Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 2

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 5 Sei $(a_n)_{n\geqslant 0} := \left(\frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} + \frac{1}{n+\mathrm{e}^n}\right)_{n\geqslant 0}$.

(1) Berechnen Sie das Folgenglied a_{100} mithilfe des Taschenrechners auf 5 Nachkommastellen genau.

(2) Wieso ist
$$b_n \;:=\; \frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} \;\leqslant\; a_n \;\leqslant\; \frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} + \frac{1}{n} \;=:\; c_n$$
für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$?

(3) Berechnen Sie $\lim_n b_n$ und $\lim_n c_n$.

(4) Berechnen Sie $\lim_n a_n$ unter Verwendung von (2) und (3).

Lösung.

(1) Es ist
$$a_{100} = \frac{\sqrt{2\cdot 100^4 - 2\cdot 100}}{100^2+6} + \frac{1}{100+\mathrm{e}^{100}} \approx 1,41336.$$

(2) Da für alle $n \geqslant 0$ die Ungleichung $\mathrm{e}^n > 0$ gilt, ist
$$0 \leqslant \frac{1}{n+\mathrm{e}^n} \leqslant \frac{1}{n}.$$
Indem man zu dieser Ungleichung den Term
$$\frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6}$$
addiert, ergibt sich
$$\frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} \;\leqslant\; \frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} + \frac{1}{n+\mathrm{e}^n} \;\leqslant\; \frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} + \frac{1}{n}$$
und damit $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$.

(3) Es ist
$$\begin{aligned}\lim_n b_n = \lim_n \frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} = \lim_n \frac{n^{-2}\sqrt{2n^4-2n}}{n^{-2}(n^2+6)} &= \lim_n \frac{\sqrt{2-2n^{-3}}}{1+6n^{-2}}\\ &= \frac{\sqrt{\lim_n 2 - 2\lim_n n^{-3}}}{\lim_n 1 + 6\lim_n n^{-2}}\\ &= \frac{\sqrt{2-0}}{1+0}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

und

$$\lim_n c_n = \lim_n \left(\frac{\sqrt{2n^4 - 2n}}{n^2 + 6} + \frac{1}{n} \right) = \lim_n \left(b_n + \frac{1}{n} \right) = \lim_n b_n + \lim_n \frac{1}{n} = \lim_n b_n = \sqrt{2}.$$

(4) Nach (2) ist $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ für alle $n \geqslant 0$ und nach (3) ist $\lim_n b_n = \lim_n c_n$. Also gilt mit dem Sandwich Lemma $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \lim_n c_n = \sqrt{2}$.

Hausaufgabe 6

(1) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{7} (-1)^n \, 2^{-n}$. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2^{-n}$.

(2) Für welche $q \in \mathbf{R}$ existiert $\sum_{i=0}^{\infty} (1-q)^i$? Berechnen Sie diesenfalls den Grenzwert.

Lösung.

(1) Es ist

$$\sum_{n=1}^{7} (-1)^n \, 2^{-n} = \sum_{n=1}^{7} (-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{7} (-\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^0$$

und

$$\sum_{n=0}^{7} (-\frac{1}{2})^n = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^8}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{3}{2}} = \frac{255}{384},$$

da dieser Ausdruck eine geometrische Summe ist. Also ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{7} (-1)^n \, 2^{-n} = \frac{255}{384} - (-\frac{1}{2})^0 = \frac{255}{384} - 1 = -\frac{129}{384}.$$

Analog ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^0$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

aufgrund des Grenzwerts der geometrischen Reihe.

Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2^{-n} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

(2) Sei $p := 1-q$. Der Grenzwert der geometrischen Reihe $\sum_{i \geqslant 0} p^i$ existiert für alle $p \in (-1, 1)$. Also existiert $\sum_{i \geqslant 0} (1-q)^i = \sum_{i \geqslant 0} p^i$ für alle q mit $(1-q) = p \in (-1, 1)$ und damit für alle $q \in (0, 2)$.

In diesem Fall ist

$$\sum_{i \geqslant 0} (1-q)^i = \sum_{i \geqslant 0} p^i = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-(1-q)} = \frac{1}{q}.$$

Hausaufgabe 7

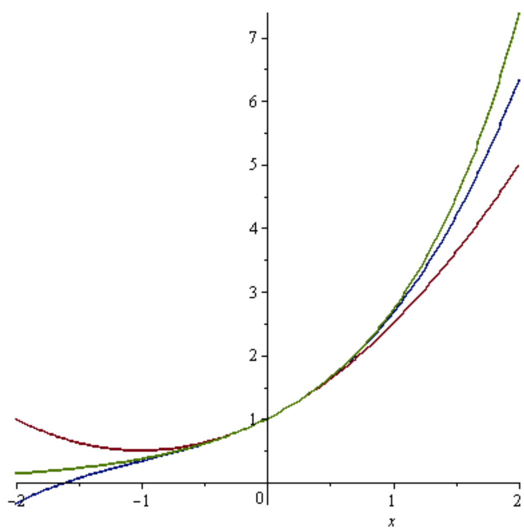
(1) Sei $f_\infty : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Sei $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$ für $k \geqslant 0$.

Skizzieren Sie die Graphen von f_2, f_3 und f_∞ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(2) Überprüfen Sie anhand der Exponentialreihe, dass $\mathrm{e}^x \geqslant \frac{(x+1)^2}{2}$ gilt für $x \geqslant 0$.

Lösung.

(1) Es ist $f_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ und $f_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. Damit ergibt sich die folgende Skizze, wobei die grüne Kurve f_∞ abbildet, die blaue Kurve f_3 und die rote Kurve f_2.



(2) Es ist

$$\frac{(x+1)^2}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2} = \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} = \sum_{n=0}^{2} \frac{x^n}{n!}.$$

Gleichzeitig gilt

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{2} \frac{x^n}{n!}.$$

Da für $x \geqslant 0$ alle Summanden von $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ positiv sind, ist auch ihre Summe positiv und damit gilt

$$\mathrm{e}^x \geqslant \sum_{n=0}^{2} \frac{x^n}{n!} \geqslant \frac{(x+1)^2}{2}$$

für alle $x \geqslant 0$.

Hausaufgabe 8 Sei $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$ und $x_0 := 1$. Sei $0 < \varepsilon < 1$.

(1) Bestimmen Sie a_ε, $b_\varepsilon \in \mathbf{R}$ mit $\{\, x \in \mathbf{R} : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,\} = (a_\varepsilon, b_\varepsilon)$.

(2) Bestimmen Sie die Menge aus (1) für $\varepsilon = 0{,}5$ auf zeichnerischem Weg.

(3) Bestimmen Sie ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbf{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt.

Lösung.

(1) Die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ mit $x \in \mathbf{R}$ lässt sich auch als

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

schreiben. Einsetzen von $f(x) = x^2$ und $x_0 = 1$ ergibt

$$-\varepsilon < x^2 - 1 < \varepsilon$$

und damit

$$1 - \varepsilon < x^2 < \varepsilon + 1.$$

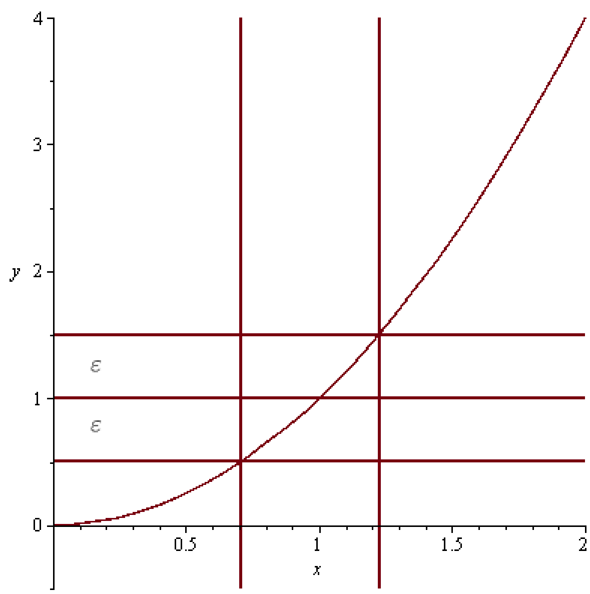
Da $x > 0$ gilt, ist also

$$\{\, x \in \mathbf{R} \,:\, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,\} = (\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon + 1}).$$

(2) Für $\varepsilon = 0{,}5$ ergibt sich die Ungleichung $0{,}5 < f(x) < 1{,}5$. In der Skizze ist dies durch die untere und die obere horizontale Gerade dargestellt.

Das Intervall aus (1) findet man, indem man vertikale Geraden durch die Schnittpunkte der horizontalen Geraden mit dem Graphen legt.

Also ergibt sich auch graphisch als Lösungsmenge das Intervall $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.



(3) Da nach (1)

$$\{\, x \in \mathbf{R} \,:\, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,\} = (\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon + 1})$$

gilt, können wir $\delta_\varepsilon = \min(1 - \sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon+1} - 1)$ setzen. Denn für alle $x \in \mathbf{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ gilt äquivalent

$$-\delta_\varepsilon < x - x_0 < \delta_\varepsilon$$

und damit

$$-\min(1-\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon+1}-1)+1 < x < \min(1-\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon+1}-1)+1.$$

Insbesondere ist auch

$$\sqrt{1-\varepsilon} = -\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)+1 < x < \sqrt{\varepsilon+1}-1+1 = \sqrt{\varepsilon+1}.$$

Optional lässt sich das Minimum δ_ε wie folgt berechen: Die Ungleichung

$$1-\sqrt{1-\varepsilon} \geqslant \sqrt{\varepsilon+1}-1$$

ist äquivalent zu

$$2-\sqrt{1-\varepsilon} \geqslant \sqrt{\varepsilon+1}.$$

Aufgrund von $0 < \varepsilon < 1$ ist dies wiederum äquivalent zu

$$\left(2-\sqrt{1-\varepsilon}\right)^2 \geqslant \varepsilon+1$$

und damit zu

$$4-4\sqrt{1-\varepsilon}+1-\varepsilon \geqslant \varepsilon+1,$$

sowie zu

$$-\sqrt{1-\varepsilon} \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon-1.$$

Dies wiederum ist äquivalent zu

$$\sqrt{1-\varepsilon} \leqslant 1-\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Wegen $0 < \varepsilon < 1$ ist dies äquivalent zu

$$1-\varepsilon \leqslant \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 = 1-\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2$$

und damit zu

$$0 \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon^2,$$

was für alle $0 < \varepsilon < 1$ gilt. Also gilt auch die Ungleichung $1-\sqrt{1-\varepsilon} \geqslant \sqrt{\varepsilon+1}-1$ für alle $0 < \varepsilon < 1$ und das gesuchte δ_ε ist

$$\delta_\varepsilon = \min(1-\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon+1}-1) = \sqrt{\varepsilon+1}-1.$$