1

Esquisse d'une théorie des Gr-Catégories

par Mme Hoang Xuan Sinh
(Note présentée par M. Henri Cartan)

Nous donnons un résumé de quelques résultats sur les (Gr)-catégories, faisant l'objet d'un travail détaillé que l'auteur compte présenter prochainement comme thèse de doctorat [ ].

1. Structure des (Gr)-catégories.

Notre terminologie est celle de Saavedra [ ]. Nous nous intéressons à des catégories C munies d'une opération binaire $(X,Y) \longmapsto X \otimes Y$ (foncteur de CxC dans C) associative et unitaire à isomorphisme donné près (satisfaisant des conditions de compatibilité explicitées dans loc. cit.), appelées aussi $\otimes$-catégories AU (associatives-unitaires). On dit qu'une telle catégorie est une (Gr)-catégorie si c'est un groupoïde, et si tout objet X de C est "inversible", i.e. admet un objet "inverse" $Y=X^{-1}$ (satisfaisant $X \otimes Y \simeq Y \otimes X \simeq 1_C$, où 1_C désigne l'objet unité de C). Les exemples abondent:

Cet exemple est un cas particulier du suivant, en prenant $\mathfrak{G} = \Omega^1(X,x)$ (espace des lacets).

<u>Exemple 1</u>. X étant un espace topologique ponctué par $x \in X$, on prend pour C la catégorie des lacets de X en x, avec comme morphismes les classes d'homotopie d'homotopies entre lacets, comme opération $\otimes$ la composition des lacets (qui n'est pas associative, mais associative "à homotopie près"). Variante: $\mathfrak{G}$ est un espace de Hopf associatif (ou simplement homotopiquement associatif en un sens suffisamment fort), C la catégorie dont les objets sont les points de $\mathfrak{G}$, les morphismes les classes d'homotopies de chemins entre points de $\mathfrak{G}$, la loi $\otimes$ étant induite par la loi de composition de $\mathfrak{G}$. (NB Lorsque $\mathfrak{G}$ admet un espace classifiant X, on retrouve essentiellement l'exemple précédent).

~~Exemple~~ 2. Si F est un faisceau abéliens sur un espace topologique (ou plus généralement sur un topos), la catégorie C des torseurs sous F, munie de la composition de Baer, est une (Gr)-catégorie (et même une catégorie de Picard stricte, cf. plus bas). On peut considérer la catégorie C des Modules inversibles sur un espace (ou topos) localement annelé $(X,\underline{O}_X)$ comme le cas particulier correspondant au cas $F=\underline{O}_X^*$.

~~Exemple~~ 3. Si A est une catégorie, la sous-catégorie pleine C de $\underline{\mathrm{Hom}}(A,A)_{is}$ formée des équivalences de A avec elle-même, munie de l'opération de composition des foncteurs, est une (Gr)-catégorie. Au lieu de prendre pour A une catégorie, on peut plus généralement prendre pour A un objet d'une 2-catégorie quelconque. Si p.ex. F est un faisceau en groupes (pas nécessairement commutatif) sur un espace topologique (ou un topos),

39

2

prenant pour A la "champ" sur X formé des F-torseurs à droite, la (Gr)-catégorie des auto-équivalences de A avec lui-même s'interprète comme la catégorie des "bitorseurs" sous F, i.e. des faisceaux P sur lesquels F opère à la fois à droite et à gauche, ces opérations commutant et chacune d'elles faisant de P un torseur (à droite ou à gauche) sous F, – la composition $\otimes$ étant la composition de Baer évidente. Lorsque F est encore de la forme $\underline{O}_X^*$ ($\underline{O}_X$ étant un faisceau d'anneaux, qu'on ne suppose plus nécessairement commutatif) ces bitorseurs s'interprètent aussi en termes de bi-Modules "inversibles" sous $\underline{O}_X$.

<u>Structure</u>. Soit C une (Gr)-catégorie, on lui associe

a) le groupe $\pi_0(C)$ des classes d'isomorphisme d'objets de C,

b) le groupe $\pi_1(C)$ des automorphismes de 1_C (objet unité de C)

c) une action de $\pi_0(C)$ sur $\pi_1(C)$, en associant à tout objet X de C l'automorphisme $\rho(X)$ de 1_C déduit des deux isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(1_C) \rightrightarrows \mathrm{Aut}(X)$$

donnés par $u \mapsto u\otimes \mathrm{id}_X$ et $u \mapsto \mathrm{id}_X \otimes u$. On prouve que $\pi_1(C)$ est un groupe <u>commutatif</u> et que l'on obtient bien par c) une structure de $\pi_0(C)$-module sur celui-ci. Ceci posé, si on choisit pour tout $a \in \pi_0(C)$ un représentant $L_a \in \mathrm{Ob}\, C$ de a, et pour deux a,b un isomorphisme

$$\phi_{a,b} : L_a \otimes L_b \simeq L_{ab} ,$$

alors pour trois éléments $a,b,c \in \pi_0(C)$, l'isomorphisme d'associativité

$$(L_a \otimes L_b)\otimes L_c \simeq L_a \otimes (L_b \otimes L_c) ,$$

compte tenu des isomorphismes $\phi_{a,b}$, $\phi_{ab,c}$, $\phi_{b,c}$ et $\phi_{a,bc}$, peut s'interpréter comme un isomorphisme

$$L_{abc} \simeq L_{abc} ,$$

ou encore comme la tensorisation à gauche avec un élement bien déterminé

$$f(a,b,c) \in \pi_1(C) .$$

Les $\phi_{a,b}$ étant choisis, on voit donc que la donnée d'un isomorphisme d'associativité fonctoriel $(L\otimes L')\otimes L'' \simeq L\otimes(L'\otimes L'')$ équivaut à la donnée de l'application

$$f : \pi_0 \times \pi_0 \times \pi_0 \to \pi_1 .$$

On vérifie alors que l'axiome standard d'autocompatibilité d'une donnée d'associativité (axiome du pentagone) s'exprime précisément par la condition que f soit un <u>3-cocycle</u> du groupe π_0 à valeurs dans le groupe π_1. D'autre part, l'indétermination dans le choix du système d'isomorphismes $\phi_{a,b}$ est précisément donnée par une 2-cochaine arbitraire, et on voit que si on change ϕ par une 2-cochaine g, f est changé en f+dg – donc l'ensemble des f correspondants à des choix différents de ϕ est exactement une classe de 3-cohomologie

40

$$k(C) \in H^3(\pi_0(C), \pi_1(C)) .$$

En précisant ces réflexions, on trouve que la classification, à $\otimes$-équivalence près, des (Gr)-catégories, se fait précisément en termes d~~e~~ un groupe π_0, d'un groupe commutatif π_1 sur lequel π_0 opère, et d'une classe de cohomologie (qui peut être prise arbitraire) dans $H^3(\pi_0, \pi_1)$. La loi de ~~compx~~ groupe du H^3 admet d'ailleurs une interprétation "géométrique" à la Baer, en termes d'opérations sur les (Gr)-catégories.

Cas particuliers. Dans l'exemple 1, on doit retrouver bien sûr le premier invariant de Postnikoff $\in H^3(\pi_1(X), \pi_2(X))$, avec une interprétation "géométrique" nouvelle. Dans l'exemple 2, on trouve $\pi_0 = H^1(X,F)$, $\pi_1 = H^0(X,F)$ et l'élément du H^3 est nul (du fait qu'on a une "catégorie de Picard stricte", cf. Deligne [ ]). Dans ~~le~~ le dernier exemple, on a π_0 = groupe des classes d'isomorphisme d'autoéquivalences de A, π_1 = groupe des automorphismes du foncteur identique de A, et l'invariant k(C) semble nouveau (même dans le cas où C est la catégorie des biModules inversibles sous un Anneau $\underline{O}_X$, où π_0 peut donc s'interpréter comme un "groupoide de Brandt" et π_1 comme le groupe des "unités centrales" de $\underline{O}_X$). Signalons cependant que lorsque A est la catégorie des torseurs sous un groupe (ordinaire) F, on trouve ~~un élément de~~ π_0 = groupe des automorphismes extérieurs de F, π_1 = centre de F, et l'élément k(C) du H^3 n'est autre que le classique invariant de Mac-Lane. Il resterait à développer ~~établir~~ un lien géométrique direct entre la théorie de Mac-Lane des extensions de groupes non commutatifs, et des liens ("kernels" dans sa terminologie) auxquels ils sont associés, et la théorie ~~développée ici~~ esquissée ici des (Gr)-catégories et de leurs splittages.

2. Catégories de Picard.

On appelle "catégorie de Picard" une $\otimes$-catégorie ACU (associative-commutative-unitaire, cf. [ ]) qui est une (Gr)-catégorie pour sa ~~xxxx~~ $\otimes$-structure AU. On dit que c'est une catégorie de Picard stricte si pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$, la symétrie de $X \otimes X$ est l'identité. Ces ~~xxxx~~ dernières catégories sont étudiées systématiquement (dans le contexte plus général des "champs de Picards") par Deligne [ ].

Soit C une catégorie de Picard. En tant que (Gr)-catégorie, C possède des invariants π_0 et π_1, mais dans le cas actuel π_0 est aussi commutatif et agit trivialement sur π_1. On fera attention ici qu'une équivalence de (Gr)-catégories entre deux catégories de Picard C,C' n'est pas nécessairement compatible avec les contraintes de commutativité, donc n'est pas nécessairement une équivalence de catégories de

41

Picard – on peut dire que la classification "au sens Picard" est plus fine que la classification au sens des (Gr)-catégories. *

Associant à tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$ la symétrie de $X \otimes X$, interprété comme ~~être~~ étant la tensorisation par un élément bien déterminé $s(X)$ de $\pi_1(C) = \mathrm{Aut}(1_C)$, on trouve une ~~application~~ homomorphisme canonique

$$s(C)=s:\ \pi_0 \to {}_2(\pi_1) \quad ,$$

où ${}_2(\pi_1)$ désigne le sous-groupe des éléments x de π_1 tels que $2x=0$. Le résultat principal de la théorie de structure des catégories de Picard peut s'énoncer en disant que C est déterminée (à équivalence non canonique de catégories de Picard près) par la donnée des groupes commutatifs π_0 et π_1, et l'homomorphisme $s:\ \pi_0 \to {}_2(\pi_1)$. Dire que cet homomorphisme est nul signifie d'ailleurs que C est une catégorie de Picard <u>stricte</u>, et on retrouve le résultat de [ ] suivant lequel une catégorie de Picard stricte est déterminée (à équivalence près) par la connaissance de ses seuls invariants π_0 et π_1.

<u>Remarques</u>. La théorie de loc. cit. nous permet, plus précisément, d'interpréter la 2-catégorie des catégories de Picard strictes en termes de la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de (Ab) (cat. des groupes abéliens), formée des complexes $K^{\bullet}$ tels que $H^i(K^{\bullet})=0$ pour $i \neq 0,1$. Le résultat précédent, assez grossier, se réduit alors à la remarque qu'un objet de cette catégorie est déterminé à isomorphisme (non unique !) près par la connaissance de son H^0 ($=\pi_0$) et H^1 ($=\pi_1$). Il y aurait lieu de développer également pour les catégories de Picard non nécessairement strictes, et pour les (Gr)-catégories, une théorie de structure pour la 2-catégorie qu'ils forment. De plus, ces ~~résultats~~ développements encore dans les limbes, tout comme ceux que ~~nous avons effectivement~~ nous venons d'esquisser, devraient être un jour ~~étendus~~ étudiés dans le cadre des champs (en (Gr)-catégories, ou en catégories de Picard) tout comme dans Deligne [ ].

3. <u>Catégories de Picard enveloppantes</u>.

Soient C une ~~\otimes~~ $\otimes$-catégorie AUC (par exemple une catégorie avec objet final et admettant des produits cartésiens de deux éléments), S une partie de Ob C. On se pose le problème universel d'envoyer (par un $\otimes$-foncteur AUC) C dans une $\otimes$-catégorie AUC G, de telle façon que pour tout $X \in S$, $F(X)$ soit un objet <u>inversible</u> de G. Le résultat principal ici est que ce problème admet toujours une solution, qu'on pourra appeler la $\otimes$-catégorie AUC "de fractions" par rapport à l'ensemble S, et noter éventuellement $S^{-1}C$. On trouve en fait que pour toute G, le foncteur naturel

42

5

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\otimes AUC}(S^{-1}C,G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{S}_{\otimes AUC}(C,G)$$

(où l'exposant S dans le deuxième membre dénote la sous-catégorie pleine formée des $\otimes$-foncteurs AUC $F: C \to G$ tels que $F(X)$ soit inversible pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, S$) est un isomorphisme de catégories.

Nous n'explicitons pas ici la construction, assez naturelle, mais dont l'explicitation pas à pas, ~~et~~ avec la vérification de toutes les compatibilités voulues, est fort longue et fastidieuse. Signalons seulement ici que lorsque S est l'ensemble de tous les objets de C, $S^{-1}C$ est elle-même une catégorie de Picard (pas nécessairement stricte), qu'on pourra appeler la "catégorie de Picard enveloppante" de C. C'est sans doute le cas le plus important. Les invariants π_0 et π_1 ~~de~~ de cette catégorie enveloppante méritent la notation $K^0(C)$ et $K^1(C)$ respectivement. Par exemple, lorsque C est la catégorie des modules projectifs de type fini sur un anneau A, avec l'opération de somme, ~~on peut démontrer que ces~~ groupes ne sont autres que les classiques invariants $K^0(A)$ et $K^1(A)$ étudiés par Grothendieck et par Whitehead-Bass. Le même résultat est sans doute valable pour toute catégorie additive C (munie de ~~la~~ l'opération somme), Cela donne une interprétation remarquable des invariants K^0 et K^1 en termes d'une "catégorie stabilisée" (de la catégorie additive C), laquelle est une catégorie de Picard. Signalons seulement que, cette catégorie stabilisée (même dans le cas particulier des modules projectifs de type fini sur l'anneau A) n'étant pratiquement jamais une catégorie de Picard stricte, ces considérations semblent rendre peu probable qu'on arrive à construire un objet canonique dans la catégorie dérivée de la catégorie (Ab), qui soit un complexe de chaines satisfaisant $H_0(K.)=K^0$, $H_1(K.)=K^1$ – puisqu'une telle construction (grâce à la théorie de Deligne) nous fournirait précisément une catégorie de Picard stricte canonique dont les invariants seraient K^0 et K^1.

On peut difficilement échapper à la question d'une interpétation géométrique analogue des invariants K^i supérieurs. Il y a tout lieu de croire qu'une telle interprétation est à chercher dans la théorie des n-catégories de Picard (en un sens convenable) et la construction des n-catégories de Picard enveloppantes d'une $\otimes$-catégorie AUC (ou d'une $\otimes$-n-catégorie AUC) arbitraire C, dont les invariants "homotopiques" π_i seraient les K^i cherchés. De tels développements obligerai-

~~Comme autre direction de recherche ouverte, suggérée par les résultats esquissés ici, signalons la construction d'une $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie AU (sans donnée de commutativité néces-~~

43

ent sans doute à tirer au clair les relations très étroites qu'on pressent entre les notions de n-catégorie (et de ∞-catégorie) d'une part, celle d'ensemble simplicial (ou d'espace topologique ...) d'autre part, tout comme la relation entre n-Gr-catégories (et ∞-Gr-catégories) et groupes simpliciaux (ou groupes topologiques), enfin entre n-catégories de Picard strictes et complexes de chaines tronqués à la dimension n. Il y aurait à s'attendre à une fusion plus ou moins complète entre ces trois visions: algèbre homologique, algèbre homotopique, algèbre catégorique, dans une vision commune (qui pourrait bien prendre le nom d'"algèbre homologique non commutative", étant entendu que ce qui porte actuellement ce nom n'est qu'une amorce très partielle de ce qui ~~reste à~~ doit venir ...)

Comme dernière question, plus terre à terre, signalons celle liée à la remarque ~~que~~ suivante. (lorsque C est la catégorie des modules projectifs de type fini sur un anneau A commutatif (ou plus généralement une catégorie additive munie d'une opération ⊗ ACU biadditive), alors la catégorie de Picard enveloppante, en plus de sa loi de composition évidente de "somme" (notée ici ⊕) donnée par sa définition même, est munie d'une opération ⊗ provenant de l'opération de produit tensoriel ordinaire des modules, qui en fait également une ⊗-catégorie ACU (mais évidemment pas une (Gr)-catégorie), liée par des isomorphismes de distributivité évidents à l'opération ⊕ . Il y aurait lieu d'étudier systématiquement les catégories A ainsi munies de deux opérations ⊕ et ⊗ , toutes deux AUC (des données supplémentaires), avec une donnée de distributivité

$$X\otimes(Y\oplus Z) \simeq X\otimes Y \oplus X\otimes Z$$

et des compatibilités convenables pour celle-ci; et de tenter de faire une théorie de structure pour de telles catégories qui sont de Picard pour la structure ⊕ . Cela implique en particulier que $\pi_0(A)$ est un anneau unitaire commutatif, et $\pi_1(A)$ un module sous ce dernier. Quels autres invariants faut-il introduire pour caractériser A à équivalence près respectant toutes les structures ?

44

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France