Gesucht: lokale Extremstellen

von $f(x,y) = (y^2 - x)(y - x)$ (keine Nebenbedingung)

$$= y^3 - xy - xy^2 + x^2$$

∇ Flachstellen:

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y - y^2 + 2x \\ 3y^2 - x - 2xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-y - y^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(y^2 + y)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 3y^2 - x - 2xy$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{=} 3y^2 - \frac{1}{2}(y^2 + y) - 2 \cdot \frac{1}{2}(y^2 + y)\, y$$

$$= 3y^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y - y^3 - y^2$$

$$= -y^3 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y$$

$$= -y\left(y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$\left(x = \frac{1}{2}(y^2+y)\right)$

$\Rightarrow$ Flachstellen $(0, 0)$,

$(1, 1)$,

$\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$

Entscheidung via Hessematrix*:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1-2y \\ -1-2y & 6y-2x \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ weder positiv noch negativ definit, $\det = -1 \neq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ Sattelpunkt

---

* Wir wollen die später eingeführte Methode über die Definitheit der Hessematrix verwenden.

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$ weder positiv noch negativ definit, $\det = -1$

$\Rightarrow (1,1)$ Sattelpunkt

$$H_f\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

$M_1 = 2 > 0, \quad M_2 = \det = \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ lokale Minimalstelle **

** Vorzeichenfehler war während VÜ passiert.