On vérifie aussitôt que τ' est un $\otimes$-morphisme puisque τ en est un et puisque

$$E'A = EA \ , \ F'A = FA \ , \ \breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B} \ , \ \breve{F}'_{A,B} = \breve{F}_{A,B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (For. (11)). Enfin par la définition de τ', nous avons

$$\tau'_{\underline{1}_P} = \tau'_{TA'_0} = \tau_{TA'_0} = \nu^{-1}_{A'_0}\,\mu_{A'_0} .$$

la dernière égalité étant le résultat de la commutativité du diagramme (16). On en conclut que τ' est unifère en appliquant (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 4).

§2. Le problème d'inversion des objets

1. Construction de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie ACU.

Dans tout ce n°, $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, $\underline{C}'$ une $\otimes$ catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a', c', (\underline{1}', g', d'))$ et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(F, \breve{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un $\otimes$-foncteur ACU. On se propose de chercher une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{P}$ ayant les propriétés suivantes ;

$$\begin{tikzcd} \underline{Q} & \underline{C} \arrow[l, "\mathcal{E}"'] \arrow[r, "\mathcal{D}"] & \underline{P} \arrow[ll, bend right, "E"'] \\ & \underline{C}' \arrow[u, "F"] & \end{tikzcd}$$

1° $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.

2° Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \breve{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme près) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}}) \simeq (E', \breve{E}') \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$.

Pour la construction de la solution du problème, nous avons besoin des Lemmes suivants

Lemme 1.– Les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$ et $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C}',\underline{Q})$ sont équivalentes, $\underline{Q}$ étant une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d))$.

Démonstration.– D'abord remarquons que $\underline{C}\times\underline{C}'$ est une $\otimes$-catégorie ACU dont la loi $\otimes$ et les contraintes viennent des $\otimes$-catégories ACU $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ de façon naturelle, i.e. nous avons

$$(X,X')\otimes(Y,Y') = (X\otimes Y, X'\otimes Y') \qquad X,Y\in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ X',Y'\in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$$

$$(u,u')\otimes(v,v') = (u\otimes v, u'\otimes v') \qquad u,v\in \mathrm{Fl}\,\underline{C},\ u',v'\in \mathrm{Fl}\,\underline{C}'$$

contrainte d'associativité : (a,a')

contrainte de commutativité : (c,c')

contrainte d'unité : $((1,1'),(g,g'),(d,d'))$

ce qui nous permet de parler de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$. Ensuite considérons le $\otimes$-foncteur $(i,\breve{i})$ de $\underline{C}$ dans $\underline{C}\times\underline{C}'$ défini de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "u"'] & iX = (X, 1') \arrow[d, "iu = (u,\, id_{1'})"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & iY = (Y, 1') \end{tikzcd}$$

$$\breve{i}_{X,Y} = (id_{X\otimes Y}, d'^{-1})$$

On vérifie aussitôt que $(i,\breve{i})$ est un $\otimes$-foncteur ACU. On définit de la même manière le $\otimes$-foncteur $(i',\breve{i}') : \underline{C}' \to \underline{C}\times\underline{C}'$.

Cela étant, construisons un foncteur L de la manière suivante

$$L : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C}',\underline{Q})$$

$$L(E,\breve{E}) = ((Ei, \breve{E}\breve{i}), (Ei', \breve{E}\breve{i}')) \quad , (E,\breve{E}) \in \mathrm{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$$

$$L(\tau) = (\tau i, \tau i') \quad , \ \tau = \otimes\text{-morphisme unifère} : (E,\breve{E}) \to (F,\breve{F})$$

et un foncteur M comme ci-dessous

$$M : \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}', \underline{Q}) \longrightarrow \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}\times\underline{C}', \underline{Q})$$

$$M((\mathcal{C}, \breve{\mathcal{C}}), (\mathcal{C}', \breve{\mathcal{C}}')) = (\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', \mathcal{C}\,\breve{\otimes}\,\mathcal{C}'),$$

$$((\mathcal{C}, \breve{\mathcal{C}}), (\mathcal{C}', \breve{\mathcal{C}}')) \in \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}', \underline{Q})$$

$$M(f, f') = f\otimes f', \quad f = \otimes\text{-morphisme unifère} : (\mathcal{C}, \breve{\mathcal{C}}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}})$$

$$f' = \otimes\text{-morphisme unifère} : (\mathcal{C}', \breve{\mathcal{C}}') \longrightarrow (\mathcal{F}', \breve{\mathcal{F}}')$$

où $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(X, X') = \mathcal{C}X\otimes\mathcal{C}'X'$, $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(f, f') = \mathcal{C}f\otimes\mathcal{C}'f'$, $(f, f') : (X, X') \to (Y, Y')$

et $\mathcal{C}\,\breve{\otimes}\,\mathcal{C}'$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(X,X')\otimes(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(Y,Y') = (\mathcal{C}X\otimes\mathcal{C}'X')\otimes(\mathcal{C}Y\otimes\mathcal{C}'Y') \arrow[rr, "a"] \arrow[dd, "\mathcal{C}\breve{\otimes}\mathcal{C}'"'] & & ((\mathcal{C}X\otimes\mathcal{C}'X')\otimes\mathcal{C}Y)\otimes\mathcal{C}'Y' \\
 & & (\mathcal{C}X\otimes(\mathcal{C}'X'\otimes\mathcal{C}Y))\otimes\mathcal{C}'Y' \arrow[u, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes c)\otimes id"] \\
(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')((X,X')\otimes(Y,Y')) \arrow[d, equal] & & (\mathcal{C}X\otimes(\mathcal{C}Y\otimes\mathcal{C}'X'))\otimes\mathcal{C}'Y' \arrow[d, "a\otimes id"] \\
\mathcal{C}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{C}'(X'\otimes Y') & (\mathcal{C}X\otimes\mathcal{C}Y)\otimes(\mathcal{C}'X'\otimes\mathcal{C}'Y') \arrow[l, "\breve{\mathcal{C}}\otimes\breve{\mathcal{C}}'"'] \arrow[r, "a"] & ((\mathcal{C}X\otimes\mathcal{C}Y)\otimes\mathcal{C}'X')\otimes\mathcal{C}'Y'
\end{tikzcd}$$

$f\otimes f'$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(X,X') \arrow[r, "(f\otimes f')_{(X,X')}"] \arrow[d, equal] & (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')(X,X') \arrow[d, equal] \\
\mathcal{C}X\otimes\mathcal{C}'X' \arrow[r, "f_X\otimes f'_{X'}"] & \mathcal{F}X\otimes\mathcal{F}'X'
\end{tikzcd}$$

Prouvons d'abord que L est un foncteur. Les $\otimes$-foncteurs $(Ei, \breve{E}i)$, $(Ei', \breve{E}i')$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité puisque $(E, \breve{E})$, $(i, \breve{i})$, $(i', \breve{i}')$ le sont (Chap. I, §4, n°2, Prop. 1, 2 et 3).

D'où

$$L(E, \breve{E}) = ((Ei, \breve{E}i), (Ei', \breve{E}i')) \in \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}', \underline{Q})$$

On a aussi

$$L(\tau) = (\tau i, \tau i') \in Fl\big(\underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}', \underline{Q})\big)$$

puisque d'abord τi, $\tau i'$ sont des $\otimes$-morphismes (Chap. I, §4, n°1) et ensuite

$$\tau i_{\underline{1}} = \tau_{i\underline{1}} = \tau_{(\underline{1},\underline{1}')}$$

$$\tau i'_{\underline{1}'} = \tau_{i'\underline{1}'} = \tau_{(\underline{1},\underline{1}')}$$

ce qui montre que $\tau i_{\underline{1}}$ et $\tau i'_{\underline{1}'}$ sont des isomorphismes (τ est unifère) et par suite τi et $\tau i'$ unifères (Chap. I, §4, n°2, Prop. 4). Enfin la définition de $L(\tau)$ nous donne

$$L(s\tau) = L(s)L(\tau) \quad , \quad L(id) = id$$

Donc L est un foncteur. Montrons maintenant que M est un foncteur. Il est clair que $(\varphi\otimes\varphi', \varphi\breve{\otimes}\varphi')$ est un $\otimes$-foncteur. Sa compatibilité avec les contraintes de commutativité vient de la considération du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\varphi(X\otimes Y)\otimes\varphi'(X'\otimes Y') \arrow[d, "\varphi c\otimes\varphi' c'"'] \arrow[rrrr, phantom, bend left=60, "\mathrm{(I)}"] & & (\varphi X\otimes\varphi Y)\otimes(\varphi' X'\otimes\varphi' Y') \arrow[ll, "\check{\varphi}\otimes\check{\varphi}'"'] \arrow[d, "c\otimes c"] \arrow[dll, phantom, "\mathrm{(II)}"] & & (\varphi X\otimes\varphi' X')\otimes(\varphi Y\otimes\varphi' Y') \arrow[ll, dashed] \arrow[d, "c"] \arrow[llll, bend right=30, "\varphi\breve{\otimes}\varphi'"'] \arrow[dll, phantom, "\mathrm{(III)}"] \\
\varphi(Y\otimes X)\otimes\varphi'(Y'\otimes X') & & (\varphi Y\otimes\varphi X)\otimes(\varphi' Y'\otimes\varphi' X') \arrow[ll, "\check{\varphi}\otimes\check{\varphi}'"'] & & (\varphi Y\otimes\varphi' Y')\otimes(\varphi X\otimes\varphi' X') \arrow[ll, dashed] \arrow[llll, bend left=30, "\varphi\breve{\otimes}\varphi'", "\mathrm{(IV)}"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la définition de $\varphi\breve{\otimes}\varphi'$; celle de (II) de la compatibilité de $(\varphi, \check{\varphi})$, $(\varphi', \check{\varphi}')$ avec les contraintes de commutativité ; celle de (III) de (Chap. I, §3, n°1, Prop. 7) ; d'où la commutativité du circuit extérieur. Pour la compatibilité de $(\varphi\otimes\varphi', \varphi\breve{\otimes}\varphi')$ avec les contraintes d'associativité, considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
X,X')\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')((Y,Y')\otimes(Z,Z')) \arrow[d, equal] & & (\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')(X,X')\otimes((\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')(Y,Y')\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')(Z,Z')) \arrow[ll, "id\otimes\widetilde{(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')}"'] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{II})"] \\
X')\otimes(\mathcal{Y}(Y\otimes Z)\otimes\mathcal{Y}'(Y'\otimes Z')) \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\mathcal{Y}X\otimes\mathcal{Y}'X')\otimes((\mathcal{Y}Y\otimes\mathcal{Y}Z)\otimes(\mathcal{Y}'Y'\otimes\mathcal{Y}'Z')) \arrow[l, "(id\otimes id)\otimes(\breve{\mathcal{Y}}\otimes\breve{\mathcal{Y}}')"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & (\mathcal{Y}X\otimes\mathcal{Y}'X')\otimes((\mathcal{Y}Y\otimes\mathcal{Y}'Y')\otimes(\mathcal{Y}Z\otimes\mathcal{Y}'Z')) \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \\
(Y\otimes Z))\otimes(\mathcal{Y}'X'\otimes\mathcal{Y}'(Y'\otimes Z')) & (\mathcal{Y}X\otimes(\mathcal{Y}Y\otimes\mathcal{Y}Z))\otimes(\mathcal{Y}'X'\otimes(\mathcal{Y}'Y'\otimes\mathcal{Y}'Z')) \arrow[l, "(id\otimes\breve{\mathcal{Y}})\otimes(id\otimes\breve{\mathcal{Y}}')"'] \arrow[d, "a\otimes a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{Y}X\otimes\mathcal{Y}'X')\otimes((\mathcal{Y}Y\otimes\mathcal{Y}'Y')\otimes(\mathcal{Y}Z\otimes\mathcal{Y}'Z')) \arrow[l, dashed] \arrow[d, "a"] \\
\otimes\mathcal{Y}Z)\otimes(\mathcal{Y}'(X'\otimes Y')\otimes\mathcal{Y}'Z') \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & ((\mathcal{Y}X\otimes\mathcal{Y}Y)\otimes\mathcal{Y}Z)\otimes((\mathcal{Y}'X'\otimes\mathcal{Y}'Y')\otimes\mathcal{Y}'Z') \arrow[l, "(\breve{\mathcal{Y}}\otimes id)\otimes(\breve{\mathcal{Y}}'\otimes id)"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & ((\mathcal{Y}X\otimes\mathcal{Y}'X')\otimes(\mathcal{Y}Y\otimes\mathcal{Y}'Y'))\otimes(\mathcal{Y}Z\otimes\mathcal{Y}'Z') \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \\
)\otimes\mathcal{Y}'(X'\otimes Y'))\otimes(\mathcal{Y}Z\otimes\mathcal{Y}'Z') \arrow[d, equal] & ((\mathcal{Y}X\otimes\mathcal{Y}Y)\otimes(\mathcal{Y}'X'\otimes\mathcal{Y}'Y'))\otimes(\mathcal{Y}Z\otimes\mathcal{Y}'Z') \arrow[l, "(\breve{\mathcal{Y}}\otimes\breve{\mathcal{Y}}')\otimes(id\otimes id)"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XII})"] & ((\mathcal{Y}X\otimes\mathcal{Y}'X')\otimes(\mathcal{Y}Y\otimes\mathcal{Y}'Y'))\otimes(\mathcal{Y}Z\otimes\mathcal{Y}'Z') \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \\
(X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')(Z,Z') & & ((\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')(X,X')\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')(Y,Y'))\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')(Z,Z') \arrow[ll, "\widetilde{(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}')}\otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\psi\otimes\psi')((X,X')\otimes((Y,Y')\otimes(Z,Z'))) \arrow[d, equal] & & (\psi\otimes\psi')(X,X')\otimes(\psi\otimes\psi')((Y,Y')\otimes(Z,Z')) \arrow[ll, "\widetilde{\psi\otimes\psi'}"'] \arrow[d, equal] \\
\psi(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes\psi'(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(I)}"] & (\psi X\otimes\psi(Y\otimes Z))\otimes(\psi'X'\otimes\psi'(Y'\otimes Z')) \arrow[l, "\tilde\psi\otimes\tilde\psi'"'] \arrow[r, dashed] & (\psi X\otimes\psi'X')\otimes(\psi(Y\otimes Z)\otimes\psi'(Y'\otimes Z')) \arrow[d, dashed] \\
\psi(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes\psi'(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[d, "\psi a\otimes\psi' a'"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(III)}"] & & (\psi X\otimes\psi(Y\otimes Z))\otimes(\psi'X'\otimes\psi'(Y'\otimes Z')) \arrow[ll, "\tilde\psi\otimes\tilde\psi'"'] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(II)}"] \\
\psi((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes\psi'((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, equal] & & (\psi(X\otimes Y)\otimes\psi Z)\otimes(\psi'(X'\otimes Y')\otimes\psi'Z') \arrow[ll, "\tilde\psi\otimes\tilde\psi'"'] \arrow[d, dashed] \\
\psi((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes\psi'((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & (\psi(X\otimes Y)\otimes\psi Z)\otimes(\psi'(X'\otimes Y')\otimes\psi'Z') \arrow[l, "\tilde\psi\otimes\tilde\psi'"'] \arrow[r, dashed] & (\psi(X\otimes Y)\otimes\psi'(X'\otimes Y'))\otimes(\psi Z\otimes\psi'Z') \arrow[d, equal] \\
(\psi\otimes\psi')(((X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(Z,Z')) \arrow[r, phantom, "\mathrm{(XI)}"] & & (\psi\otimes\psi')((X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(\psi\otimes\psi')(Z,Z') \arrow[ll, "\widetilde{\psi\otimes\psi'}"']
\end{tikzcd}
$$

où les régions (I), (II), (XI), (XII) sont commutatives par la définition de $\widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}$; (III), (VIII) par évidence ; (IV), (IX) par la naturalité de a et c ; (V), (VII), (X) par (Chap. I, §3, n° 1, Prop. 7) ; enfin (VI) par la compatibilité de $(\mathcal{C},\check{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{C}',\check{\mathcal{C}}')$ avec les contraintes d'associativité. On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui montre que $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', \widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'})$ est compatible avec les contraintes d'associativité. Enfin $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', \widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'})$ est compatible avec les contraintes d'unité en remarquant que

$$(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(\underline{1},\underline{1}') = \mathcal{C}\underline{1}\otimes\mathcal{C}'\underline{1}' \overset{\hat{\mathcal{C}}\otimes\hat{\mathcal{C}}'}{\simeq} \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \overset{d}{\simeq} \underline{1}_{\underline{Q}}$$

i.e. $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(\underline{1},\underline{1}')$ est régulier, et en appliquant (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 8). Tout cela nous permet de conclure que

$$M((\mathcal{C},\check{\mathcal{C}}),(\mathcal{C}',\check{\mathcal{C}}')) = (\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', \widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}) \in \mathrm{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}', \underline{Q})$$

Il est immédiat que $M(\rho,\rho') = \rho\otimes\rho'$ est un $\otimes$-morphisme unifère quand ρ,ρ' le sont, et

$$M(\tau\rho,\ \tau'\rho') = M(\tau,\tau')\,M(\rho,\rho')$$

$$M(id, id) = id$$

Par conséquent M est un foncteur.

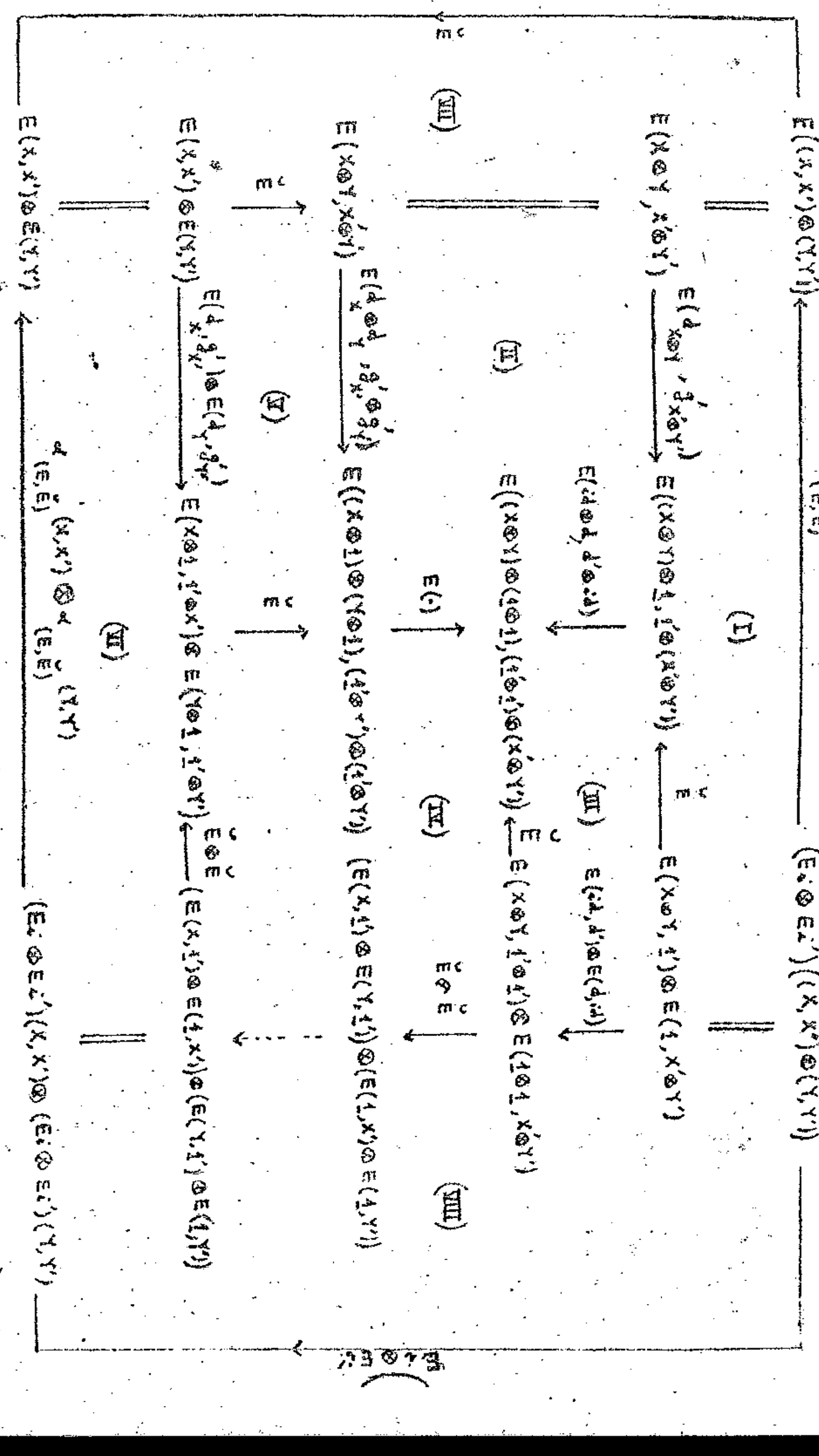
En vertu de la définition des foncteurs L, M nous avons

$$ML(E,\check{E}) = (Ei\otimes Ei',\ \widecheck{Ei\otimes Ei'})$$

Pour tout couple $(X,X') \in Ob(\underline{C}\times\underline{C}')$, définissons $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
ML(E,\check{E})(X,X') \arrow[rr, "\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')"] \arrow[d, equal] & & (E,\check{E})(X,X') \arrow[d, equal] \\
E(X,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{E}"] & E(X\otimes\underline{1},\ \underline{1}'\otimes X') & E(X,X') \arrow[l, "E(d_X,\ g'_{X'})"']
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$ est un isomorphisme pour tout couple (X,X') comme étant le composé de deux isomorphismes. Prouvons que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est un $\otimes$-morphisme unifère. $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$ est bien fonctoriel en X, X' comme étant le composé ~~dans~~ deux flèches qui sont fonctorielles en X, X'. Ensuite considérons le diagramme



où la flèche $E(\cdot)$ est définie par le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
E((X\otimes \underline{1})\otimes(Y\otimes\underline{1}),(\underline{1}'\otimes X')\otimes(\underline{1}'\otimes Y')) \arrow[r, "{E(a,a')}"] \arrow[d, "E(\cdot)"'] & E(((X\otimes\underline{1})\otimes Y)\otimes\underline{1},((\underline{1}'\otimes X')\otimes\underline{1}')\otimes Y') \\
E((X\otimes Y)\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}),(\underline{1}'\otimes\underline{1}')\otimes(X'\otimes Y')) \arrow[d, "{E(a,a')}"'] & E((X\otimes(\underline{1}\otimes Y))\otimes\underline{1},(\underline{1}'\otimes(X'\otimes\underline{1}'))\otimes Y') \arrow[u, "{E(a\otimes id,\, a'\otimes id)}"'] \arrow[d, "{E((id\otimes c)\otimes id,\, (id\otimes c')\otimes id)}"] \\
E(((X\otimes Y)\otimes\underline{1})\otimes\underline{1},((\underline{1}'\otimes\underline{1}')\otimes X')\otimes Y') & E((X\otimes(Y\otimes\underline{1}))\otimes\underline{1},(\underline{1}'\otimes(\underline{1}'\otimes X'))\otimes Y') \arrow[l, "{E(a\otimes id,\, a'\otimes id)}"']
\end{tikzcd}
$$

i.e la flèche $\cdot$ est le composé des flèches construites à l'aide des contraintes d'associativité (a,a'), de commutativité (c,c'), des identités et de la loi $\otimes$ dans $\underline{C}\times\underline{C}'$.

Les régions (I), (VI) du diagramme considéré sont commutatives par la définition de $\alpha_{(E,\check{E})}$; (II) par (Chap. I, §3, n°4, Prop. 28) ; (III), (V) par la naturalité de $\check{E}$; (IV) par (Chap. I, §4, n°2, Prop. 11) ; (VII) par évidence ; (VIII) par la définition de $\overset{\smile}{E_i\otimes E_i'}$. On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui exprime que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est un $\otimes$-morphisme. Le fait que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est unifère résulte de (Chap. I, §4, n°2, Cor. de la Prop. 4). De plus, $\alpha_{(E,\check{E})}$ est fonctoriel en $(E,\check{E})$, i.e pour tout $\otimes$-morphisme unifère $\varepsilon : (E,\check{E}) \to (F,\check{F})$, le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
(E_i\otimes E_i',\ \overset{\smile}{E_i\otimes E_i'}) \arrow[r, "\alpha_{(E,\check{E})}"] \arrow[d, "\varepsilon_i\otimes\varepsilon_i'"'] & (E,\check{E}) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
(F_i\otimes F_i',\ \overset{\smile}{F_i\otimes F_i'}) \arrow[r, "\alpha_{(F,\check{F})}"] & (F,\check{F})
\end{tikzcd}
$$

est commutatif. En effet, considérons le diagramme ci-dessous dont les régions (I), (IV) sont commutatives par la définition de $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$, $\alpha_{(F,\check{F})}(X,X')$; (II), (III) en vertu du fait que ε est un $\otimes$-morphisme.

$$\begin{tikzcd}
E(X,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "\tau_{(X,\underline{1}')}\otimes\tau_{(\underline{1},X')}"'] \arrow[rr, bend left=50, "\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\mathrm{(I)}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & E(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') \arrow[d, "\tau_{(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X')}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & E(X,X') \arrow[l, "E(d_X,g'_{X'})"'] \arrow[d, "\tau_{(X,X')}"] \\
F(X,\underline{1}')\otimes F(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{F}"'] \arrow[rr, bend right=50, "\alpha_{(F,\check{F})}(X,X')"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\mathrm{(IV)}"] & F(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') & F(X,X') \arrow[l, "F(d_X,g'_{X'})"]
\end{tikzcd}$$

Par conséquent on obtient la commutativité du circuit extérieur. Nous avons ainsi trouvé un isomorphisme de foncteurs

$$\alpha : ML \xrightarrow{\sim} id_{\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})}$$

Toujours partant de la définition des foncteurs L, M, nous obtenons

$$LM((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}')) = (((\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i, (\overset{\smile}{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'})i), ((\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i', (\overset{\smile}{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'})i'))$$

Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, définissons $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}(X)$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i(X) \arrow[rr, "\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}(X)"] \arrow[d, equal] & & \mathcal{G}X \arrow[d, "d_{\mathcal{G}X}"] \\
(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')(X,\underline{1}') = \mathcal{G}X\otimes\mathcal{G}'\underline{1}' & & \mathcal{G}X\otimes 1_{\underline{Q}} \arrow[ll, "id\otimes\hat{\mathcal{G}}'"']
\end{tikzcd}$$

$\hat{\mathcal{G}}'$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}')$ avec les unités. Il est clair que $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}(X)$ est un isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$. Prouvons que $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ est un $\otimes$-morphisme unifère. D'abord ~~on~~ voit aussitôt que $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}(X)$ est fonctoriel en X. Pour montrer que $\beta_{((\mathcal{F},\breve{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\breve{\mathcal{F}}'))}$ est un $\otimes$-morphisme nous considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}Y \arrow[rrr, "\breve{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "d \otimes d"'] & & & \mathcal{F}(X\otimes Y) \arrow[d, "d"] \\
(\mathcal{F}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \otimes (\mathcal{F}Y \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(id \otimes \hat{\mathcal{F}}') \otimes (id \otimes \hat{\mathcal{F}}')"'] & (\mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}Y) \otimes (\underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[rr, "\breve{\mathcal{F}} \otimes d"] \arrow[d, "(id \otimes id) \otimes (\hat{\mathcal{F}}' \otimes \hat{\mathcal{F}}')"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{I})"] & & \mathcal{F}(X\otimes Y) \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "id \otimes \hat{\mathcal{F}}'"] \\
(\mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}'\underline{1}') \otimes (\mathcal{F}Y \otimes \mathcal{F}'\underline{1}') \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}Y) \otimes (\mathcal{F}'\underline{1}' \otimes \mathcal{F}'\underline{1}') \arrow[r, "\breve{\mathcal{F}} \otimes \breve{\mathcal{F}}'"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{F}(X\otimes Y) \otimes \mathcal{F}'(\underline{1}' \otimes \underline{1}') \arrow[r, "id \otimes \breve{d}'"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{III})"] & \mathcal{F}(X\otimes Y) \otimes \mathcal{F}'\underline{1}' \arrow[d, equal] \\
(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i(X) \otimes (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i(Y) \arrow[rrr, "\breve{(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i}"] & & & (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i(X\otimes Y)
\end{tikzcd}
$$

dans lequel les régions (I), (III) sont commutatives en vertu de (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 11) ; (II) en vertu de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité ; (IV) en vertu de la définition de $\widetilde{(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i}$. On en conclut la commutativité du circuit extérieur, ce qui prouve que $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ est un $\otimes$-morphisme. β est en plus un isomorphisme, ce qui implique $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ unifère (Chap. I, §4, n°2, Cor. de la Prop. 4). Le fait que $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ est fonctoriel en $((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))$, i.e pour tout $\otimes$-morphisme unifère $f:(\mathcal{G},\check{\mathcal{G}})\to(\mathcal{F},\check{\mathcal{F}})$ et tout $\otimes$-morphisme unifère $f':(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}')\to(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}')$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
((\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i,\ \widetilde{(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i}) \arrow[r, "\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}"] \arrow[d, "(f\otimes f')i"'] & (\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}) \arrow[d, "f"] \\
((\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i,\ \widetilde{(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i}) \arrow[r, "\beta_{((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}'))}"] & (\mathcal{F},\check{\mathcal{F}})
\end{tikzcd}$$

est commutatif, résulte de la considération du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}X \arrow[r, "d_{\mathcal{G}X}"] \arrow[d, "f_X"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathcal{G}X\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\hat{\mathcal{G}}'"] \arrow[d, "f_X\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathcal{G}X\otimes\mathcal{G}'\underline{1}' \arrow[d, "f_X\otimes f'_{\underline{1}'}"] \\
\mathcal{F}X \arrow[r, "d_{\mathcal{F}X}"] & \mathcal{F}X\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\hat{\mathcal{F}}'"] & \mathcal{F}X\otimes\mathcal{F}'\underline{1}'
\end{tikzcd}$$

dont la région (I) est commutative en vertu de la naturalité de d ; la région (II) du fait que f' est unifère. D'où la commutativité du circuit extérieur.

De la même manière, nous définissons $\beta'_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i'X' \arrow[r, "\beta'_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}(X')"] \arrow[d, equal] & \mathcal{G}'X' \arrow[d, "g_{\mathcal{G}'X'}"] \\
(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')(\underline{1},X') = \mathcal{G}\underline{1}\otimes\mathcal{G}'X' & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\mathcal{G}'X' \arrow[l, "\hat{\mathcal{G}}\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd} \qquad X'\in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$$

et nous démontrons que $\beta'_{((\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}'))}(X')$ est un $\otimes$-isomorphisme, et $\beta'_{((\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}'))}$ est fonctoriel en $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')$. Ces démonstrations faites (elles sont analogues à celles de β), nous pouvons écrire

$$(\beta;\beta') : LM \xrightarrow{\ \sim\ } id_{\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}',\underline{Q})}$$

Donc les foncteurs L, M sont des équivalences qu'on appelle les <u>équivalences canoniques</u> entre $\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$ et $\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}',\underline{Q})$. Le lemme 1 est ainsi démontré.

<u>Lemme 2</u>. — Soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (1_{\underline{Q}}, g, d))$ et $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$, tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$. Alors il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(\eta,\check{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$ et un isomorphisme de foncteurs μ tels que

(1) $$\mu_{X'} : \mathcal{E}FX' \otimes \eta X' \xrightarrow{\sim} 1_{\underline{Q}}$$

pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$.

<u>Démonstration</u>. — Puisque $\mathcal{E}FX'$ est inversible dans $\underline{Q}$, il existe un objet et un isomorphisme notés respectivement par $\eta X'$ et $\mu_{X'}$ dans $\underline{Q}$ tels qu'on ait la relation (1). Pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$ choisissons $\eta X'$, $\mu X'$ vérifiant (1). Soit $u' : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ une flèche de $\underline{C}'$ (rappelons-nous que la catégorie sous-jacente de $\underline{C}'$ est un groupoïde), alors il existe une flèche et une seule notée $\eta u'$, $\eta u' : \eta X' \to \eta Y'$ (Chap. I, §3, n°5, Prop. 35) rendant commutatif le diagramme

(2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[dr, "\mathcal{E}Fu'\otimes id"'] & 1_{\underline{Q}} & \mathcal{E}FY'\otimes\eta Y' \arrow[l] \\
& \mathcal{E}FY'\otimes\eta X' \arrow[ur, "id\otimes\eta u'"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus nous définissons pour tout couple (X', Y'), $X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, l'isomorphisme

$$\check{\eta}_{X',Y'} : \eta X' \otimes \eta Y' \xrightarrow{\sim} \eta(X'\otimes Y')$$

par le diagramme commutatif

$$(3)\qquad \begin{tikzcd}
\mathcal{E}F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "\mu_{X'\otimes Y'}"] & 1_{\underline{Q}} \arrow[r, "d"] & 1_{\underline{Q}}\otimes 1_{\underline{Q}} \\
\mathcal{E}F(X'\otimes Y')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "id\otimes\check{\eta}"] & (\mathcal{E}FX'\otimes\mathcal{E}FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[l, "\check{\mathcal{E}}F\otimes id"'] \arrow[r, dashed] & (\mathcal{E}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathcal{E}FY'\otimes\eta Y') \arrow[u, "\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'}"']
\end{tikzcd}$$

ce qu'on peut toujours réaliser puisque $\mathcal{E}F(X'\otimes Y')$ est inversible, donc régulier.

Nous allons montrer que $(\eta, \check{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$ est un $\otimes$-foncteur ACU et μ un isomorphisme de foncteurs. D'abord η est un foncteur en vertu de (Chap. I, § 3, n° 5, Prop. 35). Pour démontrer que $\check{\eta}_{X',Y'}$ est fonctoriel en X', Y', nous démontrons qu'il est fonctoriel en une variable, par exemple X', la démonstration pour l'autre variable étant analogue. Considérons donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}FX'\otimes\mathcal{E}FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}}F\otimes\check{\eta}"] \arrow[d, "(\mathcal{E}Fu'\otimes id)\otimes(\eta u'\otimes id)"'] & \mathcal{E}F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}F(u'\otimes id)\otimes\eta(u'\otimes id)"] \\
(\mathcal{E}FX'_1\otimes\mathcal{E}FY')\otimes(\eta X'_1\otimes\eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}}F\otimes\check{\eta}"] & \mathcal{E}F(X'_1\otimes Y')\otimes\eta(X'_1\otimes Y')
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité résulte du fait que $\check{\mathcal{E}}F\otimes\check{\eta}$ est fonctoriel en X' (Diag. (2) et (3)). Or ce diagramme est le contour extérieur du diagramme suivant dans lequel la commutativité de la région (II) résulte de la fonctorialité de $\check{\mathcal{E}}F$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{Z}FX' \otimes \mathcal{Z}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{Z}F} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "(id \otimes id) \otimes (\eta u' \otimes id)"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathcal{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{Z}F(id \otimes id) \otimes \eta(u' \otimes id)"] \\
(\mathcal{Z}FX' \otimes \mathcal{Z}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{Z}F} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "(\mathcal{Z}Fu' \otimes id) \otimes (id \otimes id)"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathcal{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{Z}F(u' \otimes id) \otimes \eta(id \otimes id)"] \\
(\mathcal{Z}FX'_1 \otimes \mathcal{Z}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{Z}F} \otimes \check{\eta}"] & \mathcal{Z}F(X'_1 \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité de la région (I) qui, à son tour, est le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{Z}FX' \otimes \mathcal{Z}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{Z}F} \otimes id"] \arrow[d, "(id \otimes id) \otimes (\eta u' \otimes id)"'] & \mathcal{Z}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "\mathcal{Z}F(id \otimes id) \otimes (\eta u' \otimes id)"] & \mathcal{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{Z}F(id \otimes id) \otimes \eta(u' \otimes id)"] \\
(\mathcal{Z}FX' \otimes \mathcal{Z}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{Z}F} \otimes id"] & \mathcal{Z}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \check{\eta}"] & \mathcal{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

dont la région à gauche est manifestement commutative, ce qui implique la commutativité de la région à droite et par suite celle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\eta X' \otimes \eta Y' \arrow[r, "\check{\eta}"] \arrow[d, "\eta u' \otimes id"'] & \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\eta(u' \otimes id)"] \\
\eta X'_1 \otimes \eta Y' \arrow[r, "\check{\eta}"] & \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

puisque $\mathcal{Z}F(X' \otimes Y')$ est régulier. D'où la fonctorialité de $\check{\eta}$ en X'. Nous avons ainsi le $\otimes$-foncteur $(\eta, \check{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$.

Prouvons la compatibilité du $\otimes$-foncteur $(\eta, \check{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$ avec les contraintes de commutativité. Pour cela, considérons le diagramme ci-dessous dans lequel la commutativité des régions (I), (V) résulte de la définition de $\check{\eta}$ (Diag. (3)) ; celle de (II) de la fonctorialité de c et de la relation $c_{1_{\underline{Q}}, 1_{\underline{Q}}} = id$; celle de (III), (VII) découle de (Chap. I, §3, n° 1, Prop. 7) ; celle de (IV) vient de la compatibilité du $\otimes$-foncteur $(\mathcal{Z}F, \check{\mathcal{Z}F})$ avec les contraintes de commutativité ; celle de (V), (VI), (VIII) est évidente ; enfin celle du circuit extérieur est la définition de $\eta c'$ (Diag.(21)).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
1_Q \arrow[d, "\lambda"'] & & & & & \\
1_Q \otimes 1_Q \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\psi F X' \otimes \eta X') \otimes (\psi F Y' \otimes \eta Y') \arrow[l, "\mu_{X'} \otimes \mu_{Y'}"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, "c"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\psi F X' \otimes \psi F Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\psi F} \otimes id"] \arrow[d, "c \otimes id"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{III})"] & \psi F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "\psi F c' \otimes id"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \psi F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\psi F c' \otimes id"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{V})"] \arrow[ullll, bend right=15, "\mu_{X' \otimes Y'}"'] & \\
1_Q \otimes 1_Q \arrow[d, equal] & (\psi F Y' \otimes \eta Y') \otimes (\psi F X' \otimes \eta X') \arrow[l, "\mu_{Y'} \otimes \mu_{X'}"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (\psi F Y' \otimes \psi F X') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\psi F} \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes c"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "id \otimes c"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "id \otimes \eta c'"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{IX})"] & \\
1_Q \otimes 1_Q & (\psi F Y' \otimes \eta Y') \otimes (\psi F X' \otimes \eta X') \arrow[l, "\mu_{Y'} \otimes \mu_{X'}"'] \arrow[r, dashed] & (\psi F Y' \otimes \psi F X') \otimes (\eta Y' \otimes \eta X') \arrow[r, "\breve{\psi F} \otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{X})"] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes (\eta Y' \otimes \eta X') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes \eta(Y' \otimes X') \arrow[dllll, bend left=15, "\mu_{Y' \otimes X'}"] & \\
1_Q \arrow[u, "\lambda"] & & & & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité de la région (IX) qui, à facteur régulier près, exprime la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes de commutativité. Prouvons la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'associativité. Pour cela, considérons le diagramme

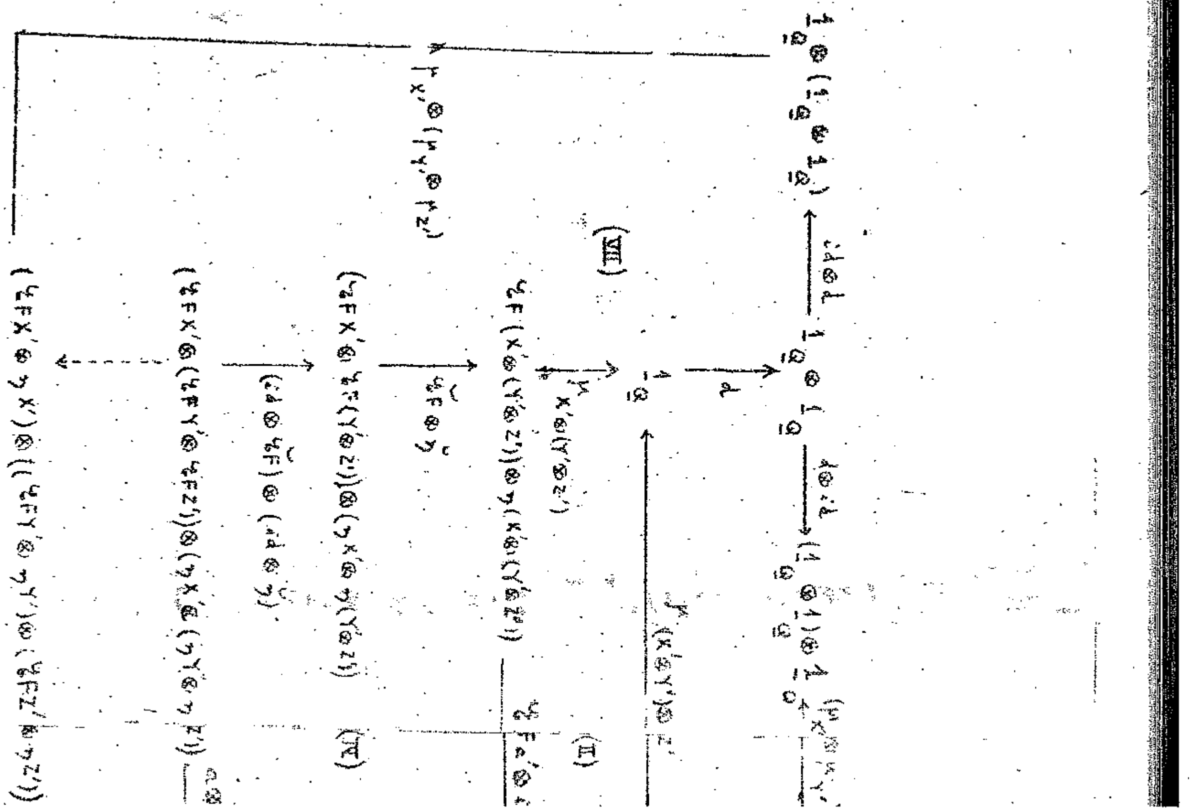
(4)

$$
\begin{tikzcd}
& \psi F(X'\otimes(Y'\otimes Z'))\otimes\eta(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[dl, "\mu_{X'\otimes(Y'\otimes Z')}"'] & \\
\mathbb{1}_Q \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\psi FX'\otimes\psi F(Y'\otimes Z'))\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[u, "\check{\psi F}\otimes\check{\eta}"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\psi FX'\otimes(\psi FY'\otimes\psi FZ'))\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "(id\otimes\check{\psi F})\otimes(id\otimes\check{\eta})"'] \arrow[d, dashed] \\
\mathbb{1}_Q\otimes\mathbb{1}_Q \arrow[d, "id\otimes d"] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\psi FX'\otimes\eta X')\otimes(\psi F(Y'\otimes Z')\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[l, "\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'\otimes Z'}"'] & (\psi FX'\otimes\eta X')\otimes((\psi FY'\otimes\psi FZ')\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "(id\otimes id)\otimes(\check{\psi F}\otimes\check{\eta})"'] \arrow[d, dashed] \\
\mathbb{1}_Q\otimes(\mathbb{1}_Q\otimes\mathbb{1}_Q) & & (\psi FX'\otimes\eta X')\otimes((\psi FY'\otimes\eta Y')\otimes(\psi FZ'\otimes\eta Z')) \arrow[ll, "\mu_{X'}\otimes(\mu_{Y'}\otimes\mu_{Z'})"']
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $\check{\eta}$ (Diag. (3)) et celle de la région (II) est donnée par la fonctorialité des contraintes a, c. On en déduit la commutativité du circuit extérieur. De la même manière, on démontre la commutativité du diagramme

$$(5)\quad \begin{tikzcd}
\zeta F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes \eta((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, "\mu_{(X'\otimes Y')\otimes Z'}"'] & (\zeta F(X'\otimes Y')\otimes \zeta Z')\otimes(\eta(X'\otimes Y')\otimes \eta Z') \arrow[l, "\check{\zeta F}\otimes\check{\eta}"'] \\
\underline{1}_{Q} \arrow[d, "d"'] & \\
\underline{1}_{Q}\otimes\underline{1}_{Q} \arrow[d, "d\otimes id"'] & \\
(\underline{1}_{Q}\otimes\underline{1}_{Q})\otimes\underline{1}_{Q} & \\
((\zeta FX'\otimes\eta X')\otimes(\zeta FY'\otimes\eta Y'))\otimes(\zeta FZ'\otimes\eta Z') \arrow[u, "(\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'})\otimes\mu_{Z'}"] & ((\zeta FX'\otimes\zeta FY')\otimes\zeta FZ')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, dashed] \arrow[uuuu, "(\check{\zeta F}\otimes id)\otimes(\check{\eta}\otimes id)"']
\end{tikzcd}$$

Cela étant, considérons le diagramme



$$
\begin{tikzcd}
\cdots\otimes \underline{1})\otimes\underline{1} & ((\mathfrak{Z}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathfrak{Z}FY'\otimes\eta Y'))\otimes(\mathfrak{Z}FZ'\otimes\eta Z') \arrow[l, "(\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'})\otimes\mu_{Z'}"'] & ((\mathfrak{Z}FX'\otimes\mathfrak{Z}FY')\otimes\mathfrak{Z}FZ')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, dashed] \arrow[r, "(\breve{\mathfrak{Z}F}\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\mathfrak{Z}F(X'\otimes Y')\otimes\mathfrak{Z}FZ')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[d, "\breve{\mathfrak{Z}F}\otimes id"] \\
\cdots \arrow[r, "\mu_{(X'\otimes Y')\otimes Z'}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathfrak{Z}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes\eta((X'\otimes Y')\otimes Z') & \mathfrak{Z}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes(\eta(X'\otimes Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, "id\otimes\breve{\eta}"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & \mathfrak{Z}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, "id\otimes(\breve{\eta}\otimes id)"'] \arrow[d, "id\otimes a^{-1}"] \\
(\cdots\otimes Z')) \arrow[r, "\mathfrak{Z}Fa'\otimes id"] & \mathfrak{Z}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes\eta(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[u, "id\otimes\eta a'"] & \mathfrak{Z}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[l, "id\otimes\breve{\eta}"'] & \mathfrak{Z}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "id\otimes(id\otimes\breve{\eta})"'] \arrow[d, "(\breve{\mathfrak{Z}F})^{-1}\otimes id"] \\
\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\mathfrak{Z}F(X'\otimes Y')\otimes\mathfrak{Z}FZ')\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[u, "\breve{\mathfrak{Z}F}\otimes\breve{\eta}"] & (\mathrm{V}) & (\mathfrak{Z}F(X'\otimes Y')\otimes\mathfrak{Z}FZ')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[d, "((\breve{\mathfrak{Z}F})^{-1}\otimes id)\otimes id"] \\
X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[r, "a\otimes id"] & ((\mathfrak{Z}FX'\otimes\mathfrak{Z}FY')\otimes\mathfrak{Z}FZ')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[u, "(\breve{\mathfrak{Z}F}\otimes id)\otimes(id\otimes\breve{\eta})"] \arrow[rr, equal] & & ((\mathfrak{Z}FX'\otimes\mathfrak{Z}FY')\otimes\mathfrak{Z}FZ')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[dlll, dashed] \arrow[dll, phantom, "(\mathrm{VI})"] \\
Y')\otimes(\mathfrak{Z}FZ'\otimes\eta Z')) & & &
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (VII) résulte de celle des diagrammes (4), (5) respectivement ; celle de (II) de la définition de $\eta a'$ (Diag. (21)) ; celle de (IV) de la compatibilité de $(\mathcal{G}F, \check{\mathcal{G}}F)$ avec les contraintes d'associativité ; celle de (V) s'obtient en composant les flèches ; celle de (VI) est le résultat de (Chap. I, §3, n°1, Prop. 7) ; enfin celle du circuit extérieur vient de la fonctorialité de la contrainte d'associativité a de $\underline{Q}$, de la compatibilité entre les contraintes d'associativité a et d'unité $(\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d)$ de $\underline{Q}$, et de (Chap. I, §3, n°1, Prop. 7). On en déduit la commutativité de la région (III) qui, à facteur régulier près, exprime la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'associativité. Enfin, prouvons la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les unités. Pour cela, il suffit de remarquer que, les $\otimes$-foncteurs $(F, \check{F})$, $(\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}})$ étant compatibles avec les unités, on a par conséquent $\mathcal{G}F\underline{1}' \simeq \underline{1}_{\underline{Q}}$, ce qui implique $\eta\underline{1}' \simeq \underline{1}_{\underline{Q}}$. La compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les unités s'obtient aussitôt en appliquant (Chap. I, §4, n°2, Prop. 8).

Enfin l'isomorphisme $\mu_{X'}$ est bien fonctoriel en X' en vertu de la définition de $\eta u'$ (Diag (2)), ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u>. En vertu de (Chap. I, §4, n°2, Cor. de la Prop. 4) les $\otimes$-isomorphismes d'un $\otimes$-foncteur unifère dans un $\otimes$-foncteur unifère sont les $\otimes$-isomorphismes unifères ; par conséquent quand nous avons un $\otimes$-isomorphisme unifère d'un $\otimes$-foncteur unifère dans un $\otimes$-foncteur unifère, nous disons simplement que c'est un $\otimes$-isomorphisme.

Les hypothèses étant toujours celles du lemme 2, nous définissons en plus un $\otimes$-foncteur $(T, \check{T}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C} \times \underline{C}'$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} X' & \longmapsto & TX' = (FX', X') \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle Tu' = (Fu', u')} \\ Y' & \longmapsto & TY' = (FY', Y') \end{array}$$

$$\check{T}_{X',Y'} : (FX' \otimes FY', X' \otimes Y') \xrightarrow{\check{F} \otimes id} (F(X' \otimes Y'), X' \otimes Y')$$

Il est clair que $(T, \check{T})$ est un $\otimes$-foncteur ACU. Cela étant, nous avons :

<u>Lemme 3</u>.– μ est un $\otimes$-isomorphisme du foncteur

$$(\mathcal{G}\otimes\eta,\ \widetilde{\mathcal{G}\otimes\eta})\circ(T, \check{T}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{Q}$$

dans le foncteur

$$(I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{Q}$$

$(I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})$ étant le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{Q}}$ constant (§1, n°2, Déf. 3).

<u>Démonstration</u>.– Prouvons que μ est un $\otimes$-morphisme. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G}\otimes\eta)TX'\otimes(\mathcal{G}\otimes\eta)TY' \arrow[r, equal] \arrow[ddd, "\widetilde{(\mathcal{G}\otimes\eta)T}"'] & (\mathcal{G}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathcal{G}FY'\otimes\eta Y') \arrow[r, "\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'}"] \arrow[d, dashed] & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \\
 & (\mathcal{G}FX'\otimes\mathcal{G}FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[d, "\check{\mathcal{G}}\otimes\check{\eta}"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \\
 & \mathcal{G}(FX'\otimes FY')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{G}\check{F}\otimes id"] & \\
(\mathcal{G}\otimes\eta)T(X'\otimes Y') \arrow[r, equal] & \mathcal{G}F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "\mu_{X'\otimes Y'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[uuu, "d"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la définition de $\widetilde{\mathcal{G}\otimes\eta}$ (lemme 1), et celle de (II) de la définition de $\check{\eta}$ (Diag. (3)). D'où la commutativité du circuit extérieur qui montre que μ est un $\otimes$-morphisme.

<u>Lemme 4</u>.– Les hypothèses étant celles du lemme 2, on suppose en plus qu'on ait un $\otimes$-foncteur $(\mathcal{G}_1, \check{\mathcal{G}}_1) : \underline{C} \longrightarrow \underline{Q}$ ayant les mêmes propriétés que $(\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}})$. Soit $(\eta_1, \check{\eta}_1)$ le $\otimes$-foncteur qui correspond à $(\mathcal{G}_1, \check{\mathcal{G}}_1)$, défini de la même manière que $(\eta, \check{\eta})$. Si $\rho : (\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{G}_1, \check{\mathcal{G}}_1)$ est un $\otimes$-isomor-

phisme, alors il existe un $\otimes$-isomorphisme unique $\rho' : (\eta, \check{\eta}) \xrightarrow{\sim} (\eta_1, \check{\eta}_1)$ tel que soit commutatif le diagramme

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} (\mathcal{E}\otimes\eta, \widetilde{\mathcal{E}\otimes\eta})\circ(T,\check{T}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(\rho\otimes\rho')T"'] & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}) \arrow[d, equal] \\ (\mathcal{E}_1\otimes\eta_1, \widetilde{\mathcal{E}_1\otimes\eta_1})\circ(T,\check{T}) \arrow[r, "\mu_1"] & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}) \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– Supposons qu'il existe un $\otimes$-isomorphisme $\rho' : (\eta, \check{\eta}) \xrightarrow{\sim} (\eta_1, \check{\eta}_1)$ tel que le diagramme (6) soit commutatif, i.e pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$ on a la commutativité du diagramme suivant

$$(7)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E}FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[dr, "\rho_{FX'}\otimes id"'] & \underline{1}_{\underline{Q}} & \mathcal{E}_1FX'\otimes\eta_1X' \arrow[l, "\mu_{1X'}"'] \\ & \mathcal{E}_1FX'\otimes\eta X' \arrow[ur, "id\otimes\rho'_{X'}"'] & \end{tikzcd}$$

D'où l'unicité de ρ' puisque $\mathcal{E}_1FX'$ est régulier.

Soit $\rho'_{X'} : \eta X' \longrightarrow \eta_1 X'$ défini par le diagramme commutatif (7) pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$. Il est manifeste que $\rho'_{X'}$ est un isomorphisme puisque toutes les flèches figurant dans (7) sont des isomorphismes et $\mathcal{E}_1FX'$ est régulier. Prouvons que $\rho'_{X'}$ est fonctoriel en X'. Soit $u' : X' \longrightarrow Y'$ une flèche de $\underline{C}'$ et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "\rho_{FX'}\otimes id"] \arrow[d, "\mathcal{E}Fu'\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & \mathcal{E}_1FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "id\otimes\rho'_{X'}"] \arrow[d, "\mathcal{E}_1Fu'\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \mathcal{E}_1FX'\otimes\eta_1X' \arrow[d, "\mathcal{E}_1Fu'\otimes id"] \\ \mathcal{E}FY'\otimes\eta X' \arrow[r, "\rho_{FY'}\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\eta u'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & \mathcal{E}_1FY'\otimes\eta X' \arrow[r, "id\otimes\rho'_{X'}"] \arrow[d, "id\otimes\eta u'"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & \mathcal{E}_1FY'\otimes\eta X' \arrow[d, "id\otimes\eta_1u'"] \\ \mathcal{E}FY'\otimes\eta Y' \arrow[r, "\rho_{FY'}\otimes id"] & \mathcal{E}_1FY'\otimes\eta Y' \arrow[r, "id\otimes\rho'_{Y'}"] & \mathcal{E}_1FY'\otimes\eta_1Y' \end{tikzcd}$$

dans lequel la région (I) est commutative puisque ρF est fonctoriel en X', tandis que les régions (II), (III) sont commutatives par évidence. D'où la commutativité de la région (IV) est équivalente à celle du circuit extérieur. Or la commutativité de celui-ci résulte du fait que $\rho_{FX'} \otimes \rho'_{X'}$, étant le composé (voir Diag (7)) de deux flèches $\mu_{X'}$, $\mu_{X'}$ qui sont fonctorielles en X' (Lemme 2), est fonctoriel en X'. On en déduit la commutativité de (IV), et par suite, la fonctorialité de ρ' puisque $\mathcal{G}_1FY'$ est régulier. Pour montrer que ρ' est un $\otimes$-morphisme, nous considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{G}F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "\rho_{F(X'\otimes Y')}\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "id\otimes\rho'_{X'\otimes Y'}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes\eta_1(X'\otimes Y') \\
\mathcal{G}F(X'\otimes Y')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "id\otimes\breve{\eta}"] \arrow[r, "\rho_{F(X'\otimes Y')}\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "id\otimes\breve{\eta}"] \arrow[r, "id\otimes(\rho'_{X'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes(\eta_1X'\otimes\eta_1Y') \arrow[u, "id\otimes\breve{\eta}_1"] \\
(\mathcal{G}FX'\otimes\mathcal{G}FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "\breve{\mathcal{G}}F\otimes id"] \arrow[r, "(\rho_{FX'}\otimes\rho_{FY'})\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\mathcal{G}_1FX'\otimes\mathcal{G}_1FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "\breve{\mathcal{G}}_1F\otimes id"] \arrow[r, "id\otimes(\rho'_{X'}\otimes\rho'_{Y'})"] & (\mathcal{G}_1FX'\otimes\mathcal{G}_1FY')\otimes(\eta_1X'\otimes\eta_1Y') \arrow[u, "\breve{\mathcal{G}}_1F\otimes id"] \\
(\mathcal{G}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathcal{G}FY'\otimes\eta Y') \arrow[u, dashed] \arrow[rr, "(\rho_{FX'}\otimes\rho'_{X'})\otimes(\rho_{FY'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[uuu, bend left=60, "\breve{\mathcal{G}F\otimes\eta}"] \arrow[uuu, phantom, bend left=30, "(\mathrm{VI})"] & & (\mathcal{G}_1FX'\otimes\eta_1X')\otimes(\mathcal{G}_1FY'\otimes\eta_1Y') \arrow[u, dashed] \arrow[uuu, bend right=60, "\breve{\mathcal{G}_1F\otimes\eta_1}"'] \arrow[uuu, phantom, bend right=30, "(\mathrm{VII})"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (IV) est évidente ; celle de (III) résulte du fait que ρF est un $\otimes$-morphisme ; celle de (V) de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{Q}$; celle de (VI), (VII) de la définition de $\widetilde{\xi F \otimes \eta}$ et $\widetilde{\xi_1 F \otimes \eta}$ (Lemme 1) ; enfin celle du circuit extérieur vient du fait que $\rho F \otimes \rho'$ étant le composé de deux $\otimes$-morphismes μ et μ_1, est un $\otimes$-morphisme (Diag. (7)). D'où la commutativité de la région (II) qui prouve que ρ' est un $\otimes$-morphisme puisque $\xi_1 F(X' \otimes Y')$ est régulier. Enfin on a bien le diagramme (6) commutatif puisque ρ' est défini par le diagramme commutatif (7). On a ainsi démontré l'existence du $\otimes$-isomorphisme ρ'.

Considérons toujours le $\otimes$-foncteur $(T, \check{T}) : \underline{C}' \to \underline{C} \times \underline{C}'$, et soient $\mathcal{S}$ la partie multiplicative de $\underline{C} \times \underline{C}'$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de la forme $T(c'_{X', X'}) = (Fc'_{X', X'}, c'_{X', X'})$, $(\underline{C} \times \underline{C}')^{\mathcal{S}}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{C} \times \underline{C}'$ définie par $\mathcal{S}$, $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie ACU de la $\otimes$-catégorie AC $\underline{C} \times \underline{C}'$ définie par $(\underline{C}', (T, \check{T}))$, $(D, \check{D}) : \underline{C} \times \underline{C}' \to \underline{P}$ le $\otimes$-foncteur canonique, et $\lambda : (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ le $\otimes$-isomorphisme canonique (§1, n°2, Déf. 4). Donc nous avons ici, pour la catégorie $\underline{P}$,

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \{(X, X') \mid X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}((X, X'), (Y, Y')) = \{[A', B', (u, u')] \mid A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}',\ (u, u') : (X \otimes FA', X' \otimes A') \to (Y \otimes FB', Y' \otimes B')\}$$

où $[A'_1, B'_1, (u_1, u'_1)] = [A'_2, B'_2, (u_2, u'_2)]$ si et seulement s'il existe des objets C'_1, C'_2 et des isomorphismes dans $\underline{C}'$

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2$$

$$v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

tels que soit commutatif dans $(\underline{C} \times \underline{C}')^{\mathcal{S}}$ le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
(X\otimes F(A_1'\otimes C_1'),\, X'\otimes(A_1'\otimes C_1')) \arrow[d, "{(id\otimes Fu',\, id\otimes u')}"', "\wr"] & (X\otimes(FA_1'\otimes FC_1'),\, X'\otimes(A_1'\otimes C_1')) \arrow[l, "{(id\otimes \check{F},\, id\otimes id)}"', "\sim"] \arrow[r, "{(a,\, a')}", "\sim"'] & ((X\otimes FA_1')\otimes FC_1',\, (X'\otimes A_1')\otimes C_1') \arrow[d, "{(u_1\otimes id,\, u_1'\otimes id)}"] \\
(X\otimes F(A_2'\otimes C_2'),\, X'\otimes(A_2'\otimes C_2')) & & ((Y\otimes FB_1')\otimes FC_1',\, (Y'\otimes B_1')\otimes C_1') \\
(X\otimes(FA_2'\otimes FC_2'),\, X'\otimes(A_2'\otimes C_2')) \arrow[u, "{(id\otimes \check{F},\, id\otimes id)}", "\wr"'] \arrow[d, "{(a,\, a')}"', "\wr"] & & (Y\otimes(FB_1'\otimes FC_1'),\, Y'\otimes(B_1'\otimes C_1')) \arrow[u, "{(a,\, a')}"', "\wr"] \arrow[d, "{(id\otimes \check{F},\, id\otimes id)}", "\wr"'] \\
((X\otimes FA_2')\otimes FC_2',\, (X'\otimes A_2')\otimes C_2') \arrow[d, "{(u_2\otimes id,\, u_2'\otimes id)}"'] & & (Y\otimes F(B_1'\otimes C_1'),\, Y'\otimes(B_1'\otimes C_1')) \arrow[d, "{(id\otimes Fv',\, id\otimes v')}", "\wr"'] \\
((Y\otimes FB_2')\otimes FC_2',\, (Y'\otimes B_2')\otimes C_2') & (Y\otimes(FB_2'\otimes FC_2'),\, Y'\otimes(B_2'\otimes C_2')) \arrow[l, "{(a,\, a')}"', "\sim"] \arrow[r, "{(id\otimes \check{F},\, id\otimes id)}", "\sim"'] & (Y\otimes F(B_2'\otimes C_2'),\, Y'\otimes(B_2'\otimes C_2'))
\end{tikzcd}
$$

le $\otimes$-foncteur $(D, \breve{D})$ canonique est défini par

$$\begin{tikzcd}
(X, X') \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(u,u')}"'] & D(X, X') = (X, X') \arrow[d, "{D(u,u') = [A', A', (u \otimes id_{FA'}, u' \otimes id_{A'})]}"] \\
(Y, Y') \arrow[r, mapsto] & D(Y, Y') = (Y, Y')
\end{tikzcd}$$

$$\breve{D}_{(X,X'),(Y,Y')} = id_{(X,X') \otimes (Y,Y')}$$

A' étant un objet quelconque de $\underline{C}'$, et le $\otimes$-isomorphisme canonique λ par

$$\lambda_{X'} = [\underline{1}', X', (c_{FX', F\underline{1}'}, c'_{X', \underline{1}'})] : (FX', X') \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}} = (F\underline{1}', \underline{1}')$$

Comme ici les $\otimes$-catégories $\underline{C} \times \underline{C}'$, $\underline{P}$ sont munies des contraintes d'unité, prouvons que $(D, \breve{D})$ est encore unifère. Pour cela il suffit de remarquer que

$$D(\underline{1}, \underline{1}') = (\underline{1}, \underline{1}') \xrightarrow[\sim]{[A', A', (\hat{F} \otimes id, id)]} (F\underline{1}', \underline{1}') = \underline{1}_{\underline{P}}$$

et d'appliquer (Chap I, §4, n° 2, Prop. 8).

Enfin notons par $(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ le composé des $\otimes$-foncteurs

$$\underline{C} \xrightarrow{(i, \breve{i})} \underline{C} \times \underline{C}' \xrightarrow{(D, \breve{D})} \underline{P}$$

et par $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ le composé des $\otimes$-foncteurs :

$$\underline{C}' \xrightarrow{(i', \breve{i}')} \underline{C} \times \underline{C}' \xrightarrow{(D, \breve{D})} \underline{P}.$$

$(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ et $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ sont manifestement des $\otimes$-foncteurs ACU comme étant des composés des $\otimes$-foncteurs ACU (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 1, 2, 3). Cela étant, nous avons la proposition

<u>Proposition 1.</u> – La $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et le $\otimes$-foncteur ACU

$(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ possèdent les propriétés suivantes :

1° $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in Ob\underline{C}'$.

2° Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}})$ de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{G}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in Ob\underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \breve{E}')$ de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$, et un $\otimes$-isomorphisme $\tau : (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} (E', \breve{E}') \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$; le couple $((E', \breve{E}'), \tau)$ est unique (à isomorphisme près), i.e s'il existe un autre $\otimes$-foncteur ACU $(E'_1, \breve{E}'_1)$ de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ et un autre $\otimes$-isomorphisme $\tau_1 : (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} (E'_1, \breve{E}'_1) \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$, alors $(E', \breve{E}')$ est isomorphe à $(E'_1, \breve{E}'_1)$ par un $\otimes$-isomorphisme τ' tel que soit commutatif le diagramme suivant

(8)
$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & (E', \breve{E}') \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}}) \arrow[d, "\tau' \mathcal{D}"] \\
(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \arrow[r, "\tau_1"] & (E'_1, \breve{E}'_1) \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.— 1° En vertu de la définition des foncteurs $\mathcal{D}$, ξ, nous pouvons définir l'isomorphisme $\gamma_{X'} : \mathcal{D}FX' \otimes \xi X' \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}}$, $X' \in Ob\underline{C}'$, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}FX' \otimes \xi X' \arrow[rr, "\gamma_{X'}"] \arrow[d, equal] & & \underline{1}_{\underline{P}} \\
(FX', \underline{1}') \otimes (\underline{1}, X') = (FX' \otimes \underline{1}, \underline{1}' \otimes X') & & (FX', X') \arrow[ll, "D(d_{FX'}, g'_{X'})"'] \arrow[u, "\lambda_{X'}"']
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}FX'$ est donc inversible. Remarquons que γ n'est autre que le composé des $\otimes$-isomorphismes :

$$(\mathcal{D} \otimes \xi, \mathcal{D} \breve{\otimes} \xi) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\alpha_{(D, \breve{D})} T} (D, \breve{D}) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\lambda} (I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$$

$\alpha_{(D, \breve{D})}$ étant défini dans le lemme 1, d'où γ est un $\otimes$-isomorphisme.

2° Soit $(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU

$\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$. En vertu des lemmes 2 et 3, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(\eta,\check{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$ et un $\otimes$-isomorphisme $\mu : (\mathcal{E}\otimes\eta, \widetilde{\mathcal{E}\otimes\eta})\circ(T,\check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})$. L'application de la proposition 18 du (§1, n° 2) nous donne un $\otimes$-foncteur ACU unique $(E',\check{E}') : \underline{P} \to \underline{Q}$ tel que

$$(\mathcal{E}\otimes\eta, \widetilde{\mathcal{E}\otimes\eta}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D})$$

$(E',\check{E}')$ étant défini par

$$E'(X,X') = \mathcal{E}X\otimes\eta X' \; ; \; \check{E}' = \widetilde{\mathcal{E}\otimes\eta}.$$

Pour tout $X \in Ob\,\underline{C}$, définissons l'isomorphisme $\tau_X : \mathcal{E}X \xrightarrow{\sim} E'\mathcal{D}X$ par le diagramme commutatif

$$(9)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E}X\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "id\otimes\hat{\eta}"] & \mathcal{E}X\otimes\eta\underline{1}' \arrow[d, equal] \\ \mathcal{E}X \arrow[u, "d_{\mathcal{E}X}"] \arrow[r, "\tau_X"] & E'\mathcal{D}X \end{tikzcd}$$

$\hat{\eta} : \underline{1}_{\underline{Q}} \to \eta\underline{1}'$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(\eta,\check{\eta})$ avec les unités. On vérifie aussitôt que τ_X est fonctoriel en X. Prouvons que τ est un $\otimes$-morphisme. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y \arrow[r, "d_{\mathcal{E}X}\otimes d_{\mathcal{E}Y}"] \arrow[dddd, "\check{\mathcal{E}}"'] & (\mathcal{E}X\otimes\underline{1}_{\underline{Q}})\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "(id\otimes\hat{\eta})\otimes(id\otimes\hat{\eta})"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\mathcal{E}X\otimes\eta\underline{1}')\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\eta\underline{1}') \arrow[d] \arrow[dddd, bend left=60, dash, "\check{E}'\mathcal{D}"] \\ & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y)\otimes(\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "(id\otimes id)\otimes(\hat{\eta}\otimes\hat{\eta})"] \arrow[d, "\check{\mathcal{E}}\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y)\otimes(\eta\underline{1}'\otimes\eta\underline{1}') \arrow[d, "\check{\mathcal{E}}\otimes id"] \\ (\mathrm{I}) & \mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes(\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "\mathcal{E}(id\otimes id)\otimes(\hat{\eta}\otimes\hat{\eta})"] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes(\eta\underline{1}'\otimes\eta\underline{1}') \arrow[d, "id\otimes\check{\eta}"] \quad (\mathrm{V}) \\ & & \mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\eta(\underline{1}'\otimes\underline{1}') \\ \mathcal{E}(X\otimes Y) \arrow[r, "d_{\mathcal{E}(X\otimes Y)}"] & \mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "id\otimes\hat{\eta}"] \arrow[uu, "id\otimes d"] & \mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\eta\underline{1}' \arrow[u, "id\otimes\eta d'"] \end{tikzcd}$$

dans lequel la région (I) est commutative en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 11) ; (II) de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité dans $\mathcal{Q}$; (III) de l'évidence ; (IV) de la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'unité ; (V) de la définition de $(E', \check{E}')$ et $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui exprime que τ est un $\otimes$-morphisme, compte tenu de la définition de τ (Diag. (3)).

Enfin, soient $(E'_1, \check{E}'_1)$ et τ_1 tels que $\tau_1 : (\mathcal{C}, \check{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\sim} (E'_1, \check{E}'_1) \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$. Pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, définissons l'isomorphisme $\mu_{X'} : E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\mathcal{Q}}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' & \xrightarrow{\mu_{X'}} & \underline{1}_{\mathcal{Q}} \\ {\scriptstyle \check{E}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{E}'} \\ E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X') & \xrightarrow{E'v_{X'}} & E'(\underline{1}_{P}) \end{array}$$

Par sa définition $\mu_{X'}$ est bien fonctoriel en X'. Montrons que

$$\mu : (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, \overbrace{E'\mathcal{D} \otimes E'\xi}) \circ (T, \check{T}) \longrightarrow (I_{\mathcal{Q}}, \check{I}_{\mathcal{Q}})$$

est un $\otimes$-morphisme. En vertu de la définition de μ, il nous suffit de prouver que

$$\check{E}' : (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, \overbrace{E'\mathcal{D} \otimes E'\xi}) \circ (T, \check{T}) \longrightarrow (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D} \otimes \xi, \overbrace{\mathcal{D} \otimes \xi}) \circ (T, \check{T})$$

est un $\otimes$-morphisme, puisque, v étant un $\otimes$-morphisme, il en est de même donc de $E'v$. Pour cela, considérons le diagramme ci-dessous dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (II), (III) de la fonctorialité de $\check{E}'$; celle de (IV), (V), (VI), (VII) des définitions de $\overbrace{(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)T}$, $\overbrace{E'\mathcal{D} \otimes E'\xi}$, $\overbrace{E'(\mathcal{D} \otimes \eta)}$, $\overbrace{E'(\mathcal{D} \otimes \eta)T}$ respectivement. D'où la commutativité du circuit extérieur qui exprime que $\check{E}'$ est un $\otimes$-morphisme. Il faut remarquer qu'ici il y a un abus de notation, ce n'est pas $\check{E}'$ qui est un $\otimes$-morphisme, mais c'est le morphisme fonctoriel $e_{X'} = \check{E}'_{\mathcal{D}FX',\, \xi X'} : E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \to E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X')$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
(E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X') \otimes (E'\mathcal{D}FY' \otimes E'\xi Y') \arrow[r, "\check{E}' \otimes \check{E}'"] \arrow[d, dashed] \arrow[dddd, bend right=60, "E'\mathcal{D} \otimes E'\xi"'] \arrow[dddddd, bend right=80, "(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)T"'] & E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X') \otimes E'(\mathcal{D}FY' \otimes \xi Y') \arrow[d, "\check{E}'"] \arrow[dddd, bend left=60, "E'(\mathcal{D}\otimes\eta)"] \arrow[dddddd, bend left=80, "E'(\mathcal{D}\otimes\eta)T"] \\
(E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\mathcal{D}FY') \otimes (E'\xi X' \otimes E'\xi Y') \arrow[d, "\check{E}' \otimes \check{E}'"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & E'((\mathcal{D}FX' \otimes \xi X') \otimes (\mathcal{D}FY' \otimes \xi Y')) \arrow[d, dashed] \\
E'(\mathcal{D}FX' \otimes \mathcal{D}FY') \otimes E(\xi X' \otimes \xi Y') \arrow[r, "\check{E}'"] \arrow[d, "E'\check{\mathcal{D}} \otimes E'\check{\xi}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & E'((\mathcal{D}FX' \otimes \mathcal{D}FY') \otimes (\xi X' \otimes \xi Y')) \arrow[d, "E'(\check{\mathcal{D}} \otimes \check{\eta})"] \\
E'\mathcal{D}(FX' \otimes FY') \otimes E\xi(X' \otimes Y') \arrow[r, "\check{E}'"] \arrow[d, equal] & E'(\mathcal{D}(FX' \otimes FY') \otimes \xi(X' \otimes Y')) \arrow[d, equal] \\
(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)(FX' \otimes FY', X' \otimes Y') \arrow[d, "(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)(\check{T})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E'(\mathcal{D} \otimes \xi)(FX' \otimes FY', X' \otimes Y') \arrow[d, "E'(\mathcal{D} \otimes \xi)(\check{T})"] \\
(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)(F(X' \otimes Y'), X' \otimes Y') \arrow[d, equal] & E'(\mathcal{D} \otimes \xi)(F(X' \otimes Y'), X' \otimes Y') \arrow[d, equal] \\
E'\mathcal{D}F(X' \otimes Y') \otimes E'\xi(X \otimes Y) \arrow[r, "\check{E}'"] & E'(\mathcal{D}F(X' \otimes Y') \otimes \xi(X' \otimes Y'))
\end{tikzcd}$$

(IV) (V) (VI) VII

Ensuite de la même manière nous définissons le $\otimes$-isomorphisme

$$\mu_1 : (E_1'\mathcal{D}\otimes E_1'\xi,\ \widetilde{E_1'\mathcal{D}\otimes E_1'\xi})\circ(T,\check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underset{\sim}{Q}},\check{I}_{\underset{\sim}{Q}})$$

les deux $\otimes$-isomorphismes τ et τ_1 nous donnent le $\otimes$-isomorphisme $\rho : (E'\mathcal{D},\ \widetilde{E'\mathcal{D}}) \longrightarrow (E_1'\mathcal{D},\ \widetilde{E_1'\mathcal{D}})$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & (E'\mathcal{D},\ \widetilde{E'\mathcal{D}}) \arrow[d, "\rho"] \\
(\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}) \arrow[r, "\tau_1"] & (E_1'\mathcal{D},\ \widetilde{E_1'\mathcal{D}})
\end{tikzcd} \tag{10}$$

En vertu du lemme 4, nous avons un $\otimes$-isomorphisme unique

$$\rho' : (E'\xi,\ \widetilde{E'\xi}) \longrightarrow (E_1'\xi,\ \widetilde{E_1'\xi})$$

tel que soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(E'\mathcal{D}\otimes E'\xi,\ \widetilde{E'\mathcal{D}\otimes E'\xi}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(\rho\otimes\rho')T"'] & (I_{\underset{\sim}{Q}},\check{I}_{\underset{\sim}{Q}}) \arrow[d, equal] \\
(E_1'\mathcal{D}\otimes E_1'\xi,\ \widetilde{E_1'\mathcal{D}\otimes E_1'\xi}) \arrow[r, "\mu_1"] & (I_{\underset{\sim}{Q}},\check{I}_{\underset{\sim}{Q}})
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Or d'après le lemme 1, nous avons le $\otimes$-isomorphisme

$$\alpha_{(E,\check{E})} : (Ei\otimes Ei',\ \widetilde{Ei\otimes Ei'}) \longrightarrow (E,\check{E})$$

qui est par conséquent fonctoriel en $(E,\check{E})$, i.e si $r : (E,\check{E}) \longrightarrow (E_1,\check{E}_1)$ est un $\otimes$-morphisme unifère, alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(Ei\otimes Ei',\ \widetilde{Ei\otimes Ei'}) \arrow[r, "\alpha_{(E,\check{E})}"] \arrow[d, "ri\otimes ri'"'] & (E,\check{E}) \arrow[d, "r"] \\
(E_1i\otimes E_1i',\ \widetilde{E_1i\otimes E_1i'}) \arrow[r, "\alpha_{(E_1,\check{E}_1)}"] & (E_1,\check{E}_1)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Prenons ici $(E,\check{E}) = (E'D,\ \widetilde{E'D})$, $(E_1,\check{E}_1) = (E_1'D,\ \widetilde{E_1'D})$. Soit $r : (E'D,\ \widetilde{E'D}) \longrightarrow (E_1'D,\ \widetilde{E_1'D})$ le $\otimes$-isomorphisme défini par le diagramme commutatif

$$(12)\qquad \begin{tikzcd}
(E'\mathcal{D}\otimes E'\xi,\ \widecheck{E'\mathcal{D}\otimes E'\xi}) \arrow[r, "\alpha(E'D,\ \check{E'D})"] \arrow[d, "f\otimes f'"'] & (E'D,\ \check{E'D}) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
(E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi,\ \widecheck{E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi}) \arrow[r, "\alpha(E'_1D,\ \check{E'_1D})"] & (E'_1D,\ \check{E'_1D})
\end{tikzcd}$$

Puisque le foncteur L est une équivalence (Lemme 1), on voit aussitôt que $f = \varepsilon i$, $f' = \varepsilon i'$.

Les diagrammes commutatifs (11) et (12) nous donne la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(E'D,\ \widecheck{E'D})\circ(T,\check{T}) \arrow[d, "\varepsilon T"'] & (E'\mathcal{D}\otimes E'\xi,\ \widecheck{E'\mathcal{D}\otimes E'\xi})\circ(T,\check{T}) \arrow[l, "\alpha(E'D,\ \check{E'D})"'] \arrow[r, "\mu"] & (I_{\underline{Q}},\ \check{I}_{\underline{Q}}) \arrow[d, equal] \\
(E'_1D,\ \widecheck{E'_1D})\circ(T,\check{T}) & (E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi,\ \widecheck{E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi})\circ(T,\check{T}) \arrow[l, "\alpha(E'_1D,\ \check{E'_1D})"'] \arrow[r, "\mu_1"] & (I_{\underline{Q}},\ \check{I}_{\underline{Q}})
\end{tikzcd}$$

Par conséquent en vertu de (§1, n°2, Prop. 19) nous avons un ⊗-isomorphisme $\varepsilon' : E' \to E'_1$ tel que $\varepsilon = \varepsilon' D$. Dans le diagramme commutatif (10) remplaçons f par $\varepsilon' D i = \varepsilon' \mathcal{D}$, nous obtenons bien le diagramme commutatif (8), ce qui achève la démonstration. On voit aussitôt que si la catégorie sous-jacente de la catégorie $\underline{C}$ est un groupoïde et si pour tout $X \in Ob\,\underline{C}$, il existe $Y \in Ob\,\underline{C}$, $X' \in Ob\,\underline{C}'$, tels que $X \otimes Y \simeq FX'$, alors $\underline{P}$ est une Pic-catégorie.

Définition 1.– $\underline{P}$ est appelée la ⊗-catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$ et $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$ le ⊗-foncteur canonique de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

2. Pic-enveloppe d'une ⊗-catégorie ACU

Définition 2.– Soit $\underline{C}^{is}$ la ⊗-catégorie ACU déduite de la ⊗-catégorie ACU $\underline{C}$ en enlevant les flèches qui ne sont pas les isomorphismes. La ⊗-catégorie de fractions de $\underline{C}^{is}$ définie par $(\underline{C}^{is}, (id_{\underline{C}^{is}}, id))$ est une Pic-catégorie notée $Pic(\underline{C})$. Le couple $(Pic(\underline{C}), (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}))$ est appelé la Pic-enveloppe de $\underline{C}$, $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$ étant le ⊗-foncteur canonique de $\underline{C}^{is}$ dans $\mathrm{Pic}(\underline{C})$.

$\mathrm{Pic}(\underline{C})$ est donc une Pic-catégorie définie de la manière suivante :

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Pic}(\underline{C}) = \{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pic}(\underline{C})}((A_1,A_2),(B_1,B_2)) = \Big\{ [X, Y, (u_1, u_2)] \;\Big|\; \underset{(u_1,u_2)\in \mathrm{Fl}(\underline{C}^{is}\times \underline{C}^{is})}{(A_1\otimes X, A_2\otimes X) \xrightarrow{(u_1,u_2)} (B_1\otimes Y, B_2\otimes Y)}, \Big\}$$

où $[X, Y, (u_1, u_2)] = [U, V, (v_1, v_2)]$ si et seulement s'il existe des objets C, D et des isomorphismes

$$u : X\otimes C \xrightarrow{\sim} U\otimes D$$

$$v : Y\otimes C \xrightarrow{\sim} V\otimes D$$

de $\underline{C}$ tels que soit commutatif dans $(\underline{C}^{is}\times \underline{C}^{is})^{\varphi}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(A_1\otimes(X\otimes C), A_2\otimes(X\otimes C)) \arrow[r, "{(a,a)}"] \arrow[d, "{(id\otimes u, id\otimes u)}"'] & ((A_1\otimes X)\otimes C, (A_2\otimes X)\otimes C) \arrow[r, "{(u_1\otimes id, u_2\otimes id)}"] & ((B_1\otimes Y)\otimes C, (B_2\otimes Y)\otimes C) \\
(A_1\otimes(U\otimes D), A_2\otimes(U\otimes D)) \arrow[d, "{(a,a)}"'] & & (B_1\otimes(Y\otimes C), B_2\otimes(Y\otimes C)) \arrow[u, "{(a,a)}"'] \arrow[d, "{(id\otimes v, id\otimes v)}"] \\
((A_1\otimes U)\otimes D, (A_2\otimes U)\otimes D) \arrow[r, "{(v_1\otimes id, v_2\otimes id)}"] & ((B_1\otimes V)\otimes D, (B_2\otimes V)\otimes D) & (B_1\otimes(V\otimes D), B_2\otimes(V\otimes D)) \arrow[l, "{(a,a)}"']
\end{tikzcd}$$

φ étant la partie multiplicative de $\underline{C}^{is}\times \underline{C}^{is}$ engendrée par les endomorphismes de la forme $(c_{X,X}, c_{X,X})$, $X\in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$.

Puisque $\mathrm{Pic}(\underline{C})$ est une Pic-catégorie, ses groupes $\pi_0(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, $\pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$ sont des groupes abéliens (Chap. II, §2, n°1) dont les lois de composition sont notées additivement. Si on note $\overline{(A_1, A_2)}$ les éléments de $\pi_0(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, $(A_1, A_2)\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pic}(\underline{C})$, alors

$$(13)\qquad \overline{(A_1, A_2)} + \overline{(B_1, B_2)} = \overline{(A_1\otimes B_1, A_2\otimes B_2)}$$

D'autre part, soit $[X, Y, (u_1, u_2)] \in \mathrm{Aut}(\underline{1}, \underline{1}) = \pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, i.e nous avons deux isomorphismes $u_1 : \underline{1}\otimes X \longrightarrow \underline{1}\otimes Y$, $u_2 : \underline{1}\otimes X \longrightarrow \underline{1}\otimes Y$. $\underline{1}$ étant régulier, ce qui nous donne deux isomorphismes $v_1, v_2 : X \to Y$ tels que $u_1 = id_{\underline{1}} \otimes v_1$, $u_2 = id_{\underline{1}} \otimes v_2$. Prouvons que

$$[X, Y, (u_1, u_2)] = [X, X, (id \otimes v_2^{-1} v_1, id)]$$

Nous avons en effet la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1}\otimes X, \underline{1}\otimes X) \arrow[r, "{(id\otimes v_1, id\otimes v_2)}"] \arrow[d, "id"'] & (\underline{1}\otimes Y, \underline{1}\otimes Y) \arrow[d, "{(id\otimes v_2^{-1}, id\otimes v_2^{-1})}"] \\
(\underline{1}\otimes X, \underline{1}\otimes X) \arrow[r, "{(id\otimes v_2^{-1}v_1, id)}"] & (\underline{1}\otimes X, \underline{1}\otimes X)
\end{tikzcd}$$

dans $\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is}$, et a fortiori dans $(\underline{C}^{is}\times\underline{C}^{is})^{\varphi}$. D'où l'égalité voulue en vertu de (§1, n°2, Rem. 1)). Donc chaque élément de $\pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$ peut s'écrire sous la forme $[X, X, (id_{\underline{1}}\otimes f, id_{\underline{1}\otimes X})]$, $X \in Ob\,\underline{C}$, $f : X \xrightarrow{\sim} X$, qu'on note simplement $(\overline{X, f})$. Ecrire que les deux flèches $[X, X, (id_{\underline{1}}\otimes f, id_{\underline{1}\otimes X})]$, $[Y, Y, (id_{\underline{1}}\otimes g, id_{\underline{1}\otimes Y})]$ sont égales est équivalent à écrire qu'il existe deux isomorphismes $u : X\otimes C \longrightarrow Y\otimes D$, $v : X\otimes C \longrightarrow Y\otimes D$ dans $\underline{C}$ tels que soit commutatif dans $(\underline{C}^{is}\times\underline{C}^{is})^{\varphi}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1}\otimes(X\otimes C), \underline{1}\otimes(X\otimes C)) \arrow[r, "{(a,a)}"] \arrow[d, "{(id\otimes u, id\otimes u)}"'] & ((\underline{1}\otimes X)\otimes C, (\underline{1}\otimes X)\otimes C) \arrow[r, "{((id\otimes f)\otimes id, id)}"] & ((\underline{1}\otimes X)\otimes C, (\underline{1}\otimes X)\otimes C) \\
(\underline{1}\otimes(Y\otimes D), \underline{1}\otimes(Y\otimes D)) \arrow[d, "{(a,a)}"'] & & (\underline{1}\otimes(X\otimes C), \underline{1}\otimes(X\otimes C)) \arrow[u, "{(a,a)}"'] \\
((\underline{1}\otimes Y)\otimes D, (\underline{1}\otimes Y)\otimes D) \arrow[r, "{((id\otimes g)\otimes id, id)}"] & ((\underline{1}\otimes Y)\otimes D, (\underline{1}\otimes Y)\otimes D) & (\underline{1}\otimes(Y\otimes D), \underline{1}\otimes(Y\otimes D)) \arrow[l, "{(a,a)}"'] \arrow[u, "{(id\otimes v, id\otimes v)}"']
\end{tikzcd}$$

Or la commutativité de ce dernier dans $(\underline{C}^{is}\times\underline{C}^{is})^{\varphi}$ est équivalente à celle du du diagramme :

$$\begin{array}{lccc}
 & (X\otimes C\,,\,X\otimes C) & \xrightarrow{(f\otimes id_C\,,\,id_{X\otimes C})} & (X\otimes C\,,\,X\otimes C) \\
(14) & \Big\downarrow{\scriptstyle (u,u)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (v,v)} \\
 & (Y\otimes D\,,\,Y\otimes D) & \xrightarrow{(g\otimes id_D\,,\,id_{Y\otimes D})} & (Y\otimes D\,,\,Y\otimes D)
\end{array}$$

dans $(\underline{C}^{is}\times\underline{C}^{is})^{\mathcal{G}}$ compte tenu de la fonctorialité de la contrainte d'associativité (a,a) et du fait que $(\underline{1},\underline{1})$ est régulier.

Cela étant, en vertu de la composition des flèches dans $Pic(\underline{C})$ (§1, n°2, Prop. 9)

$$(15)\qquad \overline{(X,f)}+\overline{(Y,g)} = \overline{(X\otimes Y,\, f\otimes g)}$$

et au cas où $Y = X$

$$(16)\qquad \overline{(X,f)}+\overline{(X,g)} = \overline{(X,\, fg)}$$

Remarque. – Dire que le diagramme (14) est commutatif dans $(\underline{C}^{is}\times\underline{C}^{is})^{\mathcal{G}}$ est dire que si l'on pose

$$(U,u) = (g\otimes id,\, id)\,(u,u) \quad ; \quad (V,v) = (v,v)\,(f\otimes id,\, id)$$

on doit pouvoir décomposer (U,u), (V,v) en des produits (§1, n°1, Rem.)

$$(U,u) = (U_1U_2\cdots U_p\,,\, u_1u_2\cdots u_p)$$

$$(V,v) = (V_1V_2\cdots V_q\,,\, v_1v_2\cdots v_q)$$

tels que

$$(U_1,u_1)(\varepsilon_1,\varepsilon_1)(U_2,u_2)(\varepsilon_2,\varepsilon_2)\cdots\quad(\varepsilon_{p-1},\varepsilon_{p-1})(U_p,u_p) =$$

$$(V_1,v_1)(\zeta_1,\zeta_1)(V_2,v_2)(\zeta_2,\zeta_2)\cdots\quad(\zeta_{q-1},\zeta_{q-1})(V_q,v_q)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots, \varepsilon_{p-1}, \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{q-1}$ appartenant à la partie multiplicative $\mathcal{S}$ de

$\underline{C}^{is}$ engendré par les endomorphismes de la forme $c_{X,X}$, $X \in Ob\,\underline{C}$. On obtient donc dans $\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is}$ la commutativité du diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(X\otimes C, X\otimes C) \arrow[r, "((v_1\xi_1\cdots\xi_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\xi_1\cdots\xi_{q-1}V_q)\text{, }id)"] \arrow[d, "(u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p\text{, }u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p)"'] & (X\otimes C, X\otimes C) \arrow[d, "(v_1\xi_1\cdots\xi_{q-1}v_q\text{, }v_1\xi_1\cdots\xi_{q-1}v_q)"] \\
(Y\otimes D, Y\otimes D) \arrow[r, "((U_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}\text{, }id)"'] & (Y\otimes D, Y\otimes D)
\end{tikzcd}
$$

ce qui implique la commutativité du diagramme suivant dans $\underline{C}^{is}$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
X\otimes C \arrow[r, "(v_1\xi_1\cdots\xi_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\xi_1\cdots\xi_{q-1}V_q)"] \arrow[d, "u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p"'] & X\otimes C \arrow[d, "v_1\xi_1\cdots\xi_{q-1}v_q"] \\
Y\otimes D \arrow[r, "(U_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}"'] & Y\otimes D
\end{tikzcd}
$$

où

$$u = u_1 \cdots u_p \,, \quad v = v_1 \cdots v_q$$

$$(g\otimes id)\, u = U_1 \cdots U_p \,, \quad v(f\otimes id) = V_1 \cdots V_q$$

$$u_1\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p = v_1 \xi_1 \cdots \xi_{q-1} v_q$$

$$U_1\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} U_p = V_1 \xi_1 \cdots \xi_{q-1} V_q$$

§3. Applications

1. Groupe de Grothendieck et groupe de Whitehead.

R étant un anneau unitaire, on rappelle les définitions suivantes [1].

<u>Définition 1</u>.– On appelle <u>groupe de Grothendieck</u> des R-modules projectifs à gauche de type fini le groupe abélien $K_0(R)$ engendré par les $[X]$, X étant un R-module projectif à gauche de type fini et les générateurs $[X]$ satisfaisant à la relation

~~(17)~~ (1) $$[X] = [X'] + [X'']$$

si le R-module X est isomorphe à la somme directe $X' \oplus X''$.

<u>Définition 2</u>.– On appelle <u>groupe de Whitehead</u> de R le groupe abélien $K_1(R)$ engendré par les $[(X, f)]$; où X est R-module projectif à gauche de type fini, $f : X \xrightarrow{\sim} X$ un automorphisme de R-module ; les relations entre les générateurs étant

~~(18)~~ (2) $$[(X, fg)] = [(X, f)] + [(X, g)]$$

et

~~(19)~~ (3) $$[(X, f)] = [(X', f')] + [(X'', f'')]$$

s'il existe une suite exacte de R-modules

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{\theta} X'' \longrightarrow 0$$

telle que soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ X' \arrow[r, "\sigma"] & X \arrow[r, "\theta"] & X'' \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{P}(R)$ la catégorie des R-modules projectifs à gauche de type fini. La catégorie $\mathcal{P}(R)$ munie de la loi $\oplus$ de somme directe et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité naturelles est évidemment une $\oplus$_ catégorie ACU. Posons $\underline{P} = Pic(\mathcal{P}(R))$. Nous avons les propositions suivantes :

<u>Proposition 1</u>.– $\pi_0(\underline{P}) \simeq K_0(R)$.

<u>Démonstration</u>.– Tout d'abord remarquons qu'on a, en appliquant la formule (17)(1)

$$[X] = [X] + [0]$$

pour tout $X \in \mathcal{P}(R)$, et

$$[X] = [Y]$$

si X est isomorphe à Y. Ensuite soit

$$(X_1, X_2) \xrightarrow{[A, B, (u_1, u_2)]} (Y_1, Y_2)$$

un isomorphisme dans $\underline{P}$, ce qui veut dire qu'on a deux R-isomorphismes

$$u_1 : X_1 \oplus A \longrightarrow Y_1 \oplus B \ ; \ u_2 : X_2 \oplus A \longrightarrow Y_2 \oplus B$$

On en conclut

$$[X_1] + [A] = [Y_1] + [B], \ [X_2] + [A] = [Y_2] + [B]$$

ou

$$[X_1] - [X_2] = [Y_1] - [Y_2]$$

Donc on obtient une application i_0 de $\pi_0(\underline{P})$ dans $K_0(R)$ définie par

$$i_0 : \overline{(X_1, X_2)} \longmapsto [X_1] - [X_2]$$

De plus, en vertu des relations (13) et (17) du (§2, n°2) et (1)

$$\overline{(X_1, X_2)} + \overline{(Y_1, Y_2)} = \overline{(X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2)} \overset{i_0}{\longmapsto} [X_1 \oplus Y_1] - [X_2 \oplus Y_2] = [X_1] + [Y_1] - [X_2] - [Y_2] =$$

$$= [X_1] - [X_2] + ([Y_1] - [Y_2])$$

ce qui nous permet de conclure que l'application i_o est un homomorphisme de groupes. D'autre part, considérons l'application de l'ensemble des générateurs de $K_o(R)$ dans $\Pi_o(\underline{P})$ définie par

$$[X] \longmapsto \overline{(X,0)}$$

Pour $[X] = [X_1] + [X_2]$, i.e $X \cong X_1 \oplus X_2$, nous avons

$$\overline{(X,0)} = \overline{(X_1 \oplus X_2, 0)} = \overline{(X_1,0)} + \overline{(X_2,0)}$$

Donc l'application considérée définit un homomorphisme j_o du groupe $K_o(R)$ dans le groupe $\Pi_o(\underline{P})$. Il est clair que les deux homomorphismes i_o et j_o qu'on vient de construire sont inverses l'un de l'autre. On en déduit $\Pi_o(\underline{P}) \cong K_o(R)$. Les isomorphismes i_o et j_o sont appelés les <u>isomorphismes canoniques</u>.

<u>Proposition 2.</u>– $\Pi_1(\underline{P}) \cong K_1(R)$.

<u>Démonstration</u>.– Remarquons d'abord que pour tout $[(X,f)]$ on a :

$$[(X,f)] = [(X,f)] + [(0,id)]$$

$$[(X,id)] + [(X,f)] = [(X,f)]$$

$$[(X,f)] + [(X,f^{-1})] = [(X,id)]$$

compte tenu des relations ~~(18)~~ (2) et ~~(19)~~ (3). On en conclut que $[(0,id)] = [(X,id)]$ est le zéro du groupe $K_1(R)$ et $[(X,f^{-1})]$ est l'opposé de $[(X,f)]$. La relation ~~(18)~~ (3) donne aussi

$$[(X,f)] = [(Y,g)] + [(0,id)] = [(Y,g)]$$

s'il existe un R-isomorphisme $u : X \to Y$ tel que soit commutatif le le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

Ensuite considérons trois isomorphismes dans $\mathcal{P}(R)$

$$X \xrightarrow{f_1} Y \qquad Y \xrightarrow{g} Y \qquad Y \xrightarrow{f_2} X$$

Puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_1^{-1} g f_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f_1"] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif, on a

$$[(Y, g)] = [(X, f_1^{-1} g f_1)]$$

D'autre part, on a

$$f_2 g f_1 = f_2 f_1 f_1^{-1} g f_1$$

ce qui donne en vertu de ~~(18)~~ (2)

$$[(X, f_2 g f_1)] = [(X, f_2 f_1)] + [(X, f_1^{-1} g f_1)] = [(X, f_2 f_1)] + [(Y, g)]$$

Plus généralement, soient

$$X \xrightarrow{W_n} Y_{n-1}, \ Y_{n-1} \xrightarrow{\Psi_{n-1}} Y_{n-1}, \ Y_{n-1} \xrightarrow{W_{n-1}} Y_{n-2}, \ Y_{n-2} \xrightarrow{\Psi_{n-2}} Y_{n-2}, \dots \ Y_1 \xrightarrow{\Psi_1} Y_1, \ Y_1 \xrightarrow{W_1} X$$

des isomorphismes dans $\mathcal{P}(R)$. On obtient de proche en proche

$$[(X, W_1 \Psi_1 \dots \Psi_{n-2} W_{n-1} \Psi_{n-1} W_n)] = [(X, W_1 \Psi_1 \dots \Psi_{n-2} W_{n-1} W_n)] + [(Y_{n-1}, \Psi_{n-1})] =$$

$$= \dots\dots [(X, W_1 W_2 \dots W_n)] + [(Y_1, \Psi_1)] + [(Y_2, \Psi_2)] + \dots [(Y_{n-1}, \Psi_{n-1})]$$

Ces remarques faites, soient $(\overline{X,f})$, $(\overline{Y,g}) \in \pi_1(\mathcal{P})$ tels que $(\overline{X,f}) = (\overline{Y,g})$, ce qui veut dire qu'il existe $C, D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{P}(R)$ et deux isomorphismes de R-modules.

$$u : X \oplus C \to Y \oplus D$$

$$v : X \oplus C \to Y \oplus D$$

tels que soit commutatif dans $\mathcal{P}(R)$ le diagramme (§2, n°2, Rem.)

$$\begin{array}{ccc} X \oplus C & \xrightarrow{(v_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} v_q)^{-1}(V_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} V_q)} & X \oplus C \\ {\scriptstyle u_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} v_q} \\ Y \oplus D & \xrightarrow{(U_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} U_p)(u_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p)^{-1}} & Y \oplus D \end{array}$$

où

$$u = u_1 \cdots u_p, \quad v = v_1 \cdots v_q$$

$$(g \oplus id)\, u = U_1 \cdots U_p, \quad v(f \oplus id) = V_1 \cdots V_q$$

$$u_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p = v_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} v_q$$

$$U_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} U_p = V_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} V_q$$

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{q-1} \in \mathcal{S}$$

$\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\mathcal{P}(R)^{is}$ engendrée par les endomorphismes de la forme

$$c_{X,X} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$$
$$(a,b) \longmapsto (b,a)$$

$X \in \mathcal{P}(R)$.

En vertu des remarques faites au début de la démonstration et des relations $\overset{(2)}{(18)}$, $\overset{(3)}{(19)}$ nous obtenons

$$[(X,f)] = [(X,f)] + [(C, id)] = [(X \oplus C,\ f \oplus id)] =$$

$$= [(X \oplus C,\ (v_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} v_q)^{-1} (V_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} V_q))] =$$

$$= [(Y \oplus 0, (U_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} U_p)(u_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p)^{-1})] = [(Y,g)] + [(0, id)] = [(Y,g)]$$

On en déduit une application i_1 de $\Pi_1(\underline{P})$ dans $K_1(R)$

$$i_1 : \overline{(X,f)} \longmapsto [(X,f)]$$

Elle est aussi un homomorphisme de groupe, compte tenu de $\underbrace{(15) \text{ et } (17)^{(3)}}_{\text{du } (\S 2, n^\circ 2)}$. Définissons maintenant une application j_1 de l'ensemble des générateurs de $K_1(R)$ dans $\Pi_1(\underline{P})$ par

$$j_1 : [(X,f)] \longmapsto \overline{(X,f)}$$

En vertu de la formule $\underbrace{(16)}_{\text{du } (\S 2, n^\circ 2)}$, nous avons

$$[(X,f)] + [(X,g)] = [(X,fg)] \xmapsto{j_1} \overline{(X,fg)} = \overline{(X,f)} + \overline{(X,g)}$$

ce qui veut dire que les images par j_1 des générateurs de $K_1(R)$ respectent la relation (18)[2]. Reste la relation (19)[3] à considérer. Soit

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\theta} & X'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\theta} & X'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

un diagramme commutatif dans $\mathcal{P}(R)$ où les lignes sont exactes et $f', f,$ f'' des automorphismes. Puisque X'' est projectif, il existe des homomorphismes de R-modules $\sigma' : X \longrightarrow X'$, $\theta' : X'' \longrightarrow X$ tels que

(20)(4) $$\sigma'\sigma = id_{X'}, \quad \theta\theta' = id_{X''}, \quad \sigma\sigma' + \theta'\theta = id_X$$

D'autre part les homomorphismes de R-modules

$$x \longmapsto (\sigma' x, \theta x), \quad (x', x'') \longmapsto \sigma x' + \theta' x''$$

de X dans $X' \oplus X''$ et de $X' \oplus X''$ dans X sont inverses l'un de l'autre. X et $X' \oplus X''$ sont donc isomorphes par ces isomorphismes. De plus, moyennant les relations (20)[14], on vérifie aussitôt que le diagramme

(21) (5)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix}\sigma' \\ \theta\end{pmatrix}} & X'\oplus X'' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}} \\ X & \xrightarrow{\begin{pmatrix}\sigma' \\ \theta\end{pmatrix}} & X'\oplus X'' \end{array}$$

est commutatif, où

$$\begin{pmatrix}\sigma' \\ \theta\end{pmatrix} : X \longrightarrow X' \cup X''$$
$$x \longmapsto (\sigma' x, \theta x)$$

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix} : X'\oplus X'' \longrightarrow X'\oplus X''$$
$$(x', x'') \longmapsto (f'x' + \sigma' f \theta' x'', f'' x'')$$

ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}$$

est un isomorphisme. La commutativité du diagramme (21) (5) nous donne (§2, n° 2, Diag (14)),

$$\overline{(X, f)} = \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}\right)}$$

Or

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f''\end{pmatrix}\begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f \theta' \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}$$

Donc en vertu des formules (15) et (16) du (§2, n° 2)

$$\overline{(X, f)} = \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}\right)} = \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f''\end{pmatrix}\right)} + \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f \theta' \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\right)}$$

$$= \overline{(X',f')} + \overline{(X'',f'')} + \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f\theta' \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)}$$

Prouvons que

$$\overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f\theta' \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)} = \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & 0 \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)}$$

ou plus généralement

$$\overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)} = \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & 0 \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)}$$

où $h : X'' \longrightarrow X'$ est un homomorphisme de R-modules quelconque (remarquons que bien que h soit quelconque,

$$\begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix} : X'\oplus X'' \longrightarrow X'\oplus X''$$

est un automorphisme de R-module, son inverse étant $\begin{pmatrix} id_{X'} & -h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}$).

Pour cela nous devons trouver des R-modules $C, D \in \mathcal{P}(R)$ et des isomorphismes de R-modules

$$u : (X'\oplus X'')\oplus C \longrightarrow (X'\oplus X'')\oplus D$$

$$v : (X'\oplus X'')\oplus C \longrightarrow (X'\oplus X'')\oplus D$$

tels que soit commutatif dans $\left(\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is}\right)^{\mathcal{S}}$ le diagramme

(3.5) (6)

$$\begin{tikzcd}
((X'\oplus X'')\oplus C, (X'\oplus X'')\oplus C) \arrow[r, "\left(\begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\oplus id_C,\, id\right)"] \arrow[d, "(u,u)"'] & ((X'\oplus X'')\oplus C, (X'\oplus X'')\oplus C) \arrow[d, "(v,v)"] \\
((X'\oplus X'')\oplus D, (X'\oplus X'')\oplus D) \arrow[r, "(id, id)"] & ((X'\oplus X'')\oplus D, (X'\oplus X'')\oplus D)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is}$ engendrée par les endomorphismes de la forme $(c_{X,X}, c_{X,X})$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(R)$, et

$$c_{X,X} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$$
$$(a,b) \longmapsto (b,a)$$

Prenons $C = D = X''$ et

$$u : X' \oplus X'' \oplus X'' \longrightarrow X' \oplus X'' \oplus X''$$
$$(x', x'', x''_1) \longmapsto (x' + h(x'' + x''_1),\ x'' + x''_1,\ x''_1)$$

$$v : X' \oplus X'' \oplus X'' \longrightarrow X' \oplus X'' \oplus X''$$
$$(x', x'', x''_1) \longmapsto (x' + h x''_1,\ x'' + x''_1,\ x''_1)$$

On voit aussitôt que u et v sont des isomorphismes de R-modules. Pour montrer que le diagramme $(\mathcal{G})$, où on a remplacé C et D par X'' et où u, v sont définis de la manière ci-dessus, est commutatif dans $(\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is})^{\mathcal{G}}$, nous décomposons l'identité $(id_{X' \oplus X'' \oplus X''}, id_{X' \oplus X'' \oplus X''})$ en le produit

$$(id_{X' \oplus X'' \oplus X''}, id_{X' \oplus X'' \oplus X''}) = (id_{X' \oplus X'' \oplus X''}, id_{X' \oplus X'' \oplus X''})(id, w)(id, w^{-1})$$

où

$$w = \begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix} \oplus id_{X''} : X' \oplus X' \oplus X'' \longrightarrow X' \oplus X' \oplus X'' ;$$

ensuite nous définissons $(\varepsilon, \varepsilon) : (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \longrightarrow (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'')$ par

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (id_{X'} \oplus c_{X'', X''} ; id_{X'} \oplus c_{X'', X''}) \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon(x', x'', x''_1) = (x', x''_1, x'')$$

Il est clair que $(\varepsilon, \varepsilon) \in \mathcal{S}$. Enfin la vérification de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[rr, "\left(\begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix} \oplus id_{X''},\, id\right)"] \arrow[d, "{(u,u)}"'] & & (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[d, "{(v,v)}"] \\
(X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[rr, "{(id,id)(\varepsilon,\varepsilon)(id,w)(\varepsilon,\varepsilon)(id,w^{-1})}"] & & (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'')
\end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is}$ est immédiate, ce qui prouve que $(\mathfrak{S})$ est commutatif dans $(\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is})^{\varphi}$, et par suite (§2, n°2) :

$$\text{~~(23)~~ (7)} \qquad \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)} = \overline{(X' \oplus X'', id)}$$

Puisque $\overline{(X, id_X)}$ est le zéro du groupe $\Pi_1(\underline{P})$ pour tout $X \in Ob\, \mathcal{P}(R)$, ce qu'on peut vérifier aussitôt, on peut donc écrire en vertu de la relation ~~(23)~~ (7)

$$[(X', f')] + [(X'', f'')] = [(X, f)] \longmapsto \overline{(X, f)} = \overline{(X', f')} + \overline{(X'', f'')} + \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1} \sigma' f \theta' \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)}$$

$$= \overline{(X', f')} + \overline{(X'', f'')} + \overline{(X' \oplus X'', id)}$$

$$= \overline{(X', f')} + \overline{(X'', f'')}$$

i.e les images par j_1 des générateurs de $K_1(R)$ respectent aussi la relation ~~(19)~~ (3). j_1 définit donc un homomorphisme noté aussi j_1 du groupe $K_1(R)$ dans le groupe $\Pi_1(\underline{P})$. On vérifie aussitôt que i_1 et j_1 sont inverses l'un de l'autre, on les appelle les <u>isomorphismes canoniques</u>. La proposition est ainsi démontrée.

<u>2. Catégorie de suspension.</u>

Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $S : \underline{C} \to \underline{C}$ un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$. On se propose de chercher une catégorie $\underline{\mathcal{P}}$, un foncteur i de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ et un foncteur p de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ tels que le triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ possède les propriétés suivantes :

1° p est une équivalence de catégorie et $iS \simeq pi$.

2° Pour tout triple $(\underline{Q}, j, q)$ ayant la propriété 1°, il existe un foncteur f et un seul (défini à isomorphisme fonctoriel près) de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{Q}$ tel que $fi \simeq j$, $fp \simeq qf$.

Proposition 3.– Le triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ existe.

Démonstration.– Soient N l'ensemble des entiers naturels, $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $m, n \in N$. On note $\phi((X,m),(Y,n))$ l'ensemble suivant

$$\phi((X,m),(Y,n)) = \{(a,b,u) \mid a, b \in N,\ a+m = b+n,\ u \in \mathrm{Fl}\,\underline{C},\ u : S^a X \to S^b Y\}.$$

où $S^a X = \underbrace{S(\dots\ (S(SX))\dots)}_{a \text{ fois}}$ et $S^0 X = X$. Soit $R_{(X,m),(Y,n)}$ une relation binaire dans $\phi((X,m),(Y,n))$ définie de façon suivante :

$$(a,b,u)\ R_{(X,m),(Y,n)}\ (a_1,b_1,u_1)$$

si et seulement s'il existe $c, c_1 \in N$ tels que $a+c = a_1+c_1$ (ce qui implique $b+c = b_1+c_1$) et $S^c u = S^{c_1} u_1$. On vérifie aussitôt que c'est une relation d'équivalence. On note $\langle a,b,u\rangle$ la classe d'équivalence de (a,b,u).

Soient $\langle a,b,u\rangle \in \phi_{(X,l),(Y,m)} / R_{(X,l),(Y,m)}$,

$\langle c,d,v\rangle \in \phi_{(Y,m),(Z,n)} / R_{(Y,m),(Z,n)}$, on peut vérifier que la classe d'équivalence

$$\langle a+c,\ b+d,\ S^b(v)\,S^c(u)\rangle \in \phi_{(X,l),(Z,n)} / R_{(X,l),(Z,n)}$$

ne dépend pas des représentants (a,b,u), (c,d,v). On l'appelle <u>composé</u> des classes $\langle a,b,u\rangle$, $\langle c,d,v\rangle$, et on la note

$$\langle c,d,v\rangle\ \langle a,b,u\rangle = \langle a+c,\ b+d,\ S^b(v)\ S^c(u)\rangle$$

Il est clair que

$$\langle b,c,v\rangle \langle a,b,u\rangle = \langle a,c,vu\rangle$$

et par suite on voit aussitôt l'associativité du produit des classes ainsi défini. Cela étant, définissons la catégorie $\underline{\mathcal{P}}$ par

$$\mathrm{Ob}\, \underline{\mathcal{P}} = \{ (X, m) \mid X \in \mathrm{Ob}\, \underline{C},\ m \in \mathbb{N} \}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{P}}}((X,m),(Y,n)) = \Phi((X,m),(Y,n)) \,/\, R_{(X,m),(Y,n)}$$

la loi de composition des flèches de $\underline{\mathcal{P}}$ étant le produit des classes défini ci-dessus. Ensuite on définit le foncteur i par

$$i : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "u"'] & (X,0) \arrow[d, "\langle 0,0,u \rangle"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & (Y,0) \end{tikzcd}$$

et le foncteur p par

$$p : \underline{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{tikzcd} (X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\langle a,b,u \rangle"'] & (SX,m) \arrow[d, "\langle a,b,Su \rangle"] \\ (Y,n) \arrow[r, mapsto] & (SY,n) \end{tikzcd}$$

Il est clair que $p\langle a,b,u\rangle$ ne dépend pas du représentant (a,b,u).
Soit $\tilde{p}$ un autre foncteur de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ défini par

$$\tilde{p} : \underline{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{tikzcd} (X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\langle a,b,u \rangle"'] & (X,m+1) \arrow[d, "\langle a,b,u \rangle"] \\ (Y,n) \arrow[r, mapsto] & (Y,n+1) \end{tikzcd}$$

On vérifie aussitôt que

$$\tilde{p}\, p = p\, \tilde{p} \xrightarrow[\sim]{\xi} \mathrm{id}_{\underline{\mathcal{P}}}, \quad \xi_{(X,m)} = [0,1,\mathrm{id}_{SX}] \text{ pour tout } (X,m) \in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathcal{P}}.$$

ce qui montre que p est une équivalence de catégorie. Enfin la définition des foncteurs i, p donne $iS = pi$. Le triple $(\underline{P}, i, p)$ vérifie donc la propriété 1°.

Soit $(\underline{Q}, j, q)$ un autre triple vérifiant la propriété 1°, i.e il existe des isomorphismes fonctoriels β, η, ξ tels que

$$jS \overset{\beta}{\tilde{\to}} qj \ , \ \tilde{q}q \overset{\eta}{\tilde{\to}} id_{\underline{Q}} \ , \ q\tilde{q} \overset{\xi}{\tilde{\to}} id_{\underline{Q}}$$

$\tilde{q}$ étant un quasi-inverse de q. Ces isomorphismes fonctoriels nous donnent l'isomorphisme composé

$$\tilde{q}jS \xrightarrow[\sim]{\tilde{q} * \beta} \tilde{q}qj \xrightarrow[\sim]{\eta * j} j \quad ,$$

par suite nous pouvons définir un foncteur f de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ de façon suivante

$$f : \underline{P} \longrightarrow \underline{Q}$$

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{\langle a, b, u\rangle}"'] & \tilde{q}^{m} jX \arrow[d, "{f\langle a, b, u\rangle}"] \\
(Y, n) \arrow[r, mapsto] & \tilde{q}^{n} jY
\end{tikzcd}$$

$f\langle a, b, u\rangle$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\cancel{(24)}(8) \quad \begin{tikzcd}[column sep=large]
\tilde{q}^{m} jX \arrow[d, "{f\langle a,b,u\rangle}"] & \tilde{q}^{m+1} jSX \arrow[l, "{\tilde{q}^{m}(\eta_{jX} \circ \tilde{q}(\beta_X^{-1}))}"'] & \tilde{q}^{m+2} jS^2X \ldots \arrow[l, "{\tilde{q}^{m+1}(\eta_{jSX} \circ \tilde{q}(\beta_{SX}^{-1}))}"'] & \tilde{q}^{m+a} jS^aX \arrow[l] \arrow[d, "{\tilde{q}^{m+a} ju}"] \\
\tilde{q}^{n} jY & \tilde{q}^{n+1} jSY \arrow[l, "{\tilde{q}^{n}(\eta_{jY} \circ \tilde{q}(\beta_Y^{-1}))}"'] & \tilde{q}^{n+2} jS^2Y \ldots \arrow[l, "{\tilde{q}^{n+1}(\eta_{jSY} \circ \tilde{q}(\beta_{SY}^{-1}))}"'] & \tilde{q}^{n+b} jS^bY \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Prouvons que $f\langle a, b, u\rangle$ ne dépend pas du représentant (a, b, u). Soit donc un autre triple (a_1, b_1, u_1) tel que $\langle a_1, b_1, u_1\rangle = \langle a, b, u\rangle$. Il existe alors $c, c_1 \in \mathbb{N}$ tels que $a + c = a_1 + c_1$ et $S^c(u) = S^{c_1}(u_1)$. Le diagramme commutatif ~~(24)~~ (8). nous permet de conclure la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\tilde{q}^{m} j X \arrow[r, "f\langle a,b,u\rangle"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[ddddd, bend right=60, "id"'] & \tilde{q}^{n} j Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[ddddd, bend left=60, "id"] \\
\tilde{q}^{m+a} j S^{a} X \arrow[r, "\tilde{q}^{m+a} j u"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \tilde{q}^{n+b} j S^{b} Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\tilde{q}^{m+a+c} j S^{a+c} X \arrow[r, "\tilde{q}^{m+a+c} j S^{c} u"] \arrow[d, equal] & \tilde{q}^{n+b+c} j S^{b+c} Y \arrow[d, equal] \\
\tilde{q}^{m+a_1+c_1} j S^{a_1+c_1} X \arrow[r, "\tilde{q}^{m+a_1+c_1} j S^{c_1} u_1"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \tilde{q}^{n+b_1+c_1} j S^{b_1+c_1} Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\tilde{q}^{m+a_1} j S^{a_1} X \arrow[r, "\tilde{q}^{m+a_1} j u_1"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \tilde{q}^{n+b_1} j S^{b_1} Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\tilde{q}^{m} j X \arrow[r, "f\langle a_1,b_1,u_1\rangle"] & \tilde{q}^{n} j Y
\end{tikzcd}$$

ce qui donne $f\langle a,b,u\rangle = f\langle a_1,b_1,u_1\rangle$. Le foncteur f ainsi défini, on vérifie aussitôt que $fi = j$. De plus, au moyen des isomorphismes fonctoriels β, γ, ζ nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
qf(X,m) \arrow[r, "qf\langle a,b,u\rangle"] \arrow[d, equal] & qf(Y,n) \arrow[d, equal] \\
q\tilde{q}^{m} j X \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & q\tilde{q}^{n} j Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
q\tilde{q}^{m+a} j S^{a} X \arrow[r, "q\tilde{q}^{m+a} j u"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & q\tilde{q}^{n+b} j S^{b} Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\tilde{q}^{m+a} q j S^{a} X \arrow[r, "\tilde{q}^{m+a} q j u"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \tilde{q}^{n+b} q j S^{b} Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\tilde{q}^{m+a} j S^{a+1} X \arrow[r, "\tilde{q}^{m+a} j S u"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \tilde{q}^{n+b} j S^{b+1} Y \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\tilde{q}^{m} j S X \arrow[r, "f\langle a,b,Su\rangle"] \arrow[d, equal] & \tilde{q}^{n} j S Y \arrow[d, equal] \\
fp(X,m) \arrow[r, "fp\langle a,b,u\rangle"] & fp(Y,n)
\end{tikzcd}$$

i.e $qf \simeq fp$. Enfin prouvons que f est unique (à isomorphisme fonctoriel près). Soit $g : \underline{P} \longrightarrow \underline{Q}$ un autre foncteur tel que $gi \simeq j$ et $gp \simeq qg$. D'abord remarquons que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(X,m) \arrow[r, "{\langle a,0,id_{S^aX}\rangle}"] \arrow[d, "{\langle a,b,u\rangle}"'] & (S^aX, a+m) \arrow[d, "{\langle 0,0,u\rangle}"] \\
(Y,n) \arrow[r, "{\langle b,0,id_{S^bY}\rangle}"] & (S^bY, b+n)
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour $(X,m), (Y,n) \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$, $\langle a,b,u\rangle \in \mathrm{Hom}\,((X,m),(Y,n))$. Ensuite au moyen des isomorphismes fonctoriels donnés, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
g(X,m) \arrow[r, "{g\langle a,0,id\rangle}"] \arrow[d, "{g\langle a,b,u\rangle}"'] & g(S^aX, a+m) \simeq \tilde{q}^{a+m}\, q^{a+m} \arrow[d, "{g\langle 0,0,u\rangle}"] & g(S^aX, a+ \arrow[d, "{\tilde{q}^{a+m}\, q^{a+m}\, g\langle 0,0,u\rangle}"] \\
g(Y,n) \arrow[r, "{g\langle b,0,id\rangle}"] & g(S^bY, b+n) \simeq \tilde{q}^{b+n}\, q^{b+n} & g(S^bY, b+
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\tilde q^{a+m} g(S^a X, a+m) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,0,u\rangle"'] & \tilde q^{a+m} g p^{a+m}(S^a X, a+m) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, dashed, "\tilde q^{a+m} g p^{a+m}\langle 0,0,u\rangle"'] & \tilde q^{a+m} g(S^{2a+m} X, a+m) \arrow[r, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,a+m,id\rangle"] \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,0,S^{a+m}u\rangle"'] & \tilde q^{a+m} g(S^a X, 0) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,0,u\rangle"'] & \tilde q^{a+m} g_* S^a X \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g_* u"'] & \tilde q^{a+m} j_* S^a X \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\tilde q^{a+m} j_* u"'] & \tilde q^{m}_{j} X = f(X,m) \arrow[d, "f\langle a,b,u\rangle"'] \\
\tilde q^{b+n} g(S^b Y, b+n) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{b+n} g p^{b+n}(S^b Y, b+n) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{b+n} g(S^{2b+n} Y, b+n) \arrow[r, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,b+n,id\rangle"] & \tilde q^{b+n} g(S^b Y, 0) \arrow[r, phantom, "="] & \tilde q^{b+n} g_* S^b Y \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{b+n} j_* S^b Y \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{n}_{j} Y = f(Y,n)
\end{tikzcd}
$$

ce qui permet de conclure que $g \simeq f$. L'assertion est ainsi démontrée.

Voici une autre variante du triple $(\underline{P}, i, p)$.

<u>Proposition 4</u>.– La catégorie $\underline{P}$ est équivalente à la catégorie $\underline{P}'$ définie de façon suivante

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P}' = \{(X, m) \mid X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ m \in Z\} \quad Z \text{ étant l'ensemble des entiers}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}'}((X,m),(Y,n)) = \varinjlim_{k \to \infty} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(S^{k+m}X, S^{k+n}Y)$$

où k part de la valeur k_0 définie par $k_0 + \min(m, n) = 0$.

<u>Démonstration</u>.– Pour $\underbrace{(X,m), (Y,n)}_{\in \mathrm{Ob}\,\underline{P}'}$, notons par $\overline{(k,u)}$ la flèche $(X,m) \longrightarrow (Y,n)$ où $u : S^{k+m}X \longrightarrow S^{k+n}Y$. Ensuite considérons le foncteur t de $\underline{P}$ dans $\underline{P}'$ défini de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
(X,m) & \longmapsto & t(X,m) = (X, -m) \\
{\scriptstyle \langle a,b,u\rangle}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle t\langle a,b,u\rangle = \overline{(a+m,\, u)}} \\
(Y,n) & \longmapsto & t(Y,n) = (Y, -n)
\end{array}$$

On vérifie aussitôt que t est un foncteur pleinement fidèle. De plus pour chaque objet $(X, m) \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}'$, on a

$$(X, m) = t(X, -m) \quad \text{si } m < 0$$

$$(X, m) \xrightarrow[\sim]{\overline{(0,\, id_{S^m X})}} (S^m X, 0) = t(S^m X, 0) \quad \text{si } m > 0$$

Par conséquent, t est une équivalence. Enfin considérons le foncteur

$$p' : \underline{P}' \longrightarrow \underline{P}'$$

$$\begin{array}{ccc}
(X,m) & \longmapsto & (SX, m) \\
{\scriptstyle \overline{(k,u)}}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \overline{(k,\, Su)}} \\
(Y,n) & \longmapsto & (SY, n)
\end{array}$$

on obtient aussitôt $tp = p't$. On en conclut que le triple $(\underline{P}', i', p')$ avec $i' = ti$, est aussi une solution du problème posé.

Dans le cas où le foncteur S est défini par

$$X \longmapsto X \otimes Z$$

Z étant un objet quelconque de $\underline{C}$ différent de l'objet unité $\underline{1}$, on dit que :

<u>Définition 3</u>.- Le triple $(\underline{P}, i, p)$ est la <u>catégorie de suspension</u> de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z. On retrouve la définition habituelle au cas où $\underline{C}$ est la catégorie homotopique pointée $\underline{Htp}_*$ munie du produit contracté $\wedge$, des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité naturelles ; et Z la 1-sphère S^1.

Dans tout ce qui suit du n°, $(\underline{P}, i, p)$ désigne la catégorie de suspension de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z. Essayons de définir dans $\underline{P}$ une loi $\otimes$ et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité de telle sorte que $\underline{P}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, iZ inversible dans $\underline{P}$, et i immergé dans un couple $(i, \breve{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ dans la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ compatible avec les contraintes. La chose la plus naturelle est de poser

$$(X, m) \otimes (Y, n) = (X \otimes Y, m + n) \tag{9}$$

pour $(X, m), (Y, n) \in \mathrm{Ob}\, \underline{P}$; et de définir $\langle a_1, b_1, u_1 \rangle \otimes \langle a_2, b_2, u_2 \rangle$ pour $\langle a_1, b_1, u_1 \rangle : (X_1, m_1) \to (Y_1, n_1)$, $\langle a_2, b_2, u_2 \rangle : (X_2, m_2) \to (Y_2, n_2)$ par le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
((\cdots(X_1\otimes Z_1)\otimes Z_2\cdots)\otimes Z_{a_1})\otimes((\cdots((X_2\otimes Z_{a_1+1})\otimes Z_{a_1+1})\cdots)\otimes Z_{a_1+a_2} \arrow[r, "u_1\otimes u_2"] \arrow[d] & ((\cdots((Y_1\otimes Z_1)\otimes Z_2)\cdots)\otimes Z_{b_1})\otimes((\cdots((Y_2\otimes Z_{b_1+1})\otimes Z_{b_1+2})\cdots)\otimes Z_{b_1+b_2}) \arrow[d] \\
(\cdots(((\cdots((X_1\otimes X_2)\otimes Z_1)\cdots)\otimes Z_{a_1})\otimes Z_{a_1+1})\cdots)\otimes Z_{a_1+a_2} \arrow[r, "w"] & (\cdots(((\cdots((Y_1\otimes Y_2)\otimes Z_1)\cdots)\otimes Z_{b_1})\otimes Z_{b_1+1})\cdots)\otimes Z_{b_1+b_2}
\end{tikzcd}
\tag{10}
$$

en posant

(11) $$\langle a_1, b_1, u_1\rangle \oplus \langle a_2, b_2, u_2\rangle = \langle a_1+a_2, b_1+b_2, w\rangle$$

les flèches verticales du diagramme (10) étant construites à l'aide des flèches d'associativité, de commutativité, d'identité ; et les Z_i dans ce diagramme tous égaux à Z. Ici nous devons prouver que le produit tensoriel des flèches ainsi défini ne dépend pas des représentants (a_1, b_1, u_1), (a_2, b_2, u_2). Or l'exemple qui suit nous montre qu'il n'en est rien.
Considérons le cas où $\underline{C}$ est la catégorie des R-modules munie de la loi $\oplus$ somme directe, R étant un anneau unitaire quelconque. Soient

$$\langle 1, 1, f_1 \oplus g_1\rangle : (X_1, 0) \longrightarrow (Y_1, 0)$$

$$\langle 1, 1, f_2 \oplus g_2\rangle : (X_2, 0) \longrightarrow (Y_2, 0)$$

Alors, en vertu de la formule (11)

$$\langle 1, 1, f_1 \oplus g_1\rangle \oplus \langle 1, 1, f_2 \oplus g_2\rangle = \langle 2, 2, w\rangle$$

avec w défini par le diagramme commutatif (10), qui est ici l'homomorphisme de R-modules suivant

$$w : X_1 \oplus X_2 \oplus Z \oplus Z \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus Z \oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2) \longmapsto (f_1 x_1, f_2 x_2, g_1 z_1, g_2 z_2)$$

Or $\langle 1, 1, f_1 \oplus g_1\rangle = \langle 2, 2, f_1 \oplus g_1 \oplus id_Z\rangle$ et $\langle 2, 2, f_1 \oplus g_1 \oplus id_Z\rangle \oplus$
$\oplus \langle 1, 1, f_2 \oplus g_2\rangle = \langle 3, 3, \omega\rangle$ avec

$$\omega : X_1 \oplus X_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) \longmapsto (f_1 x_1, f_2 x_2, g_1 z_1, z_2, g_2 z_3)$$

Regardons $\langle 2, 2, w \rangle$. Nous avons

$$\langle 2, 2, w \rangle = \langle 3, 3; w \oplus id_Z \rangle$$

où $w \oplus id_Z$ est l'homomorphisme

$$w \oplus id_Z : X_1 \oplus X_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) \longmapsto (f_1 x_1, f_2 x_2, g_1 z_1, g_2 z_2, z_3)$$

Pour $Z \neq 0$ et $g_2 \neq id_Z$, on a bien $w \oplus id_Z \neq \omega$, et par suite $\langle 3, 3, w \oplus id_Z \rangle \neq \langle 3, 3, \omega \rangle$, ce qui montre que le produit tensoriel des flèches défini par (11) dépend des représentants (a_1, b_1, u_1), (a_2, b_2, u_2) dans le cas de la catégorie des R-modules munie de la loi $\oplus$ somme directe. On peut vérifier qu'il en est de même de la catégorie homotopique ponctuée $\underline{Htp}_*$ munie du produit contracté $\wedge$.

Revenons au cas général. L'exemple ci-dessus nous montre qu'on ne peut pas définir un produit tensoriel dans $\underline{P}$ par les formules (9) et (11) quand la flèche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$ est différente de l'identité. Si nous supposons $c_{Z,Z} = id_{Z \otimes Z}$, alors nous pouvons vérifier que le produit tensoriel des flèches défini par la formule (11) ne dépend pas effectivement des représentants (a_1, b_1, u_1) (a_2, b_2, u_2), que la catégorie $\underline{P}$ munie de cette loi $\otimes$ est bien une $\otimes$-catégorie ACU avec les contraintes venant de façon naturelle des contraintes de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, et enfin que iZ est inversible dans $\underline{P}$ puisque le foncteur p est une équivalence. D'où la proposition :

<u>Proposition 5</u>.— Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, Z un objet de $\underline{C}$, $\mathcal{L}$ la partie multiplicative de $\underline{C}$ engendrée par la flèche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$, $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ la $\otimes$-catégorie quotient de $\underline{C}$ définie par $\mathcal{L}$, munie de la contrainte ACU : $(\bar{a}, \bar{c}, (\underline{1}, \bar{g}, \bar{d}))$ (§1, n°1, Déf. 2 et Prop. 3), et $(\underline{P}, j, \pi)$ la catégorie de suspension de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ définie par l'objet Z. Alors :

La catégorie $\underline{P}$ munie de la loi $\otimes$ définie par les formules (9) et (11), et des contraintes d'associativité $\langle 0, 0, \bar{a} \rangle$, de commutativité $\langle 0, 0, \bar{c} \rangle$, d'unité $((\underline{1}, 0), \langle 0, 0, \bar{g} \rangle, \langle 0, 0, \bar{d} \rangle)$ est une $\otimes$-catégorie ACU. Le couple $(j, \check{j} = id)$ est un $\otimes$-foncteur ACU et jZ inversible dans $\underline{P}$.

<u>Remarque</u>.— Les hypothèses étant celles de la proposition 5 et $(\mathcal{P}, i, p)$ désignant toujours la catégorie de suspension de $\underline{C}$ définie par Z, on peut décrire la catégorie $\underline{P}$ de façon suivante :

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{P}}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}((X, m), (Y, n)) = \{ [a, b, u] \mid a, b \in \mathbb{N},\ a + m = b + n,\ u : S^a X \to S^b Y \}$$

où $[a_1, b_1, u_1] = [a_2, b_2, u_2]$ si et seulement s'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ tels que $a_1 + c_1 = a_2 + c_2$ et $S^{c_1} u_1 = S^{c_2} u_2$ dans $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ (pas dans $\underline{C}$ comme le cas de $\underline{\mathcal{P}}$, ce qui fait la différence de $\underline{P}$ avec $\underline{\mathcal{P}}$).

Soient $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{C}$ dans $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ (§1, n°1, Déf 2) et $(\iota, \check{\iota}) = (j, \check{j}) \circ (H, \check{H}) : \underline{C} \to \underline{P}$.

<u>Proposition 6</u>.— Il existe un foncteur f unique (à isomorphisme,

fonctoriel près) de $\underline{P}$ dans $\underline{P}$ tel que $fi \simeq \iota$ et $fp \simeq \Pi f$. Le foncteur f n'est pas fidèle quand la flèche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$ est différente de l'identité $id_{Z\otimes Z}$.

<u>Démonstration</u>.- D'abord remarquons que le triple $(\underline{P}, \iota, \Pi)$ vérifie la condition 1° du problème posé, i.e. $\iota S = \Pi\iota$ et Π est une équivalence. Ensuite considérons le foncteur $f : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}$ défini par

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\langle a, b, u \rangle"'] & (X, m) \arrow[d, "{[a, b, u]}"] \\
(Y, n) \arrow[r, mapsto] & (Y, n)
\end{tikzcd}$$

On vérifie aussitôt que

$$fi = \iota \ ; \ fp = \Pi f \qquad (12)$$

D'où l'unicité de f définie à isomorphisme fonctoriel près (Prop. 3). La description de la catégorie $\underline{P}$ dans la remarque ci-dessus nous montre immédiatement que le foncteur f n'est pas fidèle pour $c_{Z,Z} \neq id_{Z\otimes Z}$.

Nous allons voir s'il est possible de munir la catégorie de suspension $\underline{P}$ de $\underline{C}$ définie par Z d'une loi $\otimes$ (définie autrement que par les formules (9) et (11) puisqu'on y a échoué) et des contraintes de telle sorte que $\underline{P}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, iZ inversible dans $\underline{P}$ et i immergé dans un couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$. Pour cela posons la définition suivante :

<u>Définition 4</u>.- Une sous-catégorie $\underline{A}$ d'une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ est

<u>$\otimes$-stable</u> si elle vérifie :

1° $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u_1 : A_1 \to B_1$, $u_2 : A_2 \to B_2 \in \mathrm{Fl}\,\underline{A} \Rightarrow$ $A_1 \otimes A_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $B_1 \otimes B_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u_1 \otimes u_2 : A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2 \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.

2° $\underline{1} \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \Rightarrow g_A, g_A^{-1}, d_A, d_A^{-1} \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.

3° $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \Rightarrow c_{A_1, A_2}, a_{A_1, A_2, A_3}, a^{-1}_{A_1, A_2, A_3} \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.

$(a, c, (1, g, d))$ étant la contrainte ACU de $\underline{C}$.

Tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ob}\,\underline{C}$ est contenu dans une sous-catégorie $\otimes$-stable $\underline{\mathcal{B}}$ telle que, si $\underline{A}$ est une sous-catégorie $\otimes$-stable et $\underline{A} \supset \mathcal{B}$, alors $\underline{A} \supset \underline{\mathcal{B}}$. $\underline{\mathcal{B}}$ est dite sous-catégorie $\otimes$-stable <u>engendrée</u> par $\mathcal{B}$. C'est un groupoïde dont les objets sont les produits tensoriels des objets appartenant à $\mathcal{B} \cup \{\underline{1}\}$, et dont les flèches sont les produits tensoriels des flèches de la forme $a, a^{-1}, c, c^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, id. La catégorie $\underline{\mathcal{B}}$ est évidemment une $\otimes$-catégorie ACU, la loi $\otimes$ et les contraintes de $\underline{\mathcal{B}}$ étant celles de $\underline{C}$.

Cela étant, revenons à notre problème. Soit $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de $\underline{C}$ engendrée par $\{Z\}$. Les objets de $\underline{C}'$ sont donc les produits tensoriels des objets appartenant à $\{\underline{1}, Z\}$. Soit

$$(F, \breve{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$$

le $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ défini par

$$F X' = X', \quad \breve{F}_{X', Y'} = \mathrm{id}_{X' \otimes Y'}$$

pour $X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$. Désignons par $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \breve{F}))$ et par $(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ le $\otimes$-foncteur canonique (§2, n°1, Déf. 1). En vertu de (§2, n°1) $\underline{P}$ est la catégorie suivante

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \{(X, X') \mid X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}\big((X,X'),(Y,Y')\big) = \Big\{ [A', B', (u,u')] \mid A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}' ; (u,u') : (X\otimes A', X'\otimes A') \longrightarrow (Y\otimes B', Y'\otimes B') \Big\}$$

où $[A'_1, B'_1, (u_1, u'_1)] = [A'_2, B'_2, (u_2, u'_2)]$ si et seulement s'il existe des objets C'_1, C'_2 et des isomorphismes $u' : A'_1\otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2$, $v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$ de $\underline{C}'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes(A'_1\otimes C'_1), X'\otimes(A'_1\otimes C'_1)) \arrow[r, "(a,a)"] \arrow[d, "(id\otimes u', id\otimes u')"'] & ((X\otimes A'_1)\otimes C'_1, (X'\otimes A'_1)\otimes C'_1) \arrow[r, "(u_1\otimes id, u'_1\otimes id)"] & ((Y\otimes B'_1)\otimes C'_1, (Y'\otimes B'_1)\otimes C'_1) \\
(X\otimes(A'_2\otimes C'_2), X'\otimes(A'_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "(a,a)"'] & & (Y\otimes(B'_1\otimes C'_1), Y'\otimes(B'_1\otimes C'_1)) \arrow[u, "(a,a)"'] \\
((X\otimes A'_2)\otimes C'_2, (X'\otimes A'_2)\otimes C'_2) \arrow[r, "(u_2\otimes id, u'_2\otimes id)"] & ((Y\otimes B'_2)\otimes C'_2, (Y'\otimes B'_2)\otimes C'_2) & (Y\otimes(B'_2\otimes C'_2), Y'\otimes(B'_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "(a,a)"'] \arrow[u, "(id\otimes v', id\otimes v')"']
\end{tikzcd}$$

soit commutatif dans $(\underline{C}\times\underline{C}')^{S}$, S étant la partie multiplicative de $\underline{C}\times\underline{C}'$ engendrée par les endomorphisme $(c_{Z,Z}, c_{Z,Z})$.

Considérons le foncteur $R : \underline{P} \to \underline{P}$ défini par

$$(X, X') \longmapsto (X,X')\otimes(Z, \underline{1})$$

R est bien une équivalence puisque $(Z,\underline{1})$ est inversible dans $\underline{P}$. Ensuite étudions le foncteur $\mathfrak{G} : \underline{\mathfrak{P}} \to \underline{P}$ donné par

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\langle \alpha, \beta, u\rangle"'] & (X, \underset{m}{\otimes} Z) \arrow[d, "{[\underset{\alpha}{\otimes} Z, \underset{\beta}{\otimes} Z, (\check{u}, \mathring{u})]}"] \\
(Y, n) \arrow[r, mapsto] & (Y, \underset{n}{\otimes} Z)
\end{tikzcd}$$

où

$$\underset{m}{\otimes} Z = \underbrace{(\ldots(Z\otimes Z)\otimes Z \ldots)\otimes Z}_{m \text{ fois}} \quad \text{si } m > 0$$

$$\underset{m}{\otimes} Z = \underline{1} \quad \text{si } m = 0$$

(il en de même de $\underset{n}{\otimes} Z$, $\underset{\alpha}{\otimes} Z$, $\underset{\beta}{\otimes} Z$)

$\check{u}$ est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\dots((X\otimes \underbrace{Z)\otimes Z)\dots)\otimes Z}_{\alpha \text{ fois}} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & (\dots((Y\otimes \underbrace{Z)\otimes Z)\dots)\otimes Z}_{\beta \text{ fois}} \arrow[d] \\
X\otimes(\underset{\alpha}{\otimes} Z) \arrow[r, "\check{u}"] & Y\otimes(\underset{\beta}{\otimes} Z)
\end{tikzcd}$$

les flèches verticales étant construites à l'aide de la contrainte d'associativité uniquement et dans le cas où $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) de la flèche $d_X : X \to X\otimes \underline{1}$ (resp. $d_Y : Y \to Y\otimes \underline{1}$) ;

$\mathring{u}$ est la flèche

$$(\underset{m}{\otimes} Z)\otimes(\underset{\alpha}{\otimes} Z) \xrightarrow{\mathring{u}} (\underset{n}{\otimes} Z)\otimes(\underset{\beta}{\otimes} Z)$$

construite à l'aide des contraintes d'associativité et d'unité.

Le foncteur $\mathcal{G}$ n'est pas en général fidèle. Prenons l'exemple suivant :

Soit $\underline{C}$ la catégorie de R-modules (R étant un anneau unitaire quelconque) munie de la loi $\oplus$ somme directe, les contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité étant les contraintes habituelles. Soit Z un R-module quelconque différent de O. Considérons dans $\underline{\mathcal{P}}$ deux flèches suivantes :

$$\langle 4, 4, c_{Z,Z}\oplus id_{Z\oplus Z}\rangle, \langle 4, 4, id_{Z\oplus Z}\oplus c_{Z,Z}\rangle : (0,0) \longrightarrow (0,0)$$

où

$$c_{Z,Z}\oplus id_{Z\oplus Z} : Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z \longrightarrow Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z$$
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto (z_2, z_1, z_3, z_4)$$

$$id_{Z\oplus Z}\oplus c_{Z,Z} : Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z \longrightarrow Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z$$
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto (z_1, z_2, z_4, z_3)$$

Nous avons bien

$$\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus id_{Z\oplus Z}\rangle \neq \langle 4, 4, id_{Z\oplus Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle$$

Considérons les images de ces flèches par $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus id_{Z\oplus Z}\rangle = \langle Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, (c_{Z,Z}\oplus id_{Z\oplus Z}, id_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})\rangle$$

$$\mathcal{G}\langle 4, 4, id_{Z\oplus Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle = \langle Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, (id_{Z\oplus Z}\oplus c_{Z,Z}, id_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})\rangle$$

Or le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z) \arrow[r, "{(c_{Z,Z}\oplus id_{Z\oplus Z}, id_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})}"] \arrow[d, "{(c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z}, c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z})}"'] & (Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z) \arrow[d, "{(c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z}, c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z})}"] \\
(Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z) \arrow[r, "{(id_{Z\oplus Z}\oplus c_{Z,Z}, id_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})}"'] & (Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z, Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z)
\end{tikzcd}$$

est commutatif dans $\underline{C}\times\underline{C}'$, et a fortiori dans $(\underline{C}\times\underline{C}')^{\mathcal{Y}}$, ce qui montre que

$$\mathcal{G}\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus id_{Z\oplus Z}\rangle = \mathcal{G}\langle 4, 4, id_{Z\oplus Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle$$

Cet exemple peut s'appliquer dans la catégorie homotopique pointée $\underline{Htp}_*$ où l'on prend pour Z la 1-sphère S^1.

Ces considérations faites, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

<u>Proposition 7</u>.- Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, Z un objet quelconque de $\underline{C}$ différent de l'objet unité $\underline{1}$, $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de $\underline{C}$ engendrée par Z, $(F,\check{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur ACU de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ défini par $FX' = X'$, $\check{F}_{X',Y'} = id_{X\otimes Y}$, $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ la catégorie de Suspension de $\underline{C}$ définie par Z, $(\underline{P}, \Phi, \check{\Phi})$ la catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F,\check{F}))$, et $\mathcal{G}$ le foncteur de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{P}$ défini par

$$\begin{array}{ccc} (X,m) & \longmapsto & (X, \underset{m}{\otimes} Z) \\ {\scriptstyle \langle \alpha, \beta, u \rangle} \downarrow & & \downarrow [\underset{\alpha}{\otimes} Z, \underset{\beta}{\otimes} Z, (\check{u}, \hat{u})] \\ (Y,n) & \longmapsto & (Y, \underset{n}{\otimes} Z) \end{array}$$

Si le foncteur $\mathcal{G}$ n'est pas fidèle, alors il est impossible de construire dans la catégorie de suspension $\underline{\mathcal{P}}$ une loi $\otimes$ de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, l'équivalence $p : \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$ le foncteur $(X,m) \mapsto (X,m) \otimes iZ$, et le foncteur i s'immergé dans un couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$.

<u>Démonstration</u>. – Supposons que $\underline{\mathcal{P}}$ soit munie d'une loi $\otimes$ et des contraintes de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, l'équivalence $p : \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$ le foncteur $(X,m) \mapsto (X,m) \otimes iZ$, ce qui implique que iZ est inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$, et le foncteur i s'immergé dans un couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$. En vertu de (§2, n°1, Prop. 1) il existe un $\otimes$-foncteur $(E', \breve{E}')$ de $\underline{P}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ tel que $(i, \check{i}) \simeq (E', \breve{E}') \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$, et par suite ~~$i \simeq E'\mathcal{D}$~~.

(12) $$i \simeq E'\mathcal{D}$$

D'autre part la définition des foncteurs $\mathcal{D}, i, \mathcal{G}, p, R$ nous donne

(13) $$\mathcal{G} i = \mathcal{D}$$

(14) $$R\mathcal{G} \simeq \mathcal{G} p$$

et compte tenu en plus de (12)

$$E'R(X,X') = E'((X \otimes X') \otimes \mathcal{D}Z) \overset{\breve{E}'}{\simeq} E'(X,X') \otimes E'\mathcal{D}Z \simeq E'(X,X') \otimes iZ =$$

$$= pE'(X,X')$$

pour tout $(X,X') \in \mathrm{Ob}\, \underline{P}$. Donc

(15) $$E'R \simeq pE'$$

On en déduit de (12), (13), (14), (15)

$$E'\mathcal{G}i \simeq i \, , \quad pE'\mathcal{G} \simeq E'\mathcal{G}p$$

D'où, en appliquant la proposition 3

$$E'\mathcal{G} \simeq id_{\underline{\mathcal{P}}}$$

i.e $\mathcal{G}$ est un foncteur fidèle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Table des matières

Bibliographie

[1] Bass, H : K-theory and stable algebra. Publ. math. de l'IHES, n° 22.

[2] Bénabou, J. : Thèse, Paris 1966.

[3] Bourbaki : Théorie des ensembles.

[4] ———— : Algèbre commutative.

[5] ———— : Algèbre multilinéaire.

[6] Deligne, P. : Champs de Picard strictement commutatifs. SGA 4 XVIII.

[7] Eilenberg, S. et Kelly, G. M : Closed category. Proceedings of the conference on categorical algebra (421-561). Springer-Verlag 1965.

[8] Freyd, P. : Stable homotopy. Proceedings of the conference on categorical algebra (121-176). Springer-Verlag 1965.

[9] Grothendieck, A. : Biextensions de faisceaux de groupes. SGA 7, exposé VII.

[10] — : Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif. Lecture notes in mathematics N° 79. Springer-Verlag 1968.

[11] Mac-Lane, S. : Categorical Algebra. Bull. Amer. Mat. Soc. 71 (1965).

[12] — : Homology. Springer-Verlag 1967.

[13] Mitchell, B. : Theory of categories. Academic Press 1965.

[14] Neantro Saavedra Rivano : Thèse, Paris (1970?)

[15] — : Catégories tanakiennes. Lecture notes in mathematics N° 265. Springer-Verlag 1972.

[16] Spanier, E : Algebraic topology. Mc Graw-Hill Inc. 1966.