet, den Fall von $n = 2$ Variablen in §3.4.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ existent und stetig für $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Wir erinnern für $\underline{x} \in D$ an den Begriff der lokalen Maximal-, Minimal- und Extremstelle von f aus §3.2.3.1.

Wir erinnern an die Begriffe des Gradienten $\nabla_f(\underline{x}) = (f_{x_i}(\underline{x}))_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und der Hessematrix $\mathrm{H}_f(\underline{x}) = (f_{x_i x_j}(\underline{x}))_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus §8.2; und daran, daß letztere symmetrisch ist.

Definition. Es heißt $\underline{\hat{x}} \in D$ eine *Flachstelle* von f, falls $\nabla_f(\underline{\hat{x}}) = 0$ ist.

Bemerkung. Ist $\underline{\hat{x}} \in D$ eine lokale Extremstelle von f, so ist $\underline{\hat{x}}$ eine *Flachstelle* von f.

Lemma. Sei $\underline{\hat{x}} \in D$ mit $\nabla_f(\underline{\hat{x}}) = 0$ gegeben. Sei also $\underline{\hat{x}}$ eine Flachstelle von f.

(1) Ist $\mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}})$ negativ definit, so ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Maximalstelle von f.

(2) Ist $\mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}})$ positiv definit, so ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Minimalstelle von f.

(3) Ist $\mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}})$ weder positiv noch negativ definit, und ist $\det \mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}}) \neq 0$, dann ist $\hat{\underline{x}}$ keine lokale Extremstelle von f, sondern eine *Sattelstelle.*

Ist $\det \mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}}) = 0$, so machen wir keine Aussage über das Vorliegen einer lokalen Extremstelle.

Man vergleiche mit dem Lemma aus §3.4 und dem Hauptminorenkriterium aus §9.2.

Begründung zu (1). Um $\hat{\underline{x}}$ können wir f annähern,

$$f(\underline{x}) \;\approx\; f(\hat{\underline{x}}) + (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \cdot \nabla_f(\hat{\underline{x}}) + \tfrac{1}{2}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}}) \cdot (\underline{x} - \hat{\underline{x}})^{\mathrm{t}} \;=\; f(\hat{\underline{x}}) + \tfrac{1}{2}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}}) \cdot (\underline{x} - \hat{\underline{x}})^{\mathrm{t}}\ .$$

Für das lokale Verhalten genügt die Betrachtung dieses Taylorpolynoms. Nun ist $\mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}})$ negativ definit, also $\frac{1}{2}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}}) \cdot (\underline{x} - \hat{\underline{x}})^{\mathrm{t}} < 0$ für $\underline{x} \in D \smallsetminus \{\hat{\underline{x}}\}$, und $= 0$ für $\underline{x} = \hat{\underline{x}}$. Somit ist der Wert unseres Taylorpolynoms an der Stelle $\hat{\underline{x}}$ maximal.

Beispiel. Sei $n = 3$, sei $D = \mathbb{R}^3$ und sei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x\sin(z)$. Wir wollen untersuchen, ob bei $(0,0,0)$ ein lokales Extremum vorliegt.

Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - \sin(z) \\ 2y \\ 2z - x\cos(z) \end{pmatrix}$, also $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit liegt bei $(0,0,0)$ eine Flachstelle vor.

Desweiteren ist $\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\cos(z) \\ 0 & 2 & 0 \\ -\cos(z) & 0 & 2 + x\sin(z) \end{pmatrix}$, und also $\mathrm{H}_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es wird $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = \det(2) > 0$, $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0$. Mithin ist $\mathrm{H}_f(0,0,0)$ positiv definit; cf. §9.2. Folglich liegt bei $(0,0,0)$ ein lokales Minimum vor.

10.2 Lokale Extremstellen in mehreren Variablen, mit Nebenbedingungen

Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ existent und stetig für $1 \leqslant i,\, j \leqslant n$.

Sei $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $g_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$ für $1 \leqslant k \leqslant \ell$ gegeben mit $(g_k)_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ existent und stetig für $1 \leqslant i,\, j \leqslant n$. Wir fassen diese Funktionen zusammen zur Abbildung

$$\begin{array}{rcccl} g & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^\ell \\ & & \underline{x} & \longmapsto & g(\underline{x}) \;:=\; (g_1(\underline{x}), \ldots, g_\ell(\underline{x}))\ . \end{array}$$

10.2.1 Begriff einer lokalen Extremstelle unter Nebenbedingungen

Definition. Sei $\hat{\underline{x}} \in D$.

(1) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Maximalstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, falls $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ und falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \geqslant f(\underline{x})$ für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$ und $g(\underline{x}) = 0$.

(2) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Minimalstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, falls $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ und falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \leqslant f(\underline{x})$ für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$ und $g(\underline{x}) = 0$.

(3) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Extremstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, falls $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Maximal- oder Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

10.2.2 Flachstellen unter Nebenbedingungen

Sei $\underline{\hat{x}} \in D$.

Bezeichne $N(\underline{\hat{x}}) \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ die Matrix mit dem Spaltentupel $(\nabla_{g_1}(\underline{\hat{x}}), \nabla_{g_2}(\underline{\hat{x}}), \ldots, \nabla_{g_\ell}(\underline{\hat{x}}))$.

Definition. Wenn $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ ist, wenn das Spaltentupel von $N(\underline{\hat{x}})$ linear unabhängig ist und wenn $\nabla_f(\underline{\hat{x}}) = N(\underline{\hat{x}}) \cdot r$ eine Lösung $r \in \mathbb{R}^{\ell\times 1}$ besitzt, dann heißt $\underline{\hat{x}}$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Der dann eindeutig festliegende Vektor r heißt *Lagrangemultiplikator* zur Flachstelle $\underline{\hat{x}}$.

Lemma. Ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ und ist das Spaltentupel von $N(\underline{\hat{x}})$ linear unabhängig, dann ist $\underline{\hat{x}}$ eine *Flachstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Falls die Flachstellen erst *gesucht* werden müssen, dann faßt man

$$\begin{aligned} \nabla_f(\underline{\hat{x}}) &= N(\underline{\hat{x}}) \cdot r \\ g(\underline{\hat{x}}) &= 0\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \nabla_f(\underline{\hat{x}}) &= \nabla_{g_1}(\underline{\hat{x}})\,\rho_1 + \nabla_{g_2}(\underline{\hat{x}})\,\rho_2 + \cdots + \nabla_{g_\ell}(\underline{\hat{x}})\,\rho_\ell \\ g(\underline{\hat{x}}) &= 0\,, \end{aligned}$$

als (im allgemeinen nichtlineares) Gleichungssystem in den Unbekannten

$$\hat{x}_1\,,\ \hat{x}_2\,,\ \ldots\ ,\ \hat{x}_n\,, \quad \rho_1\,,\ \rho_2\,,\ \ldots\ ,\ \rho_\ell$$

auf. Ist für eine Lösung $\underline{\hat{x}}$ schließlich noch das Spaltentupel von $N(\underline{\hat{x}})$ linear unabhängig, dann ist $\underline{\hat{x}}$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Falls dagegen eine zu untersuchende Stelle $\underline{\hat{x}} \in D$ in der Aufgabenstellung *vorgegeben* ist, so reduziert sich die Frage, ob $\underline{\hat{x}}$ eine Flachstelle unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist, darauf, zu prüfen, ob tatsächlich $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ ist und ob es auf eindeutige Weise $\rho_1\,, \ldots, \rho_\ell$ gibt mit $\nabla_f(\underline{\hat{x}}) = \nabla_{g_1}(\underline{\hat{x}})\,\rho_1 + \nabla_{g_2}(\underline{\hat{x}})\,\rho_2 + \cdots + \nabla_{g_\ell}(\underline{\hat{x}})\,\rho_\ell\,.$

10.2.3 Lokale Extremstellen unter Nebenbedingungen

Jedenfalls müssen die Flachstellen aus §10.2.2 nun daraufhin geprüft werden, ob sie Extremstellen sind, alles unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Sei $\underline{\hat{x}} \in D$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Wir lösen das lineare Gleichungssystem $N(\underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}}\, u = 0$ in $u \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Sei dann $U \in \mathbb{R}^{n\times(n-\ell)}$ die Matrix mit dem Spaltentupel $(u_1\,, \ldots,\, u_{n-\ell})$ in den Bezeichnungen von §5.3. D.h. sei das Spaltentupel von U eine Basis von

$$\{\, u \in \mathbb{R}^{n\times 1} \;:\; N(\underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}}\, u = 0 \,\}\,;$$

vgl. §5.3, vorletzte Bemerkung.

Schreibe ferner

$$F(\underline{x}) := f(\underline{x}) - \rho_1\, g_1(\underline{x}) - \cdots - \rho_\ell\, g_\ell(\underline{x})$$

unter Verwendung des zur Flachstelle $\underline{\hat{x}}$ gehörigen Lagrangemultiplikators

$$r \;=\; \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell\times 1}\,.$$

Wir bilden die Hessematrix $\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})$ von F an der Flachstelle $\underline{\hat{x}}$.

Lemma ([1]).

Sei, wie gesagt, $\underline{\hat{x}} \in D$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Seien dazu $\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})$ und U wie vorstehend beschrieben gebildet.

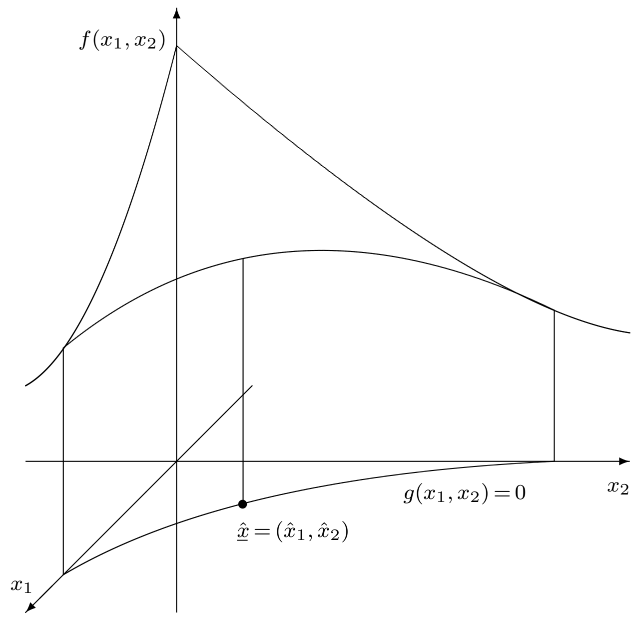
(1) Ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\, U \in \mathbb{R}^{(n-\ell)\times(n-\ell)}$ negativ definit, so ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

(2) Ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\, U \in \mathbb{R}^{(n-\ell)\times(n-\ell)}$ positiv definit, so ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

(3) Ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\, U$ weder positiv noch negativ definit und ist $\det U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\, U \neq 0$, so ist $\underline{\hat{x}}$ keine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, sondern eine *Sattelstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Ist $\det(U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\, U) = 0$, so machen wir keine Aussage über das Vorliegen einer lokalen Extremstelle.

[1] Vgl. [**2,** Kap. 14.7, Aufg. 15], [**4,** Satz 8.4.12], [**7,** Th. VIII.4.5], [**10,** Extrema, und Extrema mit Nebenbedingungen].



10.2.4 Beispiele

Beispiel. Sei $n = 2$. Sei $D = \mathbb{R}^2$. Sei $f(x, y) = xy$.

Sei $\ell = 1$. Sei $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$.

Wir suchen alle lokalen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

> In anderen Worten, wir suchen die Maxima und die Minima von f auf dem Kreis um $(0, 0)$ von Radius $\sqrt{2}$.

1. Bestimmung der Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Es ist $\nabla_f(x\,, y) = \binom{y}{x}$.

Es ist $\nabla_{g_1}(x\,, y) = \binom{2x}{2y}$ und wegen $\ell = 1$ also auch $N(x, y) = \binom{2x}{2y}$.

Wir haben das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \binom{y_0}{x_0} & = & \binom{2x_0}{2y_0}\,\rho_1 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2 & = & 0 \end{array}$$

zu lösen.

Ist $x_0 = 0$, dann ist $y_0 \neq 0$, also wegen $0 = x_0 = 2y_0\rho_1$ auch $\rho_1 = 0$, was dann wiederum $y_0 = 2x_0\rho_1 = 0$ nach sich zieht, was nicht geht.

Somit muß $x_0 \neq 0$ sein.

Notwendig ist nun $x_0 = 2y_0\rho_1 = 2(2x_0\rho_1)\rho_1 = 4x_0\rho_1^2$.

Damit muß aber $1 = 4\rho_1^2$ sein, also $\rho_1 \in \{-\frac{1}{2}\,, +\frac{1}{2}\}$.

Fall $\rho_1 = -\frac{1}{2}$.

Es ist $x_0 = -y_0$. Wegen $2 = x_0^2 + y_0^2 = 2x_0^2$ liefert dies die Flachstellen $(x_0\,, y_0) = (+1, -1)$ und $(x_0\,, y_0) = (-1, +1)$ von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, denn an beiden Stellen ist das Spaltentupel von $N(x_0\,, y_0)$ linear unabhängig, d.h. die Spalte von $N(x_0\,, y_0)$ ist ungleich 0.

Fall $\rho_1 = +\frac{1}{2}$.

Es ist $x_0 = y_0$. Wegen $2 = x_0^2 + y_0^2 = 2x_0^2$ liefert dies die Flachstellen $(x_0\,, y_0) = (+1, +1)$ und $(x_0\,, y_0) = (-1, -1)$ von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, denn an beiden Stellen ist das Spaltentupel von $N(x_0\,, y_0)$ linear unabhängig.

Zusammen haben wir die Menge der Flachstellen

$$\{(+1, -1),\ (-1, +1),\ (-1, -1),\ (+1, +1)\}$$

gefunden, die ersten beiden mit Lagrangemultiplikator $(\,{\scriptstyle -1/2}\,)$, die letzten beiden mit Lagrangemultiplikator $(\,{\scriptstyle +1/2}\,)$.

2. Entscheidung auf Extremstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Ist $\rho_1 = -\frac{1}{2}$, dann ist $F(x, y) = f(x, y) - \rho_1 g_1(x, y) = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2)$ und also $\mathrm{H}_F(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Ist $\rho_1 = +\frac{1}{2}$, dann ist $F(x, y) = f(x, y) - \rho_1 g_1(x, y) = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2)$ und also $\mathrm{H}_F(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

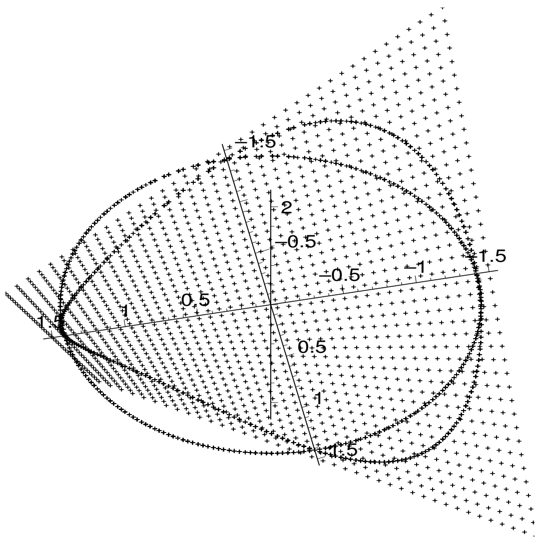
Fall $(x_0\,, y_0) = (+1, -1)$. Es ist $\rho_1 = -\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(+1, -1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(+1, -1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,:\, \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit. Also ist $(+1, -1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dort nimmt f den Wert -1 an.

Fall $(x_0\,, y_0) = (-1, +1)$. Es ist $\rho_1 = -\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(-1, +1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(-1, +1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,:\, \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit. Also ist $(-1, +1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dort nimmt f den Wert -1 an.

Fall $(x_0\,, y_0) = (-1, -1)$. Es ist $\rho_1 = +\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(-1, -1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(-1, -1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,:\, \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit. Also ist $(-1, -1)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dort nimmt f den Wert $+1$ an.

Fall $(x_0\,, y_0) = (+1, +1)$. Es ist $\rho_1 = +\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(+1, +1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(+1, +1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} +2 & +2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,:\, \left(\begin{smallmatrix} +2 & +2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit. Also ist $(+1, +1)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Dort nimmt f den Wert $+1$ an.



Weniger umfangreich ist die Entscheidung an einer bereits gegebenen Stelle:

Beispiel. Sei $n = 4$. Sei $D = \mathbb{R}^4$. Sei $f(x, y, z, w) = x + x^2 + y^2 + yz + 2z + w$.

Sei $\ell = 2$. Sei $g_1(x, y, z, w) = xy + z$. Sei $g_2(x, y, z, w) = x + yz + z + w$.

Wir wollen entscheiden, ob $(0, 0, 0, 0)$ eine Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

1. Ist $(0, 0, 0, 0)$ *eine Flachstelle von* f *unter der Nebenbedingung* $g = 0$ *?*

Es ist $\nabla_f(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 1+2x \\ 2y+z \\ y+2 \\ 1 \end{pmatrix}$, somit also $\nabla_f(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es ist $\nabla_{g_1}(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\nabla_{g_2}(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ y+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $N(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & z \\ 1 & y+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mithin $N(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mit linear unabhängigem Spaltentupel.

Wir finden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

mit dem Lagrangemultiplikator $r = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $(0, 0, 0, 0)$ in der Tat eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

2. Ist $(0, 0, 0, 0)$ *eine Extremstelle von* f *unter der Nebenbedingung* $g = 0$ *?*

Es ist $N(0, 0, 0, 0)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, mit Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Also enthält $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in den Spalten eine Basis von $\{ u \in \mathbb{R}^{4\times 1} \ : \ N(0, 0, 0, 0)^{\mathrm{t}}\, u = 0 \}$.

Es ist

$$\begin{aligned} F(x,y,z,w) &= f(x,y,z,w) - \rho_1\, g_1(x,y,z,w) - \rho_2\, g_2(x,y,z,w) \\ &= (x + x^2 + y^2 + yz + 2z + w) - (xy + z) - (x + yz + z + w) \\ &= x^2 + y^2 - xy\ . \end{aligned}$$

So wird $\mathrm{H}_F(x,y,z,w) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, insbesondere also auch $\mathrm{H}_F(0,0,0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es ergibt sich

$$U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(0,0,0,0)\, U \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\ .$$

Da $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}\right) = 2 > 0$ und $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 3 > 0$ ist, ist diese Matrix positiv definit; cf. §9.2.

Folglich ist $(0,0,0,0)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Kapitel 11

Komplexe Zahlen

11.1 Definition

Definition. Die Menge der *komplexen Zahlen* ist definiert durch

$$\mathbb{C} := \{ a + b\,\mathrm{i} \,:\, a,\, b \in \mathbb{R} \} ,$$

wobei $a + b\,\mathrm{i} = \tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}$ für $a,\, b,\, \tilde{a},\, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ genau dann gelte, wenn $a = \tilde{a}$ und $b = \tilde{b}$ ([2]).

Auf $\mathbb{C}$ sind Addition und Multiplikation erklärt durch

$$\begin{array}{rcccl} (+) : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & (a + b\,\mathrm{i} \;,\; \tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) & \longmapsto & (a + b\,\mathrm{i}) + (\tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) & := \; (a + \tilde{a}) + (b + \tilde{b})\,\mathrm{i} \\ (\cdot) : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & (a + b\,\mathrm{i} \;,\; \tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) & \longmapsto & (a + b\,\mathrm{i}) \cdot (\tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) & := \; (a\tilde{a} - b\tilde{b}) + (a\tilde{b} + \tilde{a}b)\,\mathrm{i} \;, \end{array}$$

wobei $a,\, b,\, \tilde{a},\, \tilde{b} \in \mathbb{R}$. D.h. es wird ausmultipliziert unter Beachtung von

$$\boxed{\mathrm{i}^2 \;=\; -1} \;.$$

Der Multiplikationspunkt wird oft unterschlagen.

Wir schreiben $a = a + 0\mathrm{i}$ und $b\mathrm{i} = 0 + b\mathrm{i}$ für $a,\, b \in \mathbb{R}$.

Es ist $1 \cdot z = z$ und $0 + z = z$ für $z \in \mathbb{C}$.

Ist $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, wobei $a,\, b \in \mathbb{R}$, so ist $-z = -a + (-b)\mathrm{i}$. Wir schreiben $z - w := z + (-w)$ für $z,\, w \in \mathbb{C}$, usf.

Es gelten das Assoziativ- und das Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation, d.h. $(zw)v = z(wv)$, $zw = wz$, $(z + w) + v = z + (w + v)$, $z + w = w + z$ für $z,\, w,\, v \in \mathbb{C}$.

[2]Formal sollte man $a + b\,\mathrm{i}$ als Paar (a, b) reeller Zahlen einführen, auf solchen die Grundrechenarten definieren und im nachhinein $\mathrm{i} := (0, 1)$ setzen. Das gibt im Ergebnis dasselbe.

Es gilt das Distributivgesetz, d.h. $(z+w)v = zv + wv$ für $z,\, w,\, v \in \mathbb{C}$.

Komplexe Zahlen der Form $a = a + 0\mathrm{i}$ mit $a \in \mathbb{R}$ heißen *reell.*

Es ist $\mathbb{R} = \{\, a \,:\, a \in \mathbb{R} \,\} = \{\, a + 0\mathrm{i} \,:\, a \in \mathbb{R} \,\} \subseteq \mathbb{C}$.

Komplexe Zahlen der Form $b\mathrm{i} = 0 + b\mathrm{i}$ mit $b \in \mathbb{R}$ heißen *(rein) imaginär.*

Wir können jeder komplexen Zahl ihren *Realteil* und ihren *Imaginärteil* zuordnen,

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Re}(a+b\mathrm{i}) & := & a & \text{(Realteil)} \\ \mathrm{Im}(a+b\mathrm{i}) & := & b & \text{(Imaginärteil)} \end{array}$$

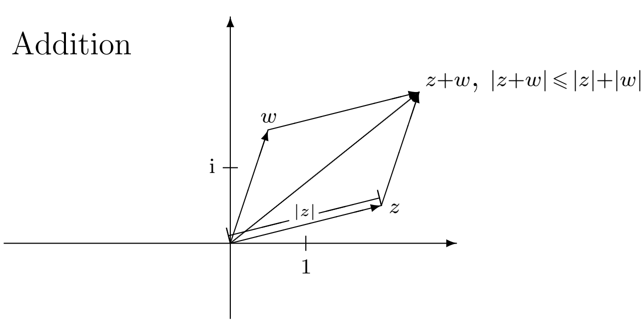
wobei $a,\, b \in \mathbb{R}$. Also $\mathrm{Re},\, \mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$.

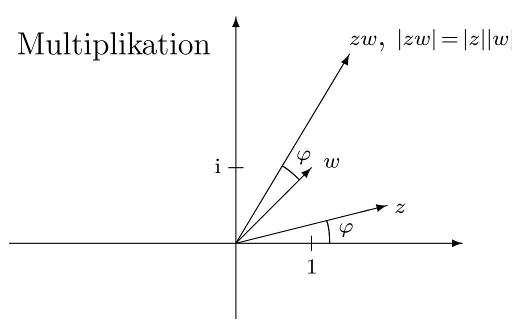
Ist $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, wobei $a,\, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet $|z| := (a^2+b^2)^{1/2} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ den *Betrag* von z.

Lemma (Dreiecksungleichung). Es ist $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ für $z,\, w \in \mathbb{C}$.

Bemerkung. Es ist $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ für $z,\, w \in \mathbb{C}$.

Geometrisch deutet sich dies wie folgt. Eine komplexe Zahl $a+b\mathrm{i}$ bekommt in der reellen Ebene, in diesem Zusammenhang auch *Gaußsche Zahlenebene* genannt, die Koordinaten (a,b) zugewiesen. Ihr Betrag ist ihr Abstand vom Punkt $(0,0)$, d.h. die Länge des Vektors von $(0,0)$ nach (a,b). Reelle Zahlen liegen auf der *reellen Achse* $\{\, (a,0) \,:\, a \in \mathbb{R} \,\}$. Imaginäre Zahlen liegen auf der *imaginären Achse* $\{\, (0,b) \,:\, b \in \mathbb{R} \,\}$.





Bei der Multiplikation werden die mit der positiven reellen Achse eingeschlossenenen Winkel addiert und die Längen der Vektoren multipliziert.

Bemerkung. Ist $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, wobei $a,\, b \in \mathbb{R}$, dann ist

$$z^{-1} \;=\; \tfrac{a}{a^2+b^2} - \tfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i} \;=\; \tfrac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2}\,.$$

Begründung. Da $a + b\mathrm{i} \neq 0$, ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, und so jedenfalls $a^2 + b^2 > 0$.

Es wird $(a+b\mathrm{i}) \cdot (\tfrac{a}{a^2+b^2} - \tfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}) = \dfrac{a^2 - b^2\mathrm{i}^2}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$. Dies zeigt die Bemerkung.

Um vom Vektor von 0 nach z zum Vektor von 0 nach z^{-1} zu kommen, muß an der reellen Achse gespiegelt werden und die Länge des Vektors invertiert werden.

Beispiel. Es wird $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \dfrac{2+4\mathrm{i}+3\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} = \dfrac{-4+7\mathrm{i}}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}.$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten werden in der üblichen Bedeutung verwandt. Die Potenzgesetze gelten hier, also $(zw)^a = z^a w^a$, $z^{a+b} = z^a z^b$, $z^{ab} = (z^a)^b$ für $a,\, b \in \mathbb{Z}$, $z,\, w \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Der binomische Lehrsatz aus §1.2.2 gilt genauso auch in $\mathbb{C}$.

Definition. Die *komplexe Konjugation* ist erklärt durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = a + b\mathrm{i} & \longmapsto & \bar{z} := a - b\mathrm{i}\ . \end{array}$$

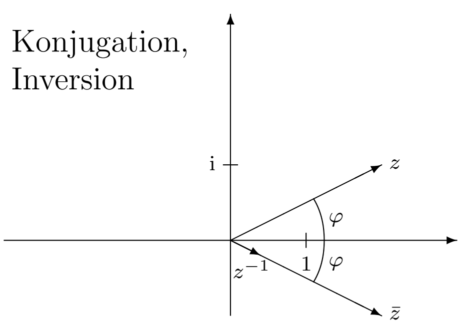
wobei $a,\, b \in \mathbb{R}$. Geometrisch ist dies die Spiegelung an der reellen Achse.

Es ist $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ für $z,\, w \in \mathbb{C}$.

Es ist $|z|^2 = z\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$ für $z \in \mathbb{C}$.

Es ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$; vgl. vorstehende Bemerkung.

Konjugation,
Inversion



11.2 Euler

11.2.1 Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus im Komplexen

Viele Begriffe und Tatsachen aus §2.2 und §2.3 gelten entsprechend auch im Komplexen.

Definition. Sei $k \in \mathbb{Z}$.

Eine Folge $(z_n)_{n \geqslant k} = (z_n)_n$ mit Werten $z_n \in \mathbb{C}$ für $n \geqslant k$ heißt auch *komplexe Folge.*

Es heißt $z \in \mathbb{C}$ ihr *Grenzwert* oder *Limes,* falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant k}$ mit $|z - z_n| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$ existiert. Diesenfalls ist dieser eindeutig bestimmt und wird

$$\lim_{n\to\infty} z_n \ = \ \lim_n z_n \ := \ z$$

geschrieben. Eine komplexe Folge $(z_n)_n$ *konvergiert,* falls sie einen Grenzwert hat, ansonsten *divergiert* sie.

Bemerkung. Seien $(z_n)_n$ und $(w_n)_n$ konvergente komplexe Folgen. Seien $\lambda,\, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty}(\lambda z_n + \mu w_n) & = & \lambda(\lim_{n\to\infty} z_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} w_n) \\ \lim_{n\to\infty}(z_n w_n) & = & (\lim_{n\to\infty} z_n)(\lim_{n\to\infty} w_n) \\ \lim_{n\to\infty} \bar{z}_n & = & \overline{\lim_{n\to\infty} z_n} \\ \lim_{n\to\infty} |z_n| & = & |\lim_{n\to\infty} z_n| \end{array}$$

Ist $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$ und ist $w_n \neq 0$ stets, dann gilt auch $\frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n}$.

Es konvergiert die komplexe Folge $(z_n)_n$ genau dann, wenn die rellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ konvergieren, und diesenfalls ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

Definition. Eine *(komplexe) Reihe* ist eine komplexe Folge der Form

$$\textstyle\sum_{t\geqslant k} c_t \;:=\; (\sum_{t=k}^{n} c_t)_{n\geqslant k} \;,$$

wobei $c_t \in \mathbb{C}$ für $t \geqslant k$. Existiert ihr Grenzwert, so schreiben wir diesen

$$\textstyle\sum_{t=k}^{\infty} c_t \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{t=k}^{n} c_t \;=\; c_k + c_{k+1} + c_{k+2} + \cdots \;.$$

Definition.

(1) Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n!$, sodaß wir die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\mathrm{e}^z \;=\; \exp(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots$$

definieren können.

Weiterhin gilt $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$ für $z,\, w \in \mathbb{C}$; vgl. §2.3.3.

(2) Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$, sodaß wir die *Sinusfunktion* $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\sin(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots$$

definieren können.

Es ist $\sin(-z) = -\sin(z)$ für $z \in \mathbb{C}$, da nur ungerade Exponenten auftreten.

(3) Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n z^{2n}/(2n)!$, sodaß wir die *Cosinusfunktion* $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\cos(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \;=\; 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots$$

definieren können.

Es ist $\cos(-z) = \cos(z)$ für $z \in \mathbb{C}$, da nur gerade Exponenten auftreten.

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmen diese Funktionen mit den bekannten gleichnamigen reellen Funktionen überein; vgl. §2.3.3, §8.1, Beispiel, (3).

11.2.2 Eulersche Formel

Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} \\ &= \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^{2n}}{(2n)!}\right) + \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) + \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^{2n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) + \mathrm{i} \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ &= \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

Satz (Eulersche Formel). Für $x,\, y \in \mathbb{R}$ ist

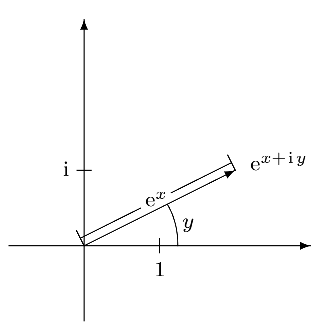
$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} \;=\; \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \;=\; \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))\;.$$

Folglich ist

$$|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| \;=\; |\mathrm{e}^x(\cos(y)+\mathrm{i}\sin(y))| \;=\; |\mathrm{e}^x||(\cos(y)+\mathrm{i}\sin(y))| \;=\; \mathrm{e}^x(\cos(y)^2+\sin(y)^2)^{1/2} \;=\; \mathrm{e}^x\;.$$

Ferner ist y gleich dem vom Vektor von 0 nach $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$ und der positiven reellen Achse eingeschlossenen Winkel. Denn der Cosinus dieses Winkels ist gleich $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y})/|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \cos(y)$, und der Sinus dieses Winkels ist gleich $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y})/|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \sin(y)$.

Für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eindeutig bestimmte $x \in \mathbb{R}$ und $y \in [0, 2\pi)$ mit $w = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$.



Da $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} \cdot \mathrm{e}^{\tilde{x}+\mathrm{i}\tilde{y}} = \mathrm{e}^{(x+\tilde{x})+\mathrm{i}(y+\tilde{y})}$ ist für $x,\, y,\, \tilde{x},\, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, liefert dies eine Erklärung für die bereits festgestellte Addition der mit der positiven reellen Achse eingeschlossenen Winkel bei der Multiplikation.

Beispiel.

(1) Es ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \mathrm{e}^0 \cdot (\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)) = -1$.

(2) Es ist $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\,\pi/3} = \mathrm{e}^2 \cdot (\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)) = \mathrm{e}^2(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}) \approx 3{,}6945 + 6{,}3991\mathrm{i}$.

Bemerkung. Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{array}{rcl} \cos(z) & = & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) \\ \sin(z) & = & \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})\ . \end{array}$$

In der Tat ist

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) & = & \frac{1}{2}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) + (\cos(-z) + \mathrm{i}\sin(-z))\big) \\ & = & \frac{1}{2}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) + (\cos(z) - \mathrm{i}\sin(z))\big) \\ & = & \cos(z)\ , \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) & = & \frac{1}{2\mathrm{i}}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) - (\cos(-z) + \mathrm{i}\sin(-z))\big) \\ & = & \frac{1}{2\mathrm{i}}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) - (\cos(z) - \mathrm{i}\sin(z))\big) \\ & = & \sin(z)\ . \end{array}$$

Mit der Eulerschen Formel lassen sich auch folgende Additionsregeln herleiten.

Lemma. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \sin(z+w) & = & \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ \cos(z+w) & = & \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \end{array}$$

für $z,\, w \in \mathbb{C}$.

11.3 Partialbruchzerlegung (allgemeiner Fall)

In §6.3.3 hatten wir Partialbruchzerlegung mit reell zerfallendem Nenner betrachtet. Dies wollen wir nun auf beliebige Nenner ausdehnen.

11.3.1 Zerlegung von Brüchen von Polynomen

Bemerkung. Sei $n \geqslant 1$. Sei $f(z) := a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0\, z^0$ ein Polynom in $z \in \mathbb{C}$ mit $a_t \in \mathbb{C}$ für $0 \leqslant t \leqslant n$ und mit $a_n \neq 0$.

Es gibt ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = 0$.

Iteriertes Abdividieren von Nullstellen liefert daraus, daß es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) \;=\; a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Es zerfällt $f(z)$ also in ein Produkt von Linearfaktoren.

Der Nachweis dieser Bemerkung, auch bekannt als Fundamentalsatz der Algebra, ist nicht ganz einfach. Für uns spielt sie nur die Rolle einer "prinzipiellen Möglichkeit", ein Polynom stets zerlegen zu können.

Sei $m \geqslant 1$. Seien $s_i \in \mathbb{C}$ für $i \in [1, m]$ gegeben mit $s_i \neq s_j$ für $i, j \in [1, m]$ mit $i \neq j$.

Sei $D := \mathbb{C} \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}$.

Seien $k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $i \in [1, m]$.

Sei $f(x)$ ein Polynom, dessen Grad kleiner als $\sum_{i=1}^m k_i$ ist.

Wir wollen Konstanten $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ so finden, daß

$$\frac{f(x)}{(x - s_1)^{k_1} \cdot (x - s_2)^{k_2} \cdots (x - s_m)^{k_m}} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(x - s_i)^j}$$

für alle $x \in D$.

Zur Bestimmung der $a_{i,j}$ multipliziere man beide Seiten mit $(x - s_1)^{k_1} \cdots (x - s_m)^{k_m}$ und vergleiche die Koeffizienten. Dies liefert ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{C}$.

In der Praxis verwendet man üblicherweise Bezeichnungen $A, B, C, \ldots$ statt der $a_{i,j}$.

Das ist wortgleich der Inhalt von §6.3.3, nur über $\mathbb{C}$ statt über $\mathbb{R}$.

11.3.2 Integration komplexwertiger Funktionen

Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben mit $\mathrm{Im} \circ f$ und $\mathrm{Re} \circ f$ stetig. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a, b] \subseteq D$. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x\;;$$

vgl. §6.1. Ist f reellwertig, so stimmt dies mit der bisherigen Definition überein.

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben mit $\mathrm{Im} \circ f$, $\mathrm{Re} \circ f$, $\mathrm{Im} \circ g$, $\mathrm{Re} \circ g$ stetig. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a, b] \subseteq D$. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Es ist

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x &= \lambda \textstyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \textstyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \\ |\textstyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| &\leqslant \textstyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Bemerkung. Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Es ist

$$\int_a^b \mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}x \;=\; [\tfrac{1}{s}\,\mathrm{e}^{sx}]_{x=a}^b \;=\; \tfrac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb} - \mathrm{e}^{sa})\ .$$

Bemerkung. Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1\}$. Sei $s \in \mathbb{C}$. Falls $m \leqslant -2$, dann sei noch $s \notin [a,b]$. Es ist

$$\int_a^b (x-s)^m\,\mathrm{d}x \;=\; [\tfrac{1}{m+1}\,(x-s)^{m+1}]_{x=a}^b \;=\; \tfrac{1}{m+1}((b-s)^{m+1} - (a-s)^{m+1})\ .$$

Denn der Realteil von $\frac{1}{m+1}\,(x-s)^{m+1}$ ist eine Stammfunktion des Realteils von $(x-s)^m$; entsprechend für den Imaginärteil.

Ein Problem stellt sich also nur bei $m = -1$. Ein komplexer Logarithmus steht uns ja nicht zur Verfügung. Oft kann man jedoch konjugierte Summanden zusammenfassen und folgende, im wesentlichen dank Substitution bzw. dank §6.2, Beispiel, (3) bekannte Bemerkung verwenden.

Bemerkung. Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$.

(1) Es ist $\int_a^b (\frac{1}{x-s} + \frac{1}{x-\bar{s}})\,\mathrm{d}x = [\ln\big((x - \mathrm{Re}(s))^2 + \mathrm{Im}(s)^2\big)]_{x=a}^b$.

(2) Es ist $\int_a^b (\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x-\bar{s}})\,\mathrm{d}x = [2\mathrm{i}\arctan\big((x - \mathrm{Re}(s))/\,\mathrm{Im}(s)\big)]_{x=a}^b$.

11.3.3 Beispiele

Beispiel.

(1) Es wird

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \cdot \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}} \int_0^{\pi/2} (\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x})\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}} [\tfrac{1}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \tfrac{1}{1-\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}]_{x=0}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}} [\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}]_{x=0}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}} \big((\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\pi/2} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\pi/2}) - (\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\cdot 0} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\cdot 0}) \big) \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}} \big((\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}) - (\tfrac{1-\mathrm{i}}{2} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}) \big) \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}} \big((\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2} \cdot \mathrm{i} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2} \cdot (-\mathrm{i})) + \mathrm{i} \big) \\
&= \tfrac{1}{2} \big((\tfrac{1-\mathrm{i}}{2} + \tfrac{1+\mathrm{i}}{2})\mathrm{e}^{\pi/2} + 1 \big) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi/2} + 1) \\
&\approx 2{,}90523869\ .
\end{aligned}$$

(2) Wir wollen $\int_2^3 \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Zunächst ist

$$x^4 - 1 \;=\; (x^2-1)(x^2+1) \;=\; (x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})\;.$$

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\frac{1}{x^4-1} \;=\; \frac{1}{(x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-\mathrm{i}} + \frac{D}{x+\mathrm{i}}$$

und suchen $A,\,B,\,C,\,D\,\in\,\mathbb{C}$. Multiplikation mit $(x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$1 \;\stackrel{!}{=}\; A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+C(x^3+\mathrm{i}x^2-x-\mathrm{i})+D(x^3-\mathrm{i}x^2-x+\mathrm{i})\;.$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A\\B\\C\\D\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1\\ 0 & 2 & -1+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -1\\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -1\\ 0 & 2 & 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & -1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\mathrm{i} & -1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\mathrm{i}}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\mathrm{i}}{4}\end{array}\right)$$

Folglich ist $A = \frac{1}{4}\,,\; B = -\frac{1}{4}\,,\; C = \frac{\mathrm{i}}{4}\,,\; D = -\frac{\mathrm{i}}{4}$. Es wird

$$\begin{aligned} \int_2^3 \tfrac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}\int_2^3 \tfrac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{4}\int_2^3 \tfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\int_2^3 \big(\tfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \tfrac{1}{x+\mathrm{i}}\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{4}[\ln(x-1)]_{x=2}^3 - \tfrac{1}{4}[\ln(x+1)]_{x=2}^3 + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\big[2\mathrm{i}\arctan\big((x-\mathrm{Re}(\mathrm{i}))/\mathrm{Im}(\mathrm{i})\big)\big]_{x=2}^3\\ &= \tfrac{1}{4}\ln(2) - \tfrac{1}{4}\ln(4/3) - \tfrac{1}{2}[\arctan(x)]_{x=2}^3\\ &= \tfrac{1}{4}\ln(3/2) - \tfrac{1}{2}(\arctan(3)-\arctan(2))\\ &\approx 0{,}0304177\;. \end{aligned}$$

(3) Wir wollen $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Zunächst ist

$$(x^2+1)^2(x+1) \;=\; (x+\mathrm{i})^2(x-\mathrm{i})^2(x+1)\;.$$

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\frac{x}{(x^2+1)^2\,(x+1)} \;=\; \frac{x}{(x+\mathrm{i})^2\,(x-\mathrm{i})^2\,(x+1)} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{A}{x+\mathrm{i}} + \frac{B}{(x+\mathrm{i})^2} + \frac{C}{x-\mathrm{i}} + \frac{D}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{E}{x+1}$$

und suchen $A,\,B,\,C,\,D,\,E\,\in\,\mathbb{C}$. Multiplikation mit $(x+\mathrm{i})^2(x-\mathrm{i})^2(x+1)$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$\begin{aligned} x &\stackrel{!}{=} A((x^4+(1-\mathrm{i})x^3+(1-\mathrm{i})x^2+(1-\mathrm{i})x-\mathrm{i})) + B(x^3+(1-2\mathrm{i})x^2+(-1-2\mathrm{i})x-1)\\ &+\; C((x^4+(1+\mathrm{i})x^3+(1+\mathrm{i})x^2+(1+\mathrm{i})x+\mathrm{i})) + D(x^3+(1+2\mathrm{i})x^2+(-1+2\mathrm{i})x-1)\\ &+\; E(x^4+2x^2+1)\;. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & -1 & 1 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} & 0 & 1 \\ 1-\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 1 & 1+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{lrlrr|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\mathrm{i} & -1 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1-2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1-2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 2\mathrm{i} & 1 & -1+\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{llrrr|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2\mathrm{i} & 1 & -1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 4+4\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{lllrr|r} 1 & 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1+\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\mathrm{i} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} & -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2+2\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2+2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{llllr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\mathrm{i} & -\frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}-\mathrm{i} & \frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{lllll|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{i}}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8}-\frac{\mathrm{i}}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) .$$

Also ist $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{8} + \frac{\mathrm{i}}{8}$, $C = \frac{1}{8}$, $D = -\frac{1}{8} - \frac{\mathrm{i}}{8}$ und $E = -\frac{1}{4}$.

Somit wird

$$\begin{aligned}
& \textstyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
= \;& \textstyle\int_0^1 \Big(\frac{\frac{1}{8}}{x+\mathrm{i}} + \frac{-\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{i}}{8}}{(x+\mathrm{i})^2} + \frac{\frac{1}{8}}{x-\mathrm{i}} + \frac{-\frac{1}{8}-\frac{\mathrm{i}}{8}}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}\Big)\,\mathrm{d}x \\
= \;& \textstyle\frac{1}{8}\int_0^1 \big(\frac{1}{x-\mathrm{i}} + \frac{1}{x+\mathrm{i}}\big)\,\mathrm{d}x + \big(-\frac{1}{8} - \frac{\mathrm{i}}{8}\big)\int_0^1 \frac{1}{(x-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x + \big(-\frac{1}{8} + \frac{\mathrm{i}}{8}\big)\int_0^1 \frac{1}{(x+\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
= \;& \textstyle\frac{1}{8}[\ln(x^2+1)]_{x=0}^1 + \big(-\frac{1}{8} - \frac{\mathrm{i}}{8}\big)\big[-\frac{1}{x-\mathrm{i}}\big]_{x=0}^1 + \big(-\frac{1}{8} + \frac{\mathrm{i}}{8}\big)\big[-\frac{1}{x+\mathrm{i}}\big]_{x=0}^1 - \frac{1}{4}[\ln(x+1)]_{x=0}^1 \\
= \;& \textstyle\frac{1}{8}(\ln(2) - \ln(1)) + \big(-\frac{1}{8} - \frac{\mathrm{i}}{8}\big)\big(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\big) + \big(-\frac{1}{8} + \frac{\mathrm{i}}{8}\big)\big(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big) - \frac{1}{4}\ln(2) \\
= \;& \textstyle -\frac{1}{8}\ln(2) + \frac{1}{4} \\
\approx \;& 0{,}16335660243\,.
\end{aligned}$$

Kapitel 12

Gewöhnliche Differential- und Differenzengleichungen

12.1 Allgemeine Begriffe

Definition. Eine Gleichung, welche eine Funktion, ihre Ableitungen, sowie ihre Variablen beinhaltet, heißt *Differentialgleichung.*

Handelt es sich dabei um eine Funktion in einer Variablen, so spricht man von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung.*

Die maximal auftretende Ableitungsordnung heißt *Ordnung* der Differentialgleichung.

Eine Funktion, welche eine gegebene Differentialgleichung erfüllt, heißt *Lösung* der Differentialgleichung.

Beispiel. Es ist

$$y'' \;=\; -y$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto y(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion bezeichnet.

Es ist $y(x) = \sin(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Denn es ist

$$y'' \;=\; (\sin(x))'' \;=\; (\cos(x))' \;=\; -\sin(x) \;=\; -y\,.$$

Es ist auch $y(x) = \cos(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Beispiel. Es ist

$$xy' \;=\; 2y$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, wobei $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto y(x)$ eine differenzierbare Funktion bezeichnet.

Es ist $y(x) = x^2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Denn es ist

$$xy' \;=\; x(x^2)' \;=\; x \cdot 2x \;=\; 2x^2 \;=\; 2y\;.$$

Allgemeiner ist $y = Cx^2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$.

12.2 Separierbare Differentialgleichungen

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}\ x \longmapsto f(x)$ stetig.

Sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Sei $y_0 \in E \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $g : E \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t)$ stetig. Sei $g(t) \neq 0$ für $t \in E$.

Wir suchen eine differenzierbare Funktion $y : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$, welche

$$y'(x) \;=\; f(x) \cdot g(y(x))$$

erfüllt für $x \in D$.

Kurz, wir suchen die Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(*) \qquad \boxed{y' \;=\; f(x) \cdot g(y)}$$

auf D unter der *Anfangswertbedingung* $y(x_0) = y_0$.

Hierbei sollte $y = y(x)$ für $x \in D$ keine Werte außerhalb von E annehmen. Da sich ohnehin am Ende eine Probe durch Einsetzen empfiehlt, fällt einem dabei auch auf, ob dies verletzt ist.

Lemma. Es sei $y(x) \in E$ für $x \in D$.

Wir setzen $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in D$.

Wir setzen $H(w) := \int_{y_0}^{w} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$ für $w \in E$.

Es ist $H : E \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv, da $H'(w) = \frac{1}{g(w)}$ entweder stets positiv oder stets negativ ist.

Es ist $y(x)$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$, wenn

$$H(y(x)) \;=\; F(x)$$

gilt für $x \in D$.

Kennen wir eine differenzierbare Umkehrfunktion U von $H|^{H(E)}$, so kann hieraus eine Lösung

$$y(x) = U(F(x))$$

von $(*)$ gewonnen werden.

Begründung. Erfülle y die Gleichung $H(y(x)) \;=\; F(x)$. Differentiation auf beiden Seiten gibt mit der Kettenregel

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) \;=\; f(x) \;,$$

also $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ für $x \in D$, d.h. $y(x)$ erfüllt $(*)$. Es ist $H(y(x_0)) = F(x_0) = 0 = H(y_0)$, dank H injektiv mithin auch $y(x_0) = y_0$.

Erfülle umgekehrt $y(x)$ die Differentialgleichung $(*)$ und sei $y(x_0) = y_0$. Wir wollen zeigen, daß $H(y(x)) - F(x)$ konstant in x ist. Da D ein Intervall ist, genügt es zu zeigen, daß die Ableitung dieser Funktion verschwindet. Aber es ist

$$(H(y(x)) - F(x))' \;=\; H'(y(x)) \cdot y'(x) - F'(x) \;=\; \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) - f(x) \;=\; \frac{y'(x) - f(x) \cdot g(y(x))}{g(y(x))} \;=\; 0$$

für $x \in D$.

Einsetzen von x_0 gibt nun, daß $H(y(x)) - F(x) = H(y(x_0)) - F(x_0) = 0 - 0 = 0$ ist für $x \in D$, wie gewünscht.

Beispiel.

(1) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbb{R}$ mit $y_0 = y(0) = 1$ bei $x_0 = 0$ und

$$y' \;=\; y \;.$$

Es ist $f(x) = 1$ und $g(y) = y$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^{w} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^w \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(w)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Aus $\ln(w) = v$ folgt $w = \mathrm{e}^v =: U(v)$.

Also ist $y(x) = U(F(x)) = \mathrm{e}^x$. Definiert ist diese Funktion auf $\mathbb{R}$, wie gewünscht.

Machen wir die Probe. Es wird $y' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x = y$, wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = \mathrm{e}^0 = 1 = y_0$ wie erwartet.

(2) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbb{R}$ mit $y_0 = y(0) = -1$ bei $x_0 = 0$ und

$$y' \;=\; y \;.$$

Es ist $f(x) = 1$ und $g(y) = y$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^{w} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{w} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(-w)$ auf $\mathbb{R}_{<0}$.

Aus $\ln(-w) = v$ folgt $w = -\mathrm{e}^v =: U(v)$.

Also ist $y(x) = U(F(x)) = -\mathrm{e}^x$. Definiert ist diese Funktion auf $\mathbb{R}$, wie gewünscht.

Machen wir die Probe. Es wird $y' = (-\mathrm{e}^x)' = -\mathrm{e}^x = y$, wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = -\mathrm{e}^0 = -1 = y_0$, wie erwartet.

(3) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbb{R}$ mit $y_0 = y(0) = 1$ bei $x_0 = 0$ und

$$y' \;=\; x/y^2\;.$$

Es ist $f(x) = x$ und $g(y) = y^{-2}$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,x^2$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^w \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^w t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,(w^3 - 1)$.

Aus $\frac{1}{3}\,(w^3 - 1) = v$ folgt $w = (3v + 1)^{1/3} =: U(v)$.

Also ist

$$y \;=\; y(x) \;=\; U(F(x)) \;=\; (\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{1/3}\;.$$

Definiert ist diese Funktion auf $\mathbb{R}$, wie gewünscht.

Machen wir die Probe. Es wird

$$\begin{aligned} y' &= ((\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{1/3})' \\ &= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{-2/3} \cdot 3x \\ &= x/((\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{1/3})^2 = x/y^2\;, \end{aligned}$$

wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = (\frac{3}{2}\,0^2 + 1)^{1/3} = 1 = y_0$, wie erwartet.

(4) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ mit $y_0 = y(1) = 1$ bei $x_0 = 1$ und

$$y' \;=\; y/x^2$$

auf einem offenen Intervall, das $x_0 = 1$ enthält.

Es ist $f(x) = x^{-2}$ und $g(y) = y$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-2}\,\mathrm{d}t = 1 - x^{-1}$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^w \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^w t^{-1}\,\mathrm{d}t = \ln(w)$.

Aus $\ln(w) = v$ folgt $w = \mathrm{e}^v =: U(v)$.

Aufgelöst nach y wird

$$y \;=\; y(x) \;=\; U(F(x)) \;=\; \mathrm{e}^{1-x^{-1}}\;.$$

Definiert ist diese Funktion auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$, welches $x_0 = 1$ enthält.

Machen wir die Probe. Es wird

$$\begin{aligned} y' &= (\mathrm{e}^{1-x^{-1}})' \\ &= x^{-2}\,\mathrm{e}^{1-x^{-1}} \\ &= y/x^2\;, \end{aligned}$$

wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = \mathrm{e}^{1-1^{-1}} = \mathrm{e}^0 = 1 = y_0$, wie erwartet.

Wer keine Probe macht, ist selbst schuld.

12.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $x_0 \in D$. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $a : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a(x)$ und $b : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b(x)$ stetige Funktionen.

Wir suchen eine differenzierbare Funktionen $y : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$, welche

$$y'(x) \ = \ a(x)y(x) + b(x)$$

erfüllt für $x \in D$.

Kurz, wir suchen die Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(**) \qquad \boxed{y' \ = \ a(x)y + b(x)}$$

auf D unter der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$.

Ist $b(x) = 0$ für alle $x \in D$, so nennt man $(**)$ *homogen,* ansonsten *inhomogen.*

Setze

$$A(x) \ := \ \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in D$.

Lemma. Ist speziell $b(x) = 0$ für $x \in D$, sind wir also im homogenen Fall, so ist die Lösung der Differentialgleichung $(**)$ unter der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ eindeutig gegeben durch

$$y(x) \ := \ \mathrm{e}^{A(x)} y_0$$

für $x \in D$.

Bemerkung. Im homogenen Fall liegt eine separierbare Differentialgleichung vor, wie in §12.2 behandelt. Das dortige Verfahren führt für $y_0 \neq 0$ auch auf die hier gegebene Lösung.

Setze

$$F(x) \ := \ \int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t$$

für $x \in D$.

Lemma. Die Lösung der Differentialgleichung $(**)$ unter der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig gegeben durch

$$y(x) \ := \ \mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0)$$

für $x \in D$.

Bemerkung. Wir erkennen, daß im homogenen Fall jede Lösung der Differentialgleichung $(**)$ von der Form $C\,\mathrm{e}^{A(x)}$ ist für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Die Menge ihrer Lösungen ist also der eindimensionale Unterraum

$$\langle \mathrm{e}^{A(x)} \rangle \;\subseteq\; \mathbb{R}^D \;,$$

wobei $\mathbb{R}^D$ den Raum der reellwertigen Funktionen auf D bezeichnet; vgl. §5.4.1, Beispiel, (2). In anderen Worten, es ist $(\mathrm{e}^{A(x)})$ eine (einelementige) Basis des Lösungsraums $\langle \mathrm{e}^{A(x)} \rangle$.

Im inhomogenen Fall kommt noch ein Summand hinzu.

Ähnlich also wie bei linearen Gleichungssystemen; vgl. §5.3.

Beispiel.

(1) Sei $D = \mathbb{R}_{>0}$. Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit $y_0 = y(1) = 2$ bei $x_0 = 1$ und

$$y' \;=\; x^{-1}y + x^2 \;.$$

Es ist $a(x) = x^{-1}$ und $b(x) = x^2$.

Es ist $A(x) = \int_1^x t^{-1}\,\mathrm{d}t = \ln(x)$.

Es ist $F(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{e}^{-\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x^2-1)$.

Als Lösung erhalten wir also

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{\ln(x)}\big(\tfrac{1}{2}(x^2-1)+2\big) \;=\; \tfrac{1}{2}\,x^3 + \tfrac{3}{2}\,x \;.$$

Machen wir die Probe. Es ist $y(1) = \frac{1}{2}\,1^3 + \frac{3}{2}\,1 = 2$. Es wird $y'(x) = \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{2} = x^{-1}y(x) + x^2$, wie erwartet.

(2) Sei $D = \mathbb{R}$. Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit $y_0 = y(1) = 0$ bei $x_0 = 1$ und

$$y' \;=\; xy + x \;.$$

Es ist $a(x) = x$ und $b(x) = x$.

Es ist $A(x) = \int_1^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}$.

Es ist $F(x) = \int_1^x t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \overset{u\,=\,\frac{1}{2}\,t^2\,-\,\frac{1}{2}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{2}}$; vgl. §6.3.1.

Als Lösung erhalten wir also

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{2}}\big(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{2}}\big) \;=\; \mathrm{e}^{(x^2-1)/2} - 1 \;.$$

Machen wir die Probe. Es ist $y(1) = \mathrm{e}^{(1^2-1)/2} - 1 = 0$. Es wird $y'(x) = x\,\mathrm{e}^{(x^2-1)/2} = x(\mathrm{e}^{(x^2-1)/2} - 1) + x = xy(x) + x$, wie erwartet.

12.4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

12.4.1 Allgemeine Problemstellung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $x_0 \in D$. Seien y_0, $y_0' \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $b \in \mathbb{R}$.

Sei $c : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto c(x)$ eine stetige Funktion.

Wir suchen eine zweimal differenzierbare Funktion $y : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_0'$, welche

$$y''(x) + 2ay'(x) + by(x) = c(x)$$

erfüllt für $x \in D$.

Kurz, wir suchen die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(***) \qquad \boxed{y'' + 2ay' + by \;=\; c(x)}$$

auf D unter den Anfangswertbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_0'$.

Ist $c(x) = 0$ für alle $x \in D$, so nennt man $(***)$ *homogen,* ansonsten *inhomogen.*

Vorsicht, der Faktor 2 im Summanden $2ay'$ darf nicht vergessen werden.

12.4.2 Der homogene Fall

Sei $D = \mathbb{R}$. Sei $c(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ in der Situation von §12.4.1. Wir befinden uns also im homogenen Fall.

Lemma. Wir erinnern daran, daß nun $c(x) = 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

(1) *Fall* $a^2 > b$. Schreibe $v := \sqrt{a^2 - b} \in \mathbb{R}_{>0}$. Für r, $s \in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx})$$

eine Lösung von $(***)$ auf $\mathbb{R}$, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(2) *Fall* $a^2 < b$. Schreibe $w := \sqrt{b - a^2} \in \mathbb{R}_{>0}$. Für r, $s \in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx))$$

eine Lösung von $(***)$ auf $\mathbb{R}$, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(3) *Fall* $a^2 = b$. Für $r,\, s \in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r + sx)$$

eine Lösung von $(***)$ auf $\mathbb{R}$, und jede ihrer Lösungen davon ist von dieser Form.

In jedem Fall stellen die beiden Anfangswertbedingungen nach Einsetzen von x_0 ein lineares Gleichungssystem in den zu bestimmenden konstanten Größen r und s dar; vgl. §5.3.

Komplexe Zahlen helfen hier beim Verständnis.

Von vorneherein sieht man, daß Linearkombinationen mit konstanten Koeffizienten von Lösungen von $(***)$ wieder Lösungen davon sind.

Setzen wir $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ an und fragen, ob es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ so gibt, daß $y'' + 2ay' + by = 0$, dann erhalten wir $(\lambda^2 + 2a\lambda + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$, woraus $\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$ folgt.

Falls $a^2 > b$, so schreibe $v := \sqrt{a^2 - b} \in \mathbb{R}_{>0}$. Es sind $\mathrm{e}^{(-a+v)x}$ und $\mathrm{e}^{(-a-v)x}$ Lösungen.

Falls $a^2 < b$, so schreibe $w := \sqrt{b - a^2} \in \mathbb{R}_{>0}$. Es sind $\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}w)x}$ und $\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}w)x}$ komplexwertige Lösungen. Da nun Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, sind auch

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}w)x} - \mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}w)x}) & = & \mathrm{e}^{-ax}\sin(wx) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}w)x} + \mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}w)x}) & = & \mathrm{e}^{-ax}\cos(wx) \end{array}$$

Lösungen; vgl. §11.2.2. Letztere sind reell, wie gesucht.

Falls $a^2 = b$, so ist e^{-ax} eine Lösung. Mit etwas Glück sieht man die weitere Lösung $x\,\mathrm{e}^{-ax}$.

Beispiel. Wir lösen

$$y'' + y' + y \;=\; 0$$

auf $\mathbb{R}$ unter den Anfangswertbedingungen $y_0 = 0$ und $y_0' = 1$ bei $x_0 = 0$.

Da $y'' + y' + y = y'' + 2(1/2)y' + y$ ist, ist $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$; vgl. $(***)$. Somit ist $a^2 = \frac{1}{4} < 1 = b$ und wir befinden uns im zweiten Fall des Lemmas. Es ist $w = \sqrt{b - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Wir suchen also Konstanten $r,\, s \in \mathbb{R}$ so, daß die Funktion

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}))$$

die Anfangsbedingungen erfüllt. Halten wir dazu zunächst fest, daß

$$y'(x) \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) - s\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}))\;.$$

Also

$$\begin{array}{rcl} y(x_0) & = & \mathrm{e}^{-0/2}(r\sin(\frac{0}{2}\sqrt{3}) + s\cos(\frac{0}{2}\sqrt{3})) \\ & = & s \\ & \overset{!}{=} & 0 \\ y'(x_0) & = & -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-0/2}(r\sin(\frac{0\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\frac{0\sqrt{3}}{2})) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-0/2}(r\cos(\frac{0\sqrt{3}}{2}) - s\sin(\frac{0\sqrt{3}}{2})) \\ & = & -\frac{1}{2}\,s + \frac{\sqrt{3}}{2}\,r \\ & \overset{!}{=} & 1\;. \end{array}$$

Auch ohne Verfahren erkennt man, daß $s = 0$ und $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ zu sein hat. Dies gibt die Lösung

$$y(x) \;=\; \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{e}^{-x/2}\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})$$

der gegebenen Differentialgleichung unter den gegebenen Anfangswertbedingungen.

Zur Probe setze man ein.

12.4.3 Der inhomogene Fall

Nun ist $c(x)$ beliebig vorgegeben in der Situation von §12.4.1. Wähle eine Lösung $\hat{u}(x)$ der *zugehörigen homogenen Differentialgleichung* $u'' + 2au' + bu = 0$ derart, daß $\hat{u}(x) \neq 0$ für alle $x \in D$; vgl. §12.4.2.

Im Falle $a^2 < b$ wähle man dabei die (eigentlich nicht zu betrachtende) komplexe Lösung $\hat{u}(x) = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}w-a)x} = \mathrm{e}^{-ax}(\cos(wx) + \mathrm{i}\sin(wx))$, wobei $w = \sqrt{b-a^2}$, und verwende am Ende, daß der Realteil der so gefundenen Lösung ebenfalls eine Lösung ist; vgl. §11.2.2.

Auch in den anderen beiden Fällen empfiehlt es sich, dabei eine Exponentialfunktion mit entsprechendem Exponenten zu wählen.

Setze

$$G(x) \;:=\; \textstyle\int_{x_0}^{x} c(t)\,\hat{u}(t)\,\mathrm{e}^{2at}\,\mathrm{d}t\;.$$

für $x \in D$. Es darf $G(x)$ noch durch Addition einer Konstanten abgeändert werden.

Setze

$$H(x) \;:=\; \textstyle\int_{x_0}^{x} \hat{u}(t)^{-2}\,\mathrm{e}^{-2at}\,G(t)\,\mathrm{d}t\;.$$

für $x \in D$. Es darf $H(x)$ noch durch Addition einer Konstanten abgeändert werden.

Lemma. Wir erinnern daran, daß nun $c(x)$ beliebig vorgegeben ist.

(1) *Fall* $a^2 > b$. Schreibe $v := \sqrt{a^2-b} \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $r,\, s \,\in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx}) + \hat{u}(x)H(x)$$

eine Lösung von $(***)$ auf D, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(2) *Fall* $a^2 < b$. Schreibe $w := \sqrt{b-a^2} \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $r,\, s \,\in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) + \hat{u}(x)H(x)$$

eine Lösung von $(***)$ auf D, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(3) *Fall* $a^2 = b$. Für $r,\, s \,\in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r + sx) + \hat{u}(x)H(x)$$

eine Lösung von $(***)$ auf D, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

In jedem Fall stellen die beiden Anfangswertbedingungen nach Einsetzen von x_0 ein lineares Gleichungssystem in den zu bestimmenden Größen r und s dar; vgl. §5.3.

Auf $H(x)$ kommt man durch den Ansatz, eine Lösung der Form $\hat{u}(x)H(x)$ zu suchen. Dies führt auf die Bedingung $H'' = -(2\frac{\hat{u}'}{\hat{u}} + a)H' + \frac{c}{\hat{u}}$, welche nach Substitution $h = H'$ zur linearen Differentialgleichung erster Ordnung $h' = -(2\frac{\hat{u}'}{\hat{u}} + a)h + \frac{c}{\hat{u}}$ wird, die mit dem Verfahren aus §12.3 gelöst werden kann. Aus h gewinnt man dann H durch Bilden einer Stammfunktion.

Bemerkung. Wir erkennen, daß im homogenen Fall die Menge der Lösungen von $(\ast\ast\ast)$ ein zweidimensionaler Unterraum des Raums aller Funktionen auf D ist, nämlich, in den Bezeichnungen des Lemmas,

$$\begin{array}{lcll} \langle \mathrm{e}^{(v-a)x},\, \mathrm{e}^{(-v-a)x}\rangle & \subseteq & \mathbb{R}^D & \text{falls } a^2 > b \\ \langle \mathrm{e}^{-ax}\sin(wx),\, \mathrm{e}^{-ax}\cos(wx)\rangle & \subseteq & \mathbb{R}^D & \text{falls } a^2 < b \\ \langle \mathrm{e}^{-ax},\, x\,\mathrm{e}^{-ax}\rangle & \subseteq & \mathbb{R}^D & \text{falls } a^2 = b\,; \end{array}$$

vgl. §5.4.1, Beispiel, (2). In anderen Worten, es bilden jeweils die beiden angeführten Funktionen eine (zweielementige) Basis des Lösungsraums.

Im inhomogenen Fall kommt noch ein Summand hinzu.

Wiederum ähnlich also wie bei linearen Gleichungssystemen; vgl. §5.3.

Beispiel. Wir lösen

$$y'' + y' + y \;=\; x$$

unter den Anfangswertbedingungen $y_0 = 1$ und $y_0' = 1$ bei $x_0 = 0$ in einem offenen Intervall, das 0 enthält. Es ist also $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und $c(x) = x$.

Im Beispiel in §12.4.2 haben wir den linearen Fall gelöst. Eine (eigentlich nicht betrachtete komplexe) Lösung von $u'' + u' + u = 0$ ist

$$\hat{u}(x) \;=\; \mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\,.$$

Mit ihr wird

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & \int_{x_0}^x c(t)\,\hat{u}(t)\,\mathrm{e}^{2at}\,\mathrm{d}t \\ & = & \int_0^x t\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\,\mathrm{d}t \\ & = & [t\,(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}]_{t=0}^x - \int_0^x (\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\,\mathrm{d}t \\ & = & x\,(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} + (\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})(\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} - 1)\,; \end{array}$$

vgl. §6.3.2.

Wir ändern noch durch Addition einer Konstanten ab zu

$$G(x) \;=\; (x\,(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\,.$$

Es wird

$$\begin{array}{rcl}
H(x) & = & \int_{x_0}^{x} \hat{u}(t)^{-2}\, \mathrm{e}^{-2at}\, G(t)\, \mathrm{d}t \\
& = & \int_0^x \mathrm{e}^{1-\mathrm{i}\sqrt{3}t}\, \mathrm{e}^{-t}\big(t\,(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\big)\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\, \mathrm{d}t \\
& = & \int_0^x \big(t\,(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\big)\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\, \mathrm{d}t \\
& = & \big[\big(t\,(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\big)(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\big]_{t=0}^{x} \\
& & -\int_0^x (\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\, \mathrm{d}t \\
& = & \big[\big(t + (-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\big)\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\big]_{t=0}^{x} \\
& & -\int_0^x \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\, \mathrm{d}t \\
& \overset{\text{b.a. Konst.}}{=} & \big(x + (-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\big)\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& & -(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& = & \big(x + (-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\big)\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& & -(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& = & (x-1)\, \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\ .
\end{array}$$

vgl. §6.3.2. Also wird

$$\begin{array}{rcl}
y(x) & = & \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) + \hat{u}(x)H(x) \\
& = & \mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\frac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\frac{x\sqrt{3}}{2})) + (x-1)
\end{array}$$

für gewisse $r,\ s \in \mathbb{R}$. Es ist

$$y'(x) \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) - s\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + 1\ .$$

Die Anfangswertbedingung $y(x_0) = y(0) = 1 = y_0$ gibt $t = 2$. Die Anfangswertbedingung $y'(x_0) = y'(0) = 1 = y_0'$ gibt dann $s = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Insgesamt erhalten wir als Lösung

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x/2}(\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + 2\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + (x-1)$$

auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung.

Noch ein paar Tricks zum Auffinden einer Lösung von $(*{*}*)$. Ist $c(x)$ in der folgenden Auflistung enthalten, so braucht man G und H nicht zu bestimmen, sondern kann vorgehen wie im folgenden angegeben. Das ist in der Regel eine erhebliche Erleichterung.

Hat man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $y'' + 2ay' + by = c(x)$ bestimmt, so ist jede Lösung davon von der Form $\hat{y}(x) + u(x)$, wobei $u'' + 2au' + bu = 0$.

In anderen Worten, wir müssen uns nur eine Lösung von $(*{*}*)$ beschaffen, die übrigen erhalten wir durch Addition der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aus dem Lemma aus §12.4.2.

(1) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Ist $c(x)$ ein Polynom von Grad $\leqslant n$, so suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$, die ebenfalls ein Polynom von Grad $\leqslant n$ ist. Um dessen Koeffizienten zu bestimmen, setze man ein beliebiges solches Polynom in die Differentialgleichung ein und vergleiche Koeffizienten.

(2) Sei $c(x) = \mu\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ für gewisse $\lambda,\ \mu\ \in \mathbb{C}$.

Falls $\lambda^2 + 2a\lambda + b \neq 0$ ist, dann suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$ der Form $\nu\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\nu \in \mathbb{C}$, welches durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung bestimmt wird.

Falls $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$, aber $\lambda + a \neq 0$ ist, dann suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$ der Form $\nu x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\nu \in \mathbb{C}$, welches durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung bestimmt wird.

Falls $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ und $\lambda + a = 0$ ist, dann suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$ der Form $\nu x^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\nu \in \mathbb{C}$, welches durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung bestimmt wird.

(3) Sei $c(x) = \mu\cos(\lambda x) + \mu'\sin(\lambda x)$ für gewisse $\lambda,\ \mu,\ \mu'\ \in \mathbb{R}$. Man löse Cosinus und Sinus auf mittels der Eulerschen Formel aus der Bemerkung aus §11.2.2, wende (2) auf alle entstandenen Summanden an und addiere die erhaltenen Lösungen zu einer Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$; vgl. Bemerkung aus §11.2.2.

(4) Ist $c(x)$ eine Summe von Funktionen wie in $(1, 2, 3)$, so suche man Lösungen für die Summanden als rechte Seiten einzeln und addiere diese dann zu einer Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$.

Beispiel. Im vorigen Beispiel $y'' + y' + y = x$ war $c(x) = x$ ein Polynom von Grad $\leqslant 1$. Wir suchen also eine Lösung von $y'' + y' + y = x$ von der Form $\hat{y}(x) = \lambda x + \mu$ für gewisse $\lambda,\ \mu\ \in \mathbb{R}$. Einsetzen gibt die Bedingung

$$x \overset{!}{=} (\lambda x + \mu)'' + (\lambda x + \mu)' + (\lambda x + \mu) \;=\; \lambda x + (\lambda + \mu)\,.$$

Koeffizientenvergleich bei x^0 und x^1 führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \\ 0 &= \lambda + \mu \end{aligned}$$

mit der Lösung $\lambda = 1$ und $\mu = -1$. Dies gibt die Lösung $\hat{y}(x) = x - 1$. Also ist jede Lösung von $y'' + y' + y = x$ von der Form

$$y(x) \;=\; \underbrace{(x-1)}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-x/2}\big(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})\big)}_{u(x)}$$

für gewisse $r,\ s\ \in \mathbb{R}$, unter Verwendung der allgemeinen Lösung $u(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aus Beispiel aus §12.4.2.

Nun können r und s noch durch Einsetzen der Anfangswertbedingungen bestimmt werden, wie dies bereits im vorangegangenen Beispiel geschah. Man vergleiche auch den jeweilig betriebenen Aufwand.

12.5 Etwas zu linearen Differenzengleichungen

12.5.1 Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $c \neq 0$.

Wir suchen alle reellen Folgen $(x_n)_{n\geqslant 0}$, für die

$$x_{n+1} \;=\; ax_n + bc^n$$

ist für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Lemma.

(1) Ist $a \neq c$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{b}{c-a}\, c^n + ra^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r \in \mathbb{R}$. Ist der Anfangswert x_0 vorgegeben, so wird $r = x_0 - \frac{b}{c-a}$.

(2) Ist $a = c$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; ((bn + ra)a^{n-1})_{n\geqslant 0}$$

mit $r \in \mathbb{R}$. Ist der Anfangswert x_0 vorgegeben, so wird $r = x_0$.

Beispiel. Wir suchen die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_{n+1} \;=\; 2x_n + 3^n$ für $n \geqslant 0$ und $x_0 = 0$. Es ist $a = 2$, $b = 1$ und $c = 3$. Also sind wir in Fall (1). Wir erhalten $r = -\frac{b}{c-a} = -1$ und also

$$x_n \;=\; \tfrac{b}{c-a}\, c^n + ra^n \;=\; 3^n - 2^n$$

für $n \geqslant 0$, also $(x_n)_{n\geqslant 0} = (0, 1, 5, 19, \ldots)$.

12.5.2 Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $d \neq 0$.

Wir suchen alle reellen Folgen $(x_n)_{n\geqslant 0}$, für die

$$x_{n+2} \;=\; 2ax_{n+1} + bx_n + cd^n$$

ist für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Sei $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2 + b} \in \mathbb{C}$ und $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2 + b} \in \mathbb{C}$, wobei $\sqrt{-t} = \mathrm{i}\sqrt{t}$ für $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Lemma.

(1) Falls $a^2 + b \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b \neq 0$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \; = \; (\tfrac{c}{d^2-2ad-b}\, d^n + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbb{C}$.

(2) Falls $a^2 + b \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b = 0$, dann ist $d \neq a$, und jede Lösung ist von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \; = \; (\tfrac{c}{2(d-a)}\, nd^{n-1} + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbb{C}$.

(3) Falls $a^2 + b = 0$ und $d \neq a$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \; = \; (\tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n + ra^n + sna^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbb{R}$.

(4) Falls $a^2 + b = 0$ und $d = a$, dann ist $a \neq 0$ und jede Lösung ist von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \; = \; (\tfrac{c}{2}\, n^2 a^{n-2} + ra^n + sna^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbb{R}$.

Sind x_0 und x_1 vorgegeben, so können daraus r und s durch Einsetzen von $n = 0$ und $n = 1$ bestimmt werden.

Beispiel. Sei eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ so gesucht, daß $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und

$$x_{n+2} \; = \; x_{n+1} + x_n$$

ist für $n \geqslant 0$ (Fibonacci-Folge).

Es ist $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$ und d egal. Wir sind im Fall (1) oder (2), was wegen $c = 0$ auf dasselbe hinausläuft.

Es ist $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Wir suchen $r,\, s \in \mathbb{R}$ so, daß $r + s \overset{!}{=} 0$ und $r\lambda_1 + s\lambda_2 \overset{!}{=} 1$. Auch ohne Verfahren sehen wir, daß $s = -r$ und daher $1 \overset{!}{=} r(\lambda_1 - \lambda_2) = r\sqrt{5}$ sein sollte. Wir erhalten $r = 1/\sqrt{5}$, $s = -1/\sqrt{5}$ und also

$$x_n \; = \; \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \; = \; \tfrac{1}{2^n\sqrt{5}}\big((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\big)$$

für $n \geqslant 0$. Also $(x_n)_{n\geqslant 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$.

Literatur

[1] Baule, B., *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs,* Band IV, Hirzel, 1955.

[2] Barner, M.; Flohr, F., *Analysis II*, 3. Aufl., de Gruyter, 1996.

[3] Erwe, F., *Differential- und Integralrechnung I und II,* B.I. Hochschultaschenbücher, 1962.

[4] Jank, G.; , Jongen, H., *Höhere Mathematik II für Maschinenbauer,* Aachener Beitr. Math. 4, 2. Aufl., 1996.

[5] Kolbe, W., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2010.

[6] Kolbe, W., *Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2010.

[7] Maurin, K., *Analysis. Part I.*, Springer, 1976.

[8] Rump, W., *Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2006.

[9] Rump, W., *Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2006.

[10] Martin, A. et al., *Mathematik-Online,* `mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs29` und `mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs14`, Ulm, 2004.

[11] Sydsæter, K., Hammond, P., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* 2. Aufl., Pearson, 2006.