Chapitre III

Pic-enveloppe d'une $\otimes$-catégorie ACU.

Dans ce chapitre nous nous occupons de deux problèmes universels, celui de rendre des objets "objet unité" et celui d'inverser des objets.

§1. Le problème de rendre des objets "objet unité".

Pour pouvoir résoudre ce problème, occupons-nous du problème suivant

1. Le problème de rendre des endomorphismes des identités.

de FCA forme

<u>Proposition 1.</u> – Soient $\underline{A}$ une catégorie, $\mathcal{S}$ une partie d'endomorphismes ~~K(A) telle que $\mathcal{S}$ contienne toutes les identités des objets de $\underline{A}$~~. Il existe une catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et un foncteur H de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $H(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$;

2° pour tout foncteur K de $\underline{A}$ dans une catégorie $\underline{B}$ tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, il existe un foncteur K' et un seul de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans $\underline{B}$ tel que $K = K' \circ H$.

En d'autres termes, $(\underline{A}^{\mathcal{S}}, H)$ est une solution du problème universel

$$K : \underline{A} \to \underline{B}\ ,\quad K(u) = id \text{ pour tout } u \in \mathcal{S}.$$

<u>Démonstration.</u> – Soient A, B des objets de $\underline{A}$ et $R_{A,B}$ une relation binaire définie dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$ de la manière suivante : pour u, $v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, on a $u\, R_{A,B}\, v$ si et seulement s'il existe un entier $n \geq 0$, des entiers strictement positifs p_0, p_i, q_i $(i = 1, \dots, n)$, q_{n+1}, et des morphismes

$$u^{(i)} = u_1^{(i)} u_2^{(i)} \cdots u_{p_i}^{(i)} = v_1^{(i)} v_2^{(i)} \cdots v_{q_i}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tels que $u = u_1^{(0)} u_2^{(0)} \cdots u_{p_0}^{(0)}$, $v = v_1^{(n+1)} v_2^{(n+1)} \cdots v_{q_{n+1}}^{(n+1)}$ et $u_1^{(j)} \varepsilon_1^{(j)} u_2^{(j)} \varepsilon_2^{(j)} \cdots \varepsilon_{p_j-1}^{(j)} u_{p_j}^{(j)} = v_1^{(j+1)} \varepsilon_1^{(j+1)} v_2^{(j+1)} \varepsilon_2^{(j+1)} \cdots$
$\cdots \varepsilon_{q_{j+1}-1}^{(j+1)} v_{q_{j+1}}^{(j+1)}$, $(j = 0, \dots, n)$; les $\varepsilon^{(\cdot)}$ étant des morphismes appartenant à $\mathcal{S}$. On vérifie aussitôt que $R_{A,B}$ est une relation d'équivalence dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, elle est la relation d'équivalence la plus faible identifiant les flèches de $\mathcal{S}$ avec des identités. Pour $u, v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, $u', v' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(B,C)$, $u \, R_{A,B} \, v$, $u' \, R_{B,C} \, v'$, on a aussitôt $u'u \, R_{A,C} \, u'v$, $u'v \, R_{A,C} \, v'v$, d'où $u'u \, R_{A,C} \, v'v$. Notons par $\bar{u}$ la classe d'équivalence contenant u.

Cela étant, posons

$$\mathrm{Ob}\, \underline{A}^{\mathcal{S}} = \mathrm{Ob}\, \underline{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{A}^{\mathcal{S}}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B) / R_{A,B}$$

$\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est donc une catégorie qui est une catégorie quotient de $\underline{A}$. Le foncteur $H : \underline{A} \to \underline{A}^{\mathcal{S}}$ est défini par les applications

$$A \longmapsto A$$

$$u : A \to B \longmapsto \bar{u} : A \to B$$

Il est clair que $H(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$. Enfin soient $\underline{B}$ une catégorie, $K : \underline{A} \to \underline{B}$ un foncteur tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, le foncteur $K' : \underline{A}^{\mathcal{S}} \to \underline{B}$ défini par les applications

$$A \longmapsto KA$$

$$\bar{u} : A \to B \longmapsto Ku : KA \to KB$$

est le seul foncteur de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans $\underline{B}$ tel que $K = K' \circ H$.

<u>Remarque</u>.– Quand la catégorie $\underline{A}$ est un groupoïde et $\varepsilon^{-1} \in \mathcal{S}$ pour tout $\varepsilon \in \mathcal{S}$, la relation d'équivalence $R_{A,B}$ dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$ peut être

décrite plus simplement : $u, u' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, $u \, R_{A,B} \, u'$ si et seulement s'il existe $u = u_1 u_2 \dots u_p$, $u' = u'_1 u'_2 \dots u'_q$ et $u_1 \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} u_p = u'_1 \varepsilon'_1 u'_2 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_{q-1} u'_q$, $\varepsilon_i, \varepsilon'_j \in \mathcal{S}$. En effet si cette dernière relation existe, il est clair qu'on a $u \, R_{A,B} \, u'$. Inversement supposons

$$u = u_1 u_2 \dots u_p , \quad v = v_1 v_2 \dots v_r = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s , \quad u' = u'_1 u'_2 \dots u'_q$$

et

$$u_1 \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} u_p = v_1 \mu_1 v_2 \mu_2 \dots \mu_{r-1} v_r ,$$

$$\omega_1 \nu_1 \omega_2 \nu_2 \dots \nu_{s-1} \omega_s = u'_1 \varepsilon'_1 u'_2 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_{q-1} u'_q$$

avec $\varepsilon_., \mu_., \nu_., \varepsilon'_. \in \mathcal{S}$. Alors on peut écrire

$$u = u_1 u_2 \dots u_p v_r^{-1} v_{r-1}^{-1} \dots v_2^{-1} v_2 \dots v_r ,$$

$$u' = u'_1 u'_2 \dots u'_q \omega_s^{-1} \omega_{s-1}^{-1} \dots \omega_2^{-1} \omega_2 \dots \omega_s$$

et on a

$$u_1 \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} u_p v_r^{-1} \mu_{r-1}^{-1} v_{r-1}^{-1} \mu_{r-2}^{-1} \dots v_3^{-1} \mu_2^{-1} v_2^{-1} \mu_1^{-1} v_2 v_3 \dots v_r =$$

$$= u'_1 \varepsilon'_1 u'_2 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_{q-1} u'_q \omega_s^{-1} \nu_{s-1}^{-1} \omega_{s-1}^{-1} \nu_{s-2}^{-1} \dots \omega_3^{-1} \nu_2^{-1} \omega_2^{-1} \nu_1^{-1} \omega_2 \omega_3 \dots \omega_s$$

puisque le 1er membre est égal à $v_1 v_2 \dots v_r$ et le 2e membre à $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s$.

Définition 1.- Soit $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie associative, et soit $\mathcal{E}$ la partie de $Fl\,\underline{A}$ se composant des flèches qui sont des endomorphismes. On dit qu'une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ est *multiplicative* si $id_X \in \mathcal{S}$ pour tout $X \in Ob\,\underline{A}$, et si le produit tensoriel de deux flèches de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$. On dit aussi que $\mathcal{S}$ est une partie multiplicative de $\underline{A}$.

de / des

Pour toute partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$, il existe des parties multiplicatives de $\mathcal{E}$

contenant $\mathcal{S}$, par exemple $\mathcal{E}$ lui-même. L'intersection de toutes ces parties est la plus petite partie multiplicative de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{S}$; on dit qu'elle est engendrée par $\mathcal{S}$. Il est immédiat que c'est l'ensemble formé de tous les produits tensoriels finis de flèches de $\mathcal{S}$ et des identités id_X.

Proposition 2.– Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, (a,c) sa contrainte AC, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. Il existe une $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et un $\otimes$-foncteur AC $(H,\check{H})$ de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $H(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$;

2° pour tout $\otimes$-foncteur AC $(K,\check{K})$ de la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}$ dans une $\otimes$-catégorie AC $\underline{B}$, tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, il existe un $\otimes$-foncteur AC $(K',\check{K}')$ et un seul de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans $\underline{B}$ tel que $(K,\check{K}) = (K',\check{K}')\circ(H,\check{H})$.

Démonstration.– Considérons la relation d'équivalence $R_{A,B}$ définie dans la proposition 1. Soient $u, v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, $u', v' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A',B')$, $u R_{A,B}\, v$, $u' R_{A',B'}\, v'$. On a aussitôt $(u\otimes id_{B'}) R_{A\otimes B', B\otimes B'} (v\otimes id_{B'})$, et $(id_A \otimes u') R_{A\otimes A', A\otimes B'} (id_A \otimes v')$, ce qui donne

$$u\otimes u' = (u\otimes id_{B'})(id_A\otimes u')\; R_{A\otimes A', B\otimes B'}\; (v\otimes id_{B'})(id_A\otimes v') = v\otimes v'$$

D'où dans la catégorie quotient $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ (voir Prop. 1) on peut construire une loi $\otimes$ dont le produit tensoriel de deux objets de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est le même que celui de $\underline{A}$ et dont le produit tensoriel de deux flèches est défini par

$$\bar{u}\otimes\bar{u}' = \overline{u\otimes u'}$$

les contraintes d'associativité et de commutativité pour $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ sont $\bar{a}$ et $\bar{c}$ respectivement. Il est clair qu'elles sont compatibles. La $\otimes$-catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est donc une $\otimes$-catégorie AC. Enfin le foncteur H est défini comme dans la proposition 1 et $\check{H} = id$. Le couple $(H,\check{H})$ est ainsi un $\otimes$-foncteur AC.

Soient $\underline{B}$ une $\otimes$-catégorie AC et $(K, \check{K}) : \underline{A} \to \underline{B}$ un $\otimes$-foncteur AC tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$. Le $\otimes$-foncteur $(K', \check{K}')$: $\underline{A}^{\mathcal{S}} \to \underline{B}$ avec K' défini comme dans la proposition 1 et $\check{K}' = \check{K}$ est le seul $\otimes$-foncteur AC tel que $(K, \check{K}) = (K', \check{K}') \circ (H, \check{H})$.

<u>Définition 2</u>.- Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie A,C, (a,c) sa contrainte AC, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. On appelle <u>$\otimes$-catégorie AC quotient</u> de $\underline{A}$ définie par $\mathcal{S}$ et on désigne par $\underline{A}^{\mathcal{S}}$, la catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ définie par

$$\mathrm{Ob}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{A}^{\mathcal{S}}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B) / R_{A,B}$$

munie de la structure de $\otimes$-catégorie AC définie par

$$\begin{cases} A \otimes B \text{ dans } \underline{A}^{\mathcal{S}} = A \otimes B \text{ dans } \underline{A}, & A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} \\ \bar{u} \otimes \bar{u}' = \overline{u \otimes u'}, & \bar{u}, \bar{u}' \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} \\ \text{contrainte AC} = (\bar{a}, \bar{c}) & \end{cases}$$

On appelle <u>$\otimes$-foncteur canonique</u> de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ le $\otimes$-foncteur AC :

$$A \longmapsto A$$

$$u : A \to B \longmapsto \bar{u} : A \to B.$$

On a aussitôt la proposition suivante

<u>Proposition 3</u>.- Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ sa contrainte ACU, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. La catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est une $\otimes$-catégorie ACU, sa contrainte d'unité étant $(\underline{1}, \bar{g}, \bar{d})$, et le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est un $\otimes$-foncteur ACU. La catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ constitue une solution du problème universel

$$(K, \check{K}) : \underline{A} \to \underline{B}, \quad K(u) = id \text{ pour tout } u \in \mathcal{S}$$

où $\underline{B}$ est une $\otimes$-catégorie ACU et $(K, \check{K})$ un $\otimes$-foncteur ACU.

2. Le problème de rendre des objets " objet unité".

Tout d'abord, introduisons un $\otimes$-foncteur

Définition 3.- Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AC, $\underline{P}$ une $\otimes$-catégorie ACU, sa contrainte d'unité étant notée $(\underline{1}_{\underline{P}}, g, d)$. On désigne par $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ le $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$ défini par

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \underline{1}_{\underline{P}} \\ u \downarrow & & \downarrow id_{\underline{1}_{\underline{P}}} \\ Y & \longmapsto & \underline{1}_{\underline{P}} \end{array}$$

$$\check{I}_{\underline{P}}(X,Y) = d^{-1} : I_{\underline{P}}(X) \otimes I_{\underline{P}}(Y) = \underline{1}_{\underline{P}} \otimes \underline{1}_{\underline{P}} \longrightarrow \underline{1}_{\underline{P}} = I_{\underline{P}}(X \otimes Y)$$

pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}$. Il est clair que $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est un $\otimes$-foncteur AC en vertu de la compatibilité des contraintes de $\underline{P}$. $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est appelé le <u>$\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{P}}$ constant</u> de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

Dans tout ce qui suit de ce n°, $\underline{A}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : (a,c), $\underline{A}'$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : (a', c') et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(T, \check{T}) : \underline{A}' \to \underline{A}$ un $\otimes$-foncteur AC. On se propose de chercher

1° Une $\otimes$-catégorie $\underline{P}$ munie des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité compatibles ;

2° Un $\otimes$-foncteur $(D, \check{D}) : \underline{A} \to \underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$

3° Un $\otimes$-isomorphisme fonctoriel

$$\lambda : (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$.

En plus, on veut que le triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ soit universel pour les triples $(\underline{Q}, (E,\check{E}), \mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3° ; i.e pour un triple $(\underline{Q}, (E,\check{E}), \mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3°, il existe un $\otimes$-foncteur $(E',\check{E}')$ et un seul de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité dans $\underline{P}$ et $\underline{Q}$, tel que $(E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D})$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\
ETA' \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mu_{A'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[u, "\hat{E}'"']
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, $\hat{E}' : \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'(\underline{1}_{\underline{P}})$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(E',\check{E}')$ avec les unités de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ (Chap. I, §4, n°2, Déf. 5).

Nous considérons le problème d'abord au cas où $A' = \emptyset$.

<u>Proposition 4</u>.– Soit $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : (a,c). Il existe une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur $(D,\check{D}) : \underline{A} \to \underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$, ayant la propriété suivante :

Pour tout $\otimes$-foncteur $(E,\check{E})$ de $\underline{A}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E',\check{E}')$ et un seul de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D})$ et que $id = \hat{E}' : \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'\underline{1}_{\underline{P}}$.

<u>Démonstration</u>.– Pour construire la catégorie $\underline{P}$, posons

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A} \cup \{\underline{1}_{\underline{P}}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A,B) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B), & A,B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \emptyset, & A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A},\ B = \underline{1}_{\underline{P}} \\ \emptyset, & A = \underline{1}_{\underline{P}},\ B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \{id_{\underline{1}_{\underline{P}}}\}, & A = B = \underline{1}_{\underline{P}} \end{cases}$$

La composition des flèches dans $\underline{P}$ se définit de façon naturelle à l'aide de la composition des flèches dans $\underline{A}$. Nous avons ainsi une catégorie.

Pour munir $\underline{P}$ d'une $\otimes$-structure, nous définissons le foncteur $\otimes : \underline{P} \times \underline{P} \to \underline{P}$ de la manière suivante, en nous servant de la loi $\otimes$ dans $\underline{A}$

$$\begin{array}{ccc} (A,B) & \longmapsto & A\otimes B \\ {\scriptstyle (u,v)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u\otimes v} \\ (C,D) & \longmapsto & C\otimes D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\underline{1}_{\underline{P}},A) & \longmapsto & A \\ {\scriptstyle (id,u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ (\underline{1}_{\underline{P}},B) & \longmapsto & B \end{array}$$

$A,B,C,D \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$

$u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$

$$\begin{array}{ccc} (A,\underline{1}_{\underline{P}}) & \longmapsto & A \\ {\scriptstyle (u,id)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ (B,\underline{1}_{\underline{P}}) & \longmapsto & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}}) & \longmapsto & \underline{1}_{\underline{P}} \\ {\scriptstyle (id,id)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ (\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}}) & \longmapsto & \underline{1}_{\underline{P}} \end{array}$$

On vérifie aussitôt que $\otimes$ ainsi défini est un foncteur. Il est clair que a défini de la façon suivante

$$a_{A,B,C}\ (\text{dans } \underline{P}) = a_{A,B,C}\ (\text{dans } \underline{A})$$

$$a_{\underline{1}_{\underline{P}},B,C} = id_{B\otimes C}\ ,\quad a_{A,\underline{1}_{\underline{P}},C} = id_{A\otimes C}\ ,\quad a_{A,B,\underline{1}_{\underline{P}}} = id_{A\otimes B}$$

$$a_{\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}},C} = id_C\ ,\quad a_{\underline{1}_{\underline{P}},B,\underline{1}_{\underline{P}}} = id_B\ ,\quad a_{A,\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}}} = id_A$$

pour $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ et

$$a_{\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}}} = id_{\underline{1}_{\underline{P}}}$$

constitue une contrainte d'associativité pour $\underline{P}$. Pour la contrainte de commutativité c, posons

$$c_{A,B}\ (\text{dans } \underline{P}) = c_{A,B}\ (\text{dans } \underline{A})$$

$$c_{\underline{1}_{\underline{P}},A} = id_A\ ,\quad c_{A,\underline{1}_{\underline{P}}} = id_A$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et

$$c_{\underline{1}_{\underline{P}}, \underline{1}_{\underline{P}}} = id_{\underline{1}_{\underline{P}}}$$

c est bien un isomorphisme fonctoriel et vérifie $c_{B,A} \circ c_{A,B} = id$ pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$. Finalement pour la contrainte d'unité, posons

$$g_A = id_A : A \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}} \otimes A = A \,, \quad d_A = id_A : A \xrightarrow{\sim} A \otimes \underline{1}_{\underline{P}} = A$$

pour $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et

$$g_{\underline{1}_{\underline{P}}} = d_{\underline{1}_{\underline{P}}} = id_{\underline{1}_{\underline{P}}} : \underline{1}_{\underline{P}} \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}} \otimes \underline{1}_{\underline{P}} = \underline{1}_{\underline{P}}$$

$(\underline{1}_{\underline{P}}, g, d)$ est manifestement une contrainte d'unité pour $\underline{P}$. On vérifie aussitôt que ces contraintes sont compatibles. $\underline{P}$ est donc une $\otimes$-catégorie ACU.

Posons

$$D(A) = A \,, \quad D(u) = u \,, \quad \check{D}_{A,B} = id_{A \otimes B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$. Il est immédiat que $(D, \check{D})$ est un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité.

Enfin, soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(E, \check{E}) : \underline{A} \to \underline{Q}$ un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité. Supposons qu'il existe un $\otimes$-foncteur $(E', \check{E}') : \underline{P} \to \underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité dans $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ tel que $(E, \check{E}) : (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ et $\hat{E}' = id_{\underline{1}_{\underline{Q}}}$. On obtient aussitôt

$$(1) \quad \begin{aligned} &E'(A) = E(A) \,, \; E'(\underline{1}_{\underline{P}}) = \underline{1}_{\underline{Q}} \,, \; E'(u) = E(u) \,, \; E'(id_{\underline{1}_{\underline{P}}}) = id_{\underline{1}_{\underline{Q}}} \\ &\check{E}'_{A,B} = \check{E}_{A,B} \,, \; \check{E}'_{\underline{1}_{\underline{P}}, A} = g^{-1}_{EA} \,, \; \check{E}'_{A, \underline{1}_{\underline{P}}} = d^{-1}_{EA} \,, \; \check{E}'_{\underline{1}_{\underline{P}}, \underline{1}_{\underline{P}}} = d^{-1}_{\underline{1}_{\underline{Q}}} = g^{-1}_{\underline{1}_{\underline{Q}}} \end{aligned}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ et $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$. D'où l'unicité de $(E', \check{E}')$.

Pour construire $(E', \check{E}')$, définissons le par les formules (1).

On vérifie aisément que c'est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$, tel que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ et $\hat{E}' = id_{\underline{1}_{\underline{Q}}}$, ce qui démontre l'assertion.

Revenons au cas général ~~où $\underline{A}' \neq \emptyset$~~ les hypothèses sur $\underline{A}$, $\underline{A}'$, $(T, \check{T}) : \underline{A}' \to \underline{A}$ sont toujours comme au début du n°.

<u>Proposition 5</u>.- Soient $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $\Phi(A,B)$ l'ensemble des triples (A', B', u) où $A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$, $u : A \otimes TA' \longrightarrow B \otimes TB'$. Soit $\mathcal{R}_{A,B}$ ~~une~~ la relation binaire définie dans $\Phi(A,B)$ de la façon suivante :

$$(A'_1, B'_1, u_1)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_2, B'_2, u_2)$$

si et seulement s'il existe des isomorphismes

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2 \ , \quad v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

dans $\underline{A}'$ pour des objets C'_1, C'_2 de $\underline{A}'$, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, "id \otimes Tu'"] & A \otimes T(A'_2 \otimes C'_2) & \\
A \otimes (TA'_1 \otimes TC'_1) \arrow[ur, "id \otimes \check{T}"] \arrow[d, "a"] & & & A \otimes (TA'_2 \otimes TC'_2) \arrow[ul, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[d, "u_1 \otimes id"] & & & (A \otimes TA'_2) \otimes TC'_2 \arrow[d, "u_2 \otimes id"] \\
(B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 & & & (B \otimes TB'_2) \otimes TC'_2 \\
B \otimes (TB'_1 \otimes TC'_1) \arrow[u, "a"] \arrow[dr, "id \otimes \check{T}"'] & & & B \otimes (TB'_2 \otimes TC'_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[dl, "id \otimes \check{T}"] \\
 & B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, "id \otimes Tv'"'] & B \otimes T(B'_2 \otimes C'_2) &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. $\mathcal{R}_{A,B}$ est une relation d'équivalence.

<u>Démonstration</u> - la relation $\mathcal{R}_{A,B}$ est manifestement réflexive et sy-

métrique. Montrons qu'elle est transitive. Soient $(A'_1, B'_1, u_1), (A'_2, B'_2, u_2)$ $(A'_3, B'_3, u_3) \in \bar{\Phi}(A,B)$ tels que $(A'_1, B'_1, u_1)\, \mathcal{R}_{A,B}\, (A'_2, B'_2, u_2)$ et $(A'_2, B'_2, u_2)\, \mathcal{R}_{A,B}\, (A'_3, B'_3, u_3)$, i.e il existe des isomorphismes

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \simeq A'_2 \otimes C'_2 , \quad v' : B'_1 \otimes C'_1 \simeq B'_2 \otimes C'_2$$

$$v'' : A'_2 \otimes C''_2 \simeq A'_3 \otimes C'_3 , \quad w' : B'_2 \otimes C''_2 \simeq B'_3 \otimes C'_3$$

pour des objets C'_1, C'_2, C''_2, C'_3 de $\underline{A}'$ tels qu'on ait la commutativité des diagrammes (2) et du diagramme (3) suivant

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes T(A'_2 \otimes C''_2) \arrow[r, "id \otimes Tv''"] & A \otimes T(A'_3 \otimes C'_3) & \\
A \otimes (TA'_2 \otimes TC''_2) \arrow[ur, "id \otimes \check{T}"] \arrow[d, "a"] & & & A \otimes (TA'_3 \otimes TC'_3) \arrow[ul, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(A \otimes TA'_2) \otimes TC''_2 \arrow[d, "u_2 \otimes id"] & & & (A \otimes TA'_3) \otimes TC'_3 \arrow[d, "u_3 \otimes id"] \\
(B \otimes TB'_2) \otimes TC''_2 & & & (B \otimes TB'_3) \otimes TC'_3 \\
B \otimes (TB'_2 \otimes TC''_2) \arrow[u, "a"] \arrow[dr, "id \otimes \check{T}"'] & & & B \otimes (TB'_3 \otimes TC'_3) \arrow[u, "a"'] \arrow[dl, "id \otimes \check{T}"] \\
& B \otimes T(B'_2 \otimes C''_2) \arrow[r, "id \otimes w'"] & B \otimes T(B'_3 \otimes C'_3) &
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

Il faut faire attention quand on a parlé de la commutativité des diagrammes (2) et (3) : dans ces diagrammes toutes les flèches sont inversibles sauf $u_1 \otimes id_{TC'_1}$, $u_2 \otimes id_{TC'_2}$, $u_2 \otimes id_{TC''_2}$, $u_3 \otimes id_{TC'_3}$.

Venons maintenant à la démonstration. Pour cela, considérons les diagrammes (4) et (5) suivants

(4)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes T((A'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[ddddd, bend right=60, "id\otimes T(u'\otimes id)"'] & A\otimes T(A'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (\arrow[d, phantom, "\mathrm{II}"] \\
A\otimes(T(A'_1\otimes C'_1)\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] & & \mathrm{(I)} & (A\otimes TA'_1)\otimes(TC'_1\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes \check{T}"] \arrow[d, "a"'] \arrow[r, "u_1\otimes(id\otimes id)"] & (\arrow[d, phantom, "\mathrm{III}"] \\
(A\otimes T(A'_1\otimes C'_1))\otimes TC''_2 \arrow[d, "(id\otimes Tu')\otimes id"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{X}"', shift right=6] & & (A\otimes(TA'_1\otimes TC'_1))\otimes TC''_2 \arrow[ll, "(id\otimes \check{T})\otimes id"'] \arrow[r, "a\otimes id"] & ((A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1)\otimes TC''_2 \arrow[r, "(u_1\otimes id)\otimes id"] & ((\arrow[d, phantom, "\mathrm{V}"] \\
(A\otimes T(A'_2\otimes C'_2))\otimes TC''_2 & & (A\otimes(TA'_2\otimes TC'_2))\otimes TC''_2 \arrow[ll, "(id\otimes \check{T})\otimes id"'] \arrow[r, "a\otimes id"] & ((A\otimes TA'_2)\otimes TC'_2)\otimes TC''_2 \arrow[r, "(u_2\otimes id)\otimes id"] & ((\arrow[d, phantom, "\mathrm{VII}"] \\
A\otimes(T(A'_2\otimes C'_2)\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "id\otimes \check{T}"] & & \mathrm{(VI)} & (A\otimes TA'_2)\otimes(TC'_2\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"] \arrow[d, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "u_2\otimes(id\otimes id)"] & (\arrow[d, phantom, "\mathrm{VIII}"] \\
A\otimes T((A'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) & A\otimes T(A'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B
\end{tikzcd}
$$

(5)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"] & A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(XII)}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[d, "id\otimes Tc"'] \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B \arrow[d, phantom, "\mathrm{XI}"] \\
A\otimes T((A'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes T(u'\otimes id)"] & A\otimes T(A'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B \arrow[d, phantom, "\mathrm{XV}"] \\
A\otimes T((A'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) & A\otimes T(A'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"] & A\otimes(TA'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(XVI)}"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes Tc'"'] \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B \arrow[d, phantom, "\mathrm{XVII}"] \\
 & A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) & A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots\otimes C''_2) \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes \check{T}"] & B\otimes T(B'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[ddddd, bend left=60, "id\otimes T(v'\otimes id)"] \\
\cdots\otimes TC''_2) \arrow[r, "u_1\otimes(id\otimes id)"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes(TC'_1\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"] & & (\mathrm{IV}) & B\otimes(T(B'_1\otimes C'_1)\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, "a"] \\
\cdots)\otimes TC''_2 \arrow[r, "(u_1\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1)\otimes TC''_2 & (B\otimes(TB'_1\otimes TC'_1))\otimes TC''_2 \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[rr, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & & (B\otimes T(B'_1\otimes C'_1))\otimes TC''_2 \arrow[d, "(id\otimes Tv)\otimes id"'] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(\mathrm{XI})"] \\
\cdots)\otimes TC''_2 \arrow[r, "(u_2\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VII})"] & ((B\otimes TB'_2)\otimes TC'_2)\otimes TC''_2 & (B\otimes(TB'_2\otimes TC'_2))\otimes TC''_2 \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[rr, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & & (B\otimes T(B'_2\otimes C'_2))\otimes TC''_2 \\
\cdots\otimes TC''_2) \arrow[r, "u_2\otimes(id\otimes id)"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (B\otimes TB'_2)\otimes(TC'_2\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] & (\mathrm{IX}) & & B\otimes(T(B'_2\otimes C'_2)\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] \\
\cdots\otimes C''_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] & B\otimes T((B'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) \\
\cdots\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XII})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[d, "id\otimes Tc'"] & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XIV})"] & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"'] & \\
\cdots\otimes C''_2) \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XV})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes T(v'\otimes id)"'] \\
\cdots\otimes C''_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XVII})"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes Tc'"] & B\otimes(TB'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XVIII})"] & B\otimes T(B'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"'] & B\otimes T((B'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) \\
\cdots\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) &
\end{tikzcd}
$$

dans lesquels la commutativité des régions (I), (IV), (VI), (IX), (XII), (XIV), (XVI), (XVIII) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (II), (VIII) de la fonctorialité de $\check{T}$; celle de (III), (VII) de la fonctorialité de a ; celle de (V) est donnée par l'hypothèse ; celle de (X), (XI) vient de la fonctorialité de a et $\check{T}$; enfin celle de (XIII) et (XVII) découle de la fonctorialité de c'. On en conclut la commutativité du circuit extérieur du diagramme (4), et par suite celle du circuit extérieur de (5) en remarquant que la région (XV) de (5) n'est ~~pas~~ autre que le circuit extérieur de (4). Ces considérations nous permet d'affirmer qu'il existe des isomorphismes

$$A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) \xrightarrow[\sim]{u'_1} A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)\,,\quad B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) \xrightarrow[\sim]{v'_1} B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)$$

$$A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) \xrightarrow[\sim]{v''_1} A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)\,,\quad B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) \xrightarrow[\sim]{w'_1} B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)$$

définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "id\otimes c'"] \arrow[d, "u'_1"'] & A'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (A'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2 \arrow[d, "u'\otimes id"] \\
A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "id\otimes c'"] & A'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (A'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "id\otimes c'"] \arrow[d, "v'_1"'] & B'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (B'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2 \arrow[d, "v'\otimes id"] \\
B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "id\otimes c'"] & B'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (B'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "v''_1"'] & (A'_2\otimes C''_2)\otimes C'_2 \arrow[d, "v''\otimes id"] \\
A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] & (A'_3\otimes C'_3)\otimes C'_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "w'_1"'] & (B'_2\otimes C''_2)\otimes C'_2 \arrow[d, "w'\otimes id"] \\
B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] & (B'_3\otimes C'_3)\otimes C'_2
\end{tikzcd}$$

tels que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes \check{T}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"'] \\
A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes Tu'_1"] & & (6) & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes Tv'_1"'] \\
A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes \check{T}"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"'] \\
A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "id\otimes Tv''_1"] & & (7) & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "id\otimes Tw'_1"'] \\
A\otimes T(A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "u_3\otimes id"] & (B\otimes TB'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"']
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de conclure la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes \check{T}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"'] \\
A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(v''_1u'_1)"] & & & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(w'_1v'_1)"'] \\
A\otimes T(A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "u_3\otimes id"] & (B\otimes TB'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"']
\end{tikzcd}$$

D'où $(A'_1, B'_1, u_1)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_3, B'_3, u_3)$. Nous désignons par $[A', B', u]$ la classe d'équivalence de (A', B', u).

<u>Remarques</u>. — 1) Soient $[A'_1, B'_1, u_1]$, $[A'_2, B'_2, u_2] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $u' : A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$, $v' : B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes TA'_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "id \otimes Tu'"'] & B \otimes TB'_1 \arrow[d, "id \otimes Tv'"] \\
A \otimes TA'_2 \arrow[r, "u_2"] & B \otimes TB'_2
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors $[A'_1, B'_1, u_1] = [A'_2, B'_2, u_2]$. En effet, prenons un objet quelconque C'_1 de $\underline{A}'$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[d, "id \otimes T(u' \otimes id)"] & A \otimes (TA'_1 \otimes TC'_1) \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id \otimes (Tu' \otimes id)"] & (A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1 \otimes id"] \arrow[d, "(id \otimes Tu') \otimes id"] & (B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 \arrow[d, "(id \otimes Tv') \otimes id"] & B \otimes (TB'_1 \otimes TC'_1) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] \arrow[d, "id \otimes (Tv' \otimes id)"] & B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[d, "id \otimes T(v' \otimes id)"] \\
A \otimes T(A'_2 \otimes C'_1) & A \otimes (TA'_2 \otimes TC'_1) \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA'_2) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_2 \otimes id"] & (B \otimes TB'_2) \otimes TC'_1 & B \otimes (TB'_2 \otimes TC'_1) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] & B \otimes T(B'_2 \otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

ayant ses régions commutatives, ce qu'on peut vérifier aussitôt, nous donne la commutativité de son circuit extérieur.

2) Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $u'' : B'' \xrightarrow{\sim} B'' \in Fl\,\underline{A}'$. Alors $[A', B', u] = [A' \otimes B'', B' \otimes B'', \tilde{u}]$, $\tilde{u}$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes B'') \arrow[d, "\tilde{u}"'] & A \otimes (TA' \otimes TB'') \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA') \otimes TB'' \arrow[d, "u \otimes Tu'"] \\
B \otimes T(B' \otimes B'') & B \otimes (TB' \otimes TB'') \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (B \otimes TB') \otimes TB''
\end{tikzcd}$$

En effet considérons le diagramme ci-dessous où C' est un objet quelconque de $\underline{A}'$. Dans ce diagramme, la commutativité des régions (I), (VI), (IX) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (II), (X) de la fonctorialité de $\check{T}$; celle de (III), (VII), (VIII) de la fonctorialité de a ; celle de (IV) est évidente ; celle de (V) est donnée par le diagramme commutatif définissant $\tilde{u}$; enfin celle de (XI) résulte de la définition de $v' = ((id \otimes u') \otimes id)\, a'$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité $[A', B', u] =$ $= [A' \otimes B'', B' \otimes B'', \tilde{u}]$.

Add 1

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[ddddd, "id\otimes Ta'"] \arrow[dddddr, phantom, "\mathrm{I}"] & A\otimes(TA'\otimes T(B''\otimes C')) \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') & B\otimes(TB'\otimes T(B''\otimes C')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] \arrow[dd, phantom, "\mathrm{VI}"] & B\otimes T(B\otimes(\cdots \\
 & & (A\otimes TA')\otimes(TB''\otimes TC') \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & (B\otimes TB')\otimes(TB''\otimes TC') \arrow[u, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"] & & \\
 & & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, "(id\otimes Tu')\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & (B\otimes(TB'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes(id\otimes Tu'))\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VIII}"] & B\otimes((TB'\otimes\cdots \arrow[l, "a"'] \\
 & & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes Tu')\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' & (B\otimes(TB'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[dd, phantom, "\mathrm{IX}"] & B\otimes((TB'\otimes\cdots \arrow[l, "a"'] \\
 & & (A\otimes(TA'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"] \arrow[d, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{V}"] & (B\otimes(TB'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & & \\
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') & A\otimes(T(A'\otimes B'')\otimes TC') \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes T(A'\otimes B''))\otimes TC' \arrow[r, "\tilde{u}\otimes id"] & (B\otimes T(B'\otimes B''))\otimes TC' & B\otimes(T(B'\otimes B'')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T((B\otimes\cdots
\end{tikzcd}
$$

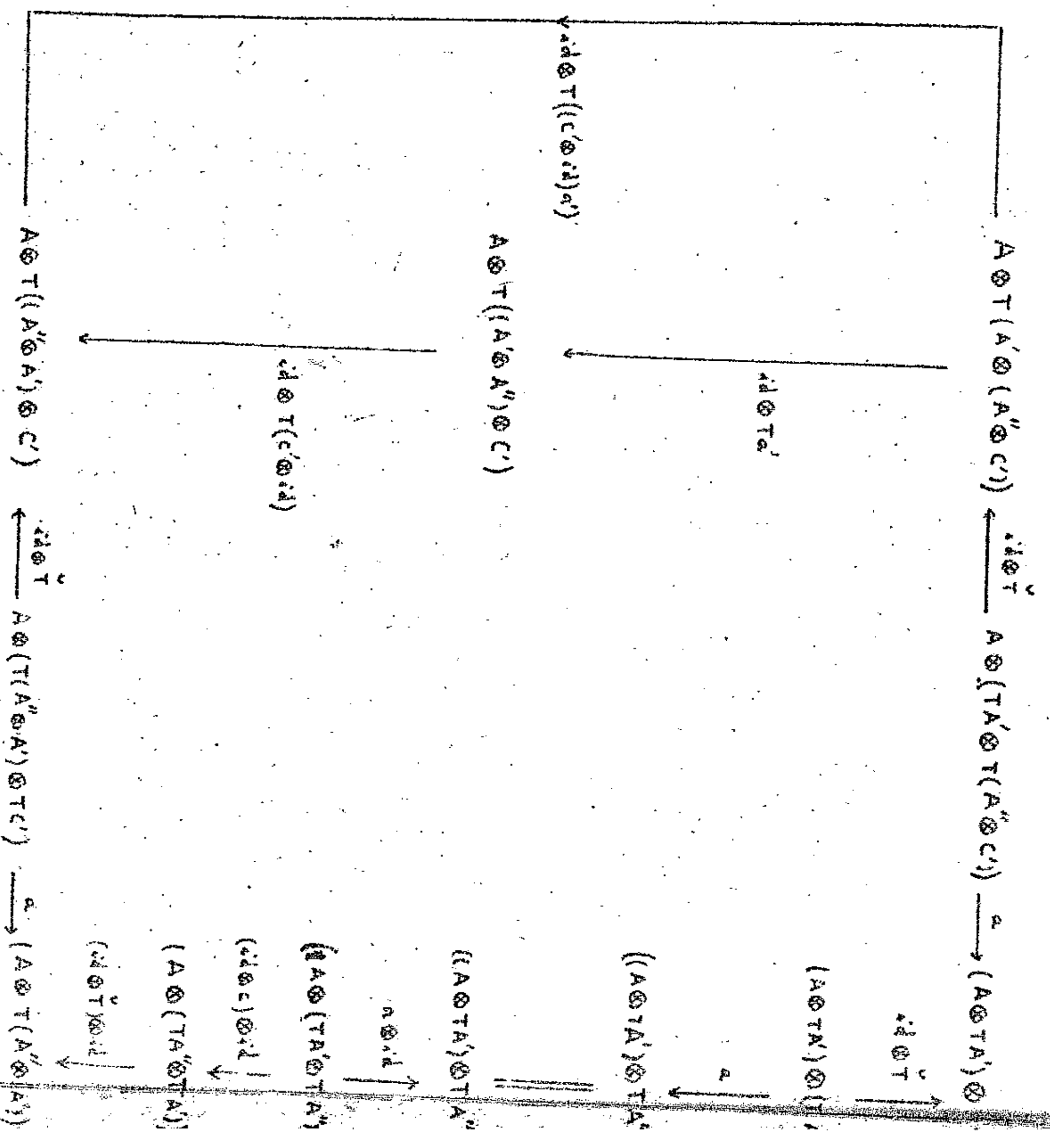
$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] & B \otimes T(B' \otimes (B'' \otimes C')) \arrow[d, "id \otimes Ta'"] \arrow[dddddd, bend left=60, "id \otimes Ta'"] \arrow[dddddd, phantom, bend left=30, "(\mathrm{XI})"] \\
 & B \otimes T((B' \otimes B'') \otimes C') \arrow[ddddd, bend left=40, "id \otimes T((id \otimes u') \otimes id)"] \\
 & B \otimes (T(B' \otimes B'') \otimes TC') \arrow[u, "id \otimes \check{T}"] \\
\otimes TC' & B \otimes ((TB' \otimes TB'') \otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id \otimes (\check{T} \otimes id)"] \arrow[d, "id \otimes ((id \otimes Tu') \otimes id)"] \\
d \otimes T(u)) \otimes id \quad (\mathrm{VIII}) & \\
) \otimes TC' & B \otimes ((TB' \otimes TB'') \otimes TC') \quad (\mathrm{X}) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id \otimes (\check{T} \otimes id)"] \\
 & B \otimes (T(B' \otimes B'') \otimes TC') \arrow[d, "id \otimes \check{T}"] \\
TC') \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] & B \otimes T((B' \otimes B'') \otimes C')
\end{tikzcd}
$$

3) Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/_{\mathcal{R}_{A,B}}$, $v' : A'' \simeq A'' \in Fl(\underline{A}')$.

Alors $[A', B', u] = [A''\otimes A', A''\otimes B', \overset{2}{u}]$, $\overset{2}{u}$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
A\otimes T(A''\otimes A') & \xleftarrow{id\otimes \check{T}} & A\otimes(TA''\otimes TA') & \xrightarrow{id\otimes c} & A\otimes(TA'\otimes TA'') & \xrightarrow{a} & (A\otimes TA')\otimes TA'' \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \overset{2}{u}} & & & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle u\otimes T v'} \\
B\otimes T(A''\otimes B') & \xleftarrow{id\otimes \check{T}} & B\otimes(TA''\otimes TB') & \xrightarrow{id\otimes c} & B\otimes(TB'\otimes TA'') & \xrightarrow{a} & (B\otimes TB')\otimes TA''
\end{array}$$

En effet il suffit de considérer le diagramme suivant dont toutes les régions sont commutatives, ce qui implique le circuit extérieur commutatif et par suite l'égalité $[A', B', u] = [A''\otimes A', A''\otimes B', \overset{2}{u}]$. Dans ce diagramme C' est un objet quelconque de $\underline{A}'$ et $w' = (c'\otimes id)((id\otimes v')\otimes id)a'$.



$$
\begin{tikzcd}
\otimes TA')\otimes T(A''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes \check{T}(A''\otimes C') & B\otimes(TB'\otimes T(A''\otimes C')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'\otimes(A''\otimes C')) \arrow[d, "id\otimes Ta'"] \arrow[ddddddd, bend left=60, "id\otimes Tw'"] \\
 & & & B\otimes T((B'\otimes A'')\otimes C') \arrow[ddddd, bend left=40, "id\otimes T((id\otimes v')\otimes id)"] \\
\otimes TA')\otimes(TA''\otimes TC') \arrow[uu, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, "a"] \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes(TA''\otimes TC') \arrow[uu, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"] & & B\otimes(T(B'\otimes A'')\otimes TC') \arrow[u, "id\otimes\check{T}"'] \\
\otimes TA')\otimes TA'')\otimes TC' \arrow[d, equal] \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TA'')\otimes TC' \arrow[d, "(id\otimes Tv')\otimes id"] & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes(id\otimes Tv'))\otimes id"] & B\otimes((TB'\otimes TA'')\otimes TC') \arrow[u, "id\otimes(\check{T}\otimes id)"'] \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes((id\otimes Tv')\otimes id)"] \\
\otimes TA')\otimes TA'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes Tv')\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TA'')\otimes TC' & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] & B\otimes((TB'\otimes TA'')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes(\check{T}\otimes id)"] \\
\otimes(TA'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"] \arrow[d, "c)\otimes id"] & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes c)\otimes id"] & & B\otimes(T(B'\otimes A'')\otimes TC') \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] \\
\otimes(TA''\otimes TA'))\otimes TC' \arrow[d, "\otimes\check{T})\otimes id"] & (B\otimes(TA''\otimes TB'))\otimes TC' \arrow[d, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & & B\otimes T((B'\otimes A'')\otimes C') \arrow[d, "id\otimes T(c'\otimes id)"] \\
\otimes T(A''\otimes A'))\otimes TC' \arrow[r, "\overset{2}{u}\otimes id"] & (B\otimes T(A''\otimes B'))\otimes TC' & B\otimes(T(A''\otimes B')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T((A''\otimes B')\otimes C')
\end{tikzcd}
$$

Proposition 6.– Soient $A, B, C \in Ob\,\underline{A}$, $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $[B'', C'', v] \in \Phi(B,C)/\mathcal{R}_{B,C}$. Alors la classe d'équivalence

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] \in \Phi(A,C)/\mathcal{R}_{A,C}$$

avec ω défini par le diagramme commutatif

$$(8)\quad \begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes B'') \arrow[ddddd, "\omega"] & A\otimes(TA'\otimes TB'') \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes TB'' \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes TB'' \\
 & & & B\otimes(TB'\otimes TB'') \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "id\otimes c"] \\
 & & & B\otimes(TB''\otimes TB') \arrow[d, "a"] \\
 & & & (B\otimes TB'')\otimes TB' \arrow[d, "v\otimes id"] \\
 & & & \\
C\otimes T(B'\otimes C'') & C\otimes(TB'\otimes TC'') \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "id\otimes c"] & C\otimes(TC''\otimes TB') \arrow[r, "a"] & (C\otimes TC'')\otimes TB'
\end{tikzcd}$$

est indépendante des représentants des classes $[A', B', u]$, $[B'', C'', v]$.

Démonstration.– Soient $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$, $[B'', C'', v] = [B''_1, C''_1, v_1]$. Montrons d'abord que

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [A'_1\otimes B'', B'_1\otimes C'', \Omega]$$

Ω étant défini de la même façon que ω. L'égalité $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$ s'exprime par l'existence des isomorphismes $u' : A'\otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1\otimes C'_1$, $v' : B'\otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1\otimes C'_1$ tels qu'on ait la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'"'] & (A\otimes TA')\otimes TC' \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'\otimes C') \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \\
A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

où les flèches en pointillé sont des composés des flèches construites à l'aide de $a, a^{-1}, \check{T}, \check{T}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ (voir Diag (21)). Désormais pour un $\otimes$-foncteur AC (resp. ACU) $(F, \check{F})$ d'une $\otimes$-catégorie AC (resp.

ACU) $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie AC (respectivement ACU) $\underline{C}'$, en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12 (resp. Prop. 11)) nous marquerons souvent, pour abréger, en pointillé, les flèches construites à l'aide de a', a'^{-1}, c', c'^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ (resp. a', a'^{-1}, c', c'^{-1}, g', g'^{-1}, d', d'^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}, Fg, Fg^{-1}, Fd, Fd^{-1}, $\hat{F}$, $\hat{F}^{-1}$, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$), et les composés de ces flèches. Soient u'_1, u'_2, v'_1, v'_2 les flèches de $\underline{A}'$ définies par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A'\otimes(B''\otimes C') \arrow[r, "id\otimes c'"] \arrow[d, "u'_1"'] & A'\otimes(C'\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (A'\otimes C')\otimes B'' \arrow[d, "u'\otimes id"] \\
A'_1\otimes(B''\otimes C'_1) \arrow[r, "id\otimes c'"] & A'_1\otimes(C'_1\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (A'_1\otimes C'_1)\otimes B''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A'\otimes B'')\otimes C' \arrow[d, "u'_2"'] & A'\otimes(B''\otimes C') \arrow[l, "a'"'] \arrow[d, "u'_1"] \\
(A'_1\otimes B'')\otimes C'_1 & A'_1\otimes(B''\otimes C'_1) \arrow[l, "a'"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B'\otimes(B''\otimes C') \arrow[r, "id\otimes c'"] \arrow[d, "v'_1"'] & B'\otimes(C'\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (B'\otimes C')\otimes B'' \arrow[d, "v'\otimes id"] \\
B'_1\otimes(B''\otimes C'_1) \arrow[r, "id\otimes c'"] & B'_1\otimes(C'_1\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (B'_1\otimes C'_1)\otimes B''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(B'\otimes C'')\otimes C' \arrow[d, "v'_2"'] & B'\otimes(C''\otimes C') \arrow[l, "a'"'] \arrow[r, "id\otimes c'"] & B'\otimes(C'\otimes C'') \arrow[d, "a'"] \\
(B'_1\otimes C'')\otimes C'_1 & & (B'\otimes C')\otimes C'' \arrow[d, "v'\otimes id"] \\
B'_1\otimes(C''\otimes C'_1) \arrow[u, "a'"] \arrow[r, "id\otimes c'"] & B'_1\otimes(C'_1\otimes C'') \arrow[r, "a'"] & (B'_1\otimes C'_1)\otimes C''
\end{tikzcd}$$

Ensuite considérons le diagramme suivant dont la commutativité des régions (I), (XX) résulte de la définition de ω et Ω (voir Diag. (B)); celle de (II), (IV), (VI), (XV), (XVIII), (XIX) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12),

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(A\otimes T(A'\otimes B''))\otimes TC' \arrow[rr, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[rrrrr, bend left=20, "\omega\otimes id"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\mathrm{(I)}"'] & & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dll, phantom, "\mathrm{(II)}"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, dashed] \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(III)}"] & & {} \arrow[d, phantom, "\mathrm{(IV)}"] \\
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'_2"'] & A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'_1"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & B\otimes T(B'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'_1"'] & B\otimes T((B'\otimes C') \arrow[d, "id\otimes"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(IX)}"] \\
A\otimes T((A'_1\otimes B'')\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & A\otimes T(A'_1\otimes(B''\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(XI)}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(B''\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[d, dashed] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(XIV)}"] & B\otimes T(B'_1\otimes(B''\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1 \arrow[d, phantom, "\mathrm{(XVII)}"] \\
(A\otimes T(A'_1\otimes B''))\otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[rrrrr, bend right=20, "\Omega\otimes id"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\mathrm{(XX)}"] & & ((A\otimes TA'_1)\otimes TB'')\otimes TC'_1 \arrow[r, "(u_1\otimes id)\otimes id"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes TB'')\otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed] & & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\omega\otimes id & & & & & & \\
(\mathrm{I}) & & ((B\otimes TB'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, "(v\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & ((C\otimes TC'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[rr, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & & (C\otimes T(B'\otimes C''))\otimes TC' \arrow[d, dashed] \\
(\mathrm{IV}) \quad \mathrm{X}) & B\otimes T((B'\otimes C')\otimes B'') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes T(v\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & B\otimes T(B''\otimes(B'\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes v')"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XI})"] & (B\otimes TB'')\otimes T(B'\otimes C') \arrow[r, "v\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & (C\otimes TC'')\otimes T(B'\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XIII})"] & C\otimes T(C''\otimes(B'\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes v')"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XIV})"] & C\otimes T((B'\otimes C'')\otimes C') \arrow[d, "id\otimes Tv'_2"] \\
(\mathrm{XVII}) & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1)\otimes B'') \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B''\otimes(B'_1\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & (B\otimes TB'')\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \arrow[r, "v\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XVIII})"] & (C\otimes TC'')\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{XIX})"] & C\otimes T(C''\otimes(B'_1\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & C\otimes T((B'_1\otimes C'')\otimes C'_1) \arrow[d, dashed] \\
(\mathrm{XX}) & & & ((B\otimes TB'')\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "(v\otimes id)\otimes id"] & ((C\otimes TC'')\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed] & & (C\otimes T(B'_1\otimes C''))\otimes TC'_1 \\
\Omega\otimes id & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

celle de $(\boxed{\mathrm{III}})$, $(\boxed{\mathrm{V}})$, $(\boxed{\mathrm{X}})$, $(\boxed{\mathrm{XI}})$, $(\boxed{\mathrm{XIII}})$, $(\boxed{\mathrm{XVI}})$, $(\boxed{\mathrm{XVIII}})$ résulte de la fonctorialité de $a, c', \check{T}$; celle de $(\boxed{\mathrm{VII}})$, $(\boxed{\mathrm{IX}})$, $(\boxed{\mathrm{XIV}})$ de la définition de $\omega'_1, \omega'_2, \nu'_1, \nu'_2$; celle de $(\boxed{\mathrm{VIII}})$ de l'hypothèse et de la commutativité du diagramme (6); enfin celle de $(\boxed{\mathrm{XII}})$ est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur, ce qui montre qu'on a bien $[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [A'_1\otimes B'', B'_1\otimes C'', \Omega]$. La démonstration de l'égalité $[A'_1\otimes B'', B'_1\otimes C'', \Omega] = [A'_1\otimes B''_1, B'_1\otimes C''_1, \omega_1]$ étant analogue, nous ne la faisons pas. On obtient donc

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [A'_1\otimes B''_1, B'_1\otimes C''_1, \omega_1]$$

ce qui démontre la proposition. On pose

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [B'', C'', v]\circ[A', B', u]$$

<u>Proposition 7</u>.– Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $[B'', C'', v] \in \Phi(B,C)/\mathcal{R}_{B,C}$, $[C', D', w] \in \Phi(C,D)/\mathcal{R}_{C,D}$. Alors $[C', D', w]\circ([B'', C'', v]\circ[A', B', u]) = ([C', D', w]\circ[B'', C'', v])\circ[A', B', u]$.

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la définition de $\circ$ dans la proposition 6, nous avons

$$[C', D', w]\circ([B'', C'', v]\circ[A', B', u]) = [A'\otimes(B''\otimes C'), B'\otimes(C''\otimes D'), \alpha]$$

$$([C', D', w]\circ[B'', C'', v])\circ[A', B', u] = [(A'\otimes B'')\otimes C', (B'\otimes C'')\otimes D', \beta]$$

avec α, β définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[dddd, "\alpha"'] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[d, dashed] \\
 & & ((B\otimes TB'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[d, "(v\otimes id)\otimes id"'] \\
 & & ((C\otimes TC'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[dd, dashed] \\
 & & \\
D\otimes T(B'\otimes(C''\otimes D')) \arrow[r, dashed] & ((D\otimes TD')\otimes TC'')\otimes TB' & ((C\otimes TC')\otimes TC'')\otimes TB' \arrow[l, "(w\otimes id)\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes \arrow[r, dashed] \arrow[ddd, "\beta"] & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, dashed] \\
 & & ((B\otimes TB'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[d, "(v\otimes id)\otimes id"] \\
 & & ((C\otimes TC'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[d, dashed] \\
D\otimes T((B'\otimes C'')\otimes D') \arrow[r, dashed] & (D\otimes TD')\otimes T(B'\otimes C'') & (C\otimes TC')\otimes T(B'\otimes C'') \arrow[l, "w\otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

Ensuite pour la démonstration il suffit de considérer le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Ta'"] \arrow[dddddd, bend right, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[d, dashed] \arrow[rdd, dashed] & \\
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[ddd, "\beta"] & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, dashed] \arrow[r, phantom, "\mathrm{V}"] & \\
 \arrow[r, phantom, "\mathrm{I}"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{II}"] & ((B\otimes TB'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(v\otimes id)\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & ((B\otimes TB'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[d, "(w\otimes id)\otimes id"] \\
 & & ((C\otimes TC'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & ((C\otimes TC'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[ldd, dashed] \arrow[ld, phantom, "\mathrm{VII}"] \\
D\otimes T((B'\otimes C'')\otimes D') & (D\otimes TD')\otimes T(B'\otimes C'') \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] & (C\otimes TC')\otimes T(B'\otimes C'') \arrow[l, "w\otimes id"'] \arrow[d, dashed] & \\
D\otimes T(B'\otimes(C''\otimes D')) \arrow[u, "id\otimes Ta'"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{VIII}"] & ((D\otimes TD')\otimes TC'')\otimes TB' \arrow[l, dashed] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{IX}"] & ((C\otimes TC')\otimes TC'')\otimes TB' \arrow[l, "(w\otimes id)\otimes id"'] &
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité des régions (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII), (VIII), (IX) et du circuit extérieur peut être vérifiée aussitôt ; ce qui donne la commutativité de la région (I) et par suite l'égalité voulue en vertu de la remarque 1).

<u>Proposition 8</u>.– Soit $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$. Alors

$$[A', B', u] \circ [C', C', id_{A\otimes TC'}] = [C', C', id_{B\otimes TC'}] \circ [A', B', u] = [A', B', u]$$

pour tout objet C' de $\underline{A}'$.

<u>Démonstration</u>.– Il suffit d'appliquer (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) et

les remarques 2) et 3).

<u>Remarque 4)</u>. — Jusqu'ici tout semble bien marcher, on serait tenté de poser pour la construction de la catégorie $\underline{P}$

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A,B) = \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B} \quad , \ A,B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$$

la composition des flèches étant définie comme dans la proposition 6. Avec les propositions 7 et 8, $\underline{P}$ est effectivement une catégorie, mais elle ne répond pas au problème posé, l'ennui venant des flèches $T(c'_{A',A'})$, où $c'_{A',A'}$ sont les flèches de symétrie canonique dans la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}'$, les flèches $T(c'_{A',A'})$ sont en général différentes des identités ! Au cas où $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, ce qui arrive quand $\underline{A}'$ est stricte ~~la fonction $(T, \check{T})$ est tel que $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$~~, on peut munir $\underline{P}$ d'une loi $\otimes$ et puis des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité de façon naturelle pour que $\underline{P}$ réponde à la question. Comme nous avons fait jusqu'ici, nous ne pouvons construire $\underline{P}$ en partant de $\underline{A}$, $\underline{A}'$, $(T, \check{T})$ avec les hypothèses données au début du n°. Pour pouvoir continuer, examinons de plus près le problème posé. Supposons que $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ en soit une solution, alors pour toute flèche de symétrie canonique $c'_{A',A'} : A' \otimes A' \xrightarrow{\sim} A' \otimes A'$, $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
DT(A'\otimes A') \arrow[r, "\lambda_{A'\otimes A'}", "\sim"'] \arrow[d, "DT(c'_{A',A'})"'] & I_{\underline{P}}(A'\otimes A') \arrow[d, "I_{\underline{P}}(c'_{A',A'}) = id"] \\
DT(A'\otimes A') \arrow[r, "\lambda_{A'\otimes A'}", "\sim"'] & I_{\underline{P}}(A'\otimes A')
\end{tikzcd}$$

nous donne $DT(c'_{A',A'}) = id$, ce qui montre que $(D, \check{D})$ se factorise en $\underline{A} \longrightarrow \underline{A}^{S} \longrightarrow \underline{P}$, S étant la partie multiplicative de $\underline{A}$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de $\underline{A}$ de la forme $T(c'_{A',A'})$ et $\underline{A}^{S}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par S (n°1, Déf. 1 et 2). Donc si on part de $\underline{A}^{\varphi}$, $\underline{A}'$ et du $\otimes$-foncteur composé $\underline{A}' \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{A}^{\varphi}$, la construction de $\underline{P}$ marchera comme nous avons signalé ci-dessous. Dans le but de simplifier les notations, nous pouvons considérer le problème comme posé pour $(T, \check{T}) : \underline{A}' \to \underline{A}$ avec $T(c'_{A', A'}) = id$ pour tout $A' \in Ob\,\underline{A}'$.

<u>Proposition 9</u>.– Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/_{\mathcal{R}_{A,B}} = Hom_{\underline{P}}(A,B)$, $[B', C', v] \in \Phi(B,C)/_{\mathcal{R}_{B,C}} = Hom_{\underline{P}}(B,C)$ (voir la définition de la catégorie $\underline{P}$ dans la remarque 4)). Alors

$$[B', C', v] \circ [A', B', u] = [A', C', vu].$$

Si u est un isomorphisme dans $\underline{A}$, $[A', B', u]$ est un isomorphisme dans $\underline{P}$, son inverse étant $[B', A', u^{-1}]$.

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la définition de la loi de composition des flèches de $\underline{P}$ (Prop. 6), nous avons

$$[B', C', v] \circ [A', B', u] = (A' \otimes B', B' \otimes C', \omega]$$

avec ω défini par le diagramme commutatif (8) où l'on fait $B'' = B'$. Or $c_{TB', TB'} = id$ en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
TB' \otimes TB' \arrow[r, "\check{T}", "\sim"'] \arrow[d, "c_{TB', TB'}"'] & T(B' \otimes B') \arrow[d, "T(c'_{B', B'})"] \\
TB' \otimes TB' \arrow[r, "\check{T}", "\sim"'] & T(B' \otimes B')
\end{tikzcd}$$

et de l'hypothèse $T(c'_{B', B'}) = id$ pour tout $B' \in Ob\,\underline{A}'$ (Rem. 4)). Par conséquent le diagramme commutatif (8) devient le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes B') \arrow[d, "\omega"'] \arrow[dr, "\omega_1"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(\mathrm{I})"] & A \otimes (TA' \otimes TB') \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA') \otimes TB' \arrow[r, "u \otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & (B \otimes TB') \otimes TB' \arrow[d, "v \otimes id"] \\
C \otimes T(B' \otimes C') & C \otimes T(C' \otimes B') \arrow[l, "id \otimes Tc'"'] & C \otimes (TC' \otimes TB') \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (C \otimes TC') \otimes TB'
\end{tikzcd}$$

dans lequel ω_1 est défini tel que la région (II) soit commutative, ce qui donne la commutativité de la région (I). En vertu de la remarque 2)

on a $[A', C', vu] = [A' \otimes B', C' \otimes B', \omega_1]$; et de la remarque 1),
$[A' \otimes B', C' \otimes B', \omega_1] = [A' \otimes B', B' \otimes C', \omega]$. D'où l'égalité voulue.

Supposons que u soit un isomorphisme dans $\underline{A}$. D'après ce que nous venons de démontrer, nous avons

$$[B', A', u^{-1}] \circ [A', B', u] = [A', A', id_{A \otimes TA'}]$$

$$[A', B', u] \circ [B', A', u^{-1}] = [B', B', id_{B \otimes TB'}]$$

ce qui montre, en vertu de la proposition 8, que $[B', A', u^{-1}]$ est l'inverse de $[A', B', u]$.

Nous allons maintenant munir $\underline{P}$ d'une $\otimes$-structure et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité.

<u>Proposition 10</u>.- Soient $[A', B', u] \in \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A, B)$, $[E', F', v] \in \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(E, F)$. Alors la classe d'équivalence

$$[A' \otimes E', B' \otimes F', w]$$

avec w défini par le diagramme commutatif

$$(9) \qquad \begin{array}{ccc} (A \otimes TA') \otimes (E \otimes TE') & \xrightarrow{u \otimes v} & (B \otimes TB') \otimes (F \otimes TF') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A \otimes E) \otimes T(A' \otimes E') & \xrightarrow{w} & (B \otimes F) \otimes T(B' \otimes F') \end{array}$$

est indépendante des représentants des classes $[A', B', u]$, $[E', F', v]$.

<u>Démonstration</u>.- Soient $[A'_1, B'_1, u_1] = [A', B', u]$, $[E'_1, F'_1, v_1] = [E, F, v]$. Montrons d'abord

$$[A' \otimes E', B' \otimes F', w] = [A'_1 \otimes E', B'_1 \otimes F', \Omega]$$

Ω étant défini par un diagramme commutatif analogue à (9) où l'on a remplacé A', B', u par A'_1, B'_1, u_1. L'hypothèse $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$ nous donne des objets C', C'_1 de $\underline{A}'$ et des isomorphismes $u' : A' \otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1 \otimes C'_1$,

$v' : B'\otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1\otimes C'_1$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'"'] & (A\otimes TA')\otimes TC' \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'\otimes C') \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \\
A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(A\otimes E)\otimes T((A'\otimes E')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[ddddd, bend right=60, "id\otimes Tu'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{X}\quad\mathrm{I}"] & ((A\otimes E)\otimes T(A'\otimes E'))\otimes TC' \arrow[r, "W\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & ((B\otimes F)\otimes T(B'\otimes F'))\otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}\quad\mathrm{XIII}"] & (B\otimes F)\otimes T((B'\otimes F')\otimes C') \arrow[d, dashed] \arrow[ddddd, bend left=60, "id\otimes Tu'_1"] \\
(A\otimes E)\otimes T((A'\otimes C')\otimes E') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[ddd, bend right=40, "(id\otimes id)\otimes T(u'\otimes id)"'] & ((A\otimes TA')\otimes(E\otimes TE'))\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes v)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & ((B\otimes TB')\otimes(F\otimes TF'))\otimes TC' \arrow[r, dashed] & (B\otimes F)\otimes T((B'\otimes C')\otimes F') \arrow[d, dashed] \arrow[ddd, bend left=40, "(id\otimes id)\otimes T(v'\otimes id)"] \\
(A\otimes T(A'\otimes C'))\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(id\otimes Tu')\otimes(id\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{XI}"] & ((A\otimes TA')\otimes TC')\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes v"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & ((B\otimes TB')\otimes TC')\otimes(F\otimes TF') \arrow[r, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{XII}"] & (B\otimes T(B'\otimes C'))\otimes(F\otimes TF') \arrow[d, "(id\otimes Tv')\otimes(id\otimes id)"'] \\
(A\otimes T(A'_1\otimes C'_1))\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & ((A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1)\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, "(u_1\otimes id)\otimes v"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1)\otimes(F\otimes TF') \arrow[r, dashed] & (B\otimes T(B'_1\otimes C'_1))\otimes(F\otimes TF') \arrow[d, dashed] \\
(A\otimes E)\otimes T((A'_1\otimes C'_1)\otimes E') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & ((A\otimes TA'_1)\otimes(E\otimes TE'))\otimes TC'_1 \arrow[r, "(u_1\otimes v)\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VIII}"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes(F\otimes TF'))\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IX}"] & (B\otimes F)\otimes T((B'_1\otimes C'_1)\otimes F') \arrow[d, dashed] \\
(A\otimes E)\otimes T((A'_1\otimes E')\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & ((A\otimes E)\otimes T(A'_1\otimes E'))\otimes TC'_1 \arrow[r, "\Omega\otimes id"] & ((B\otimes F)\otimes T(B'_1\otimes F'))\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & (B\otimes F)\otimes T((B'_1\otimes F')\otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

où la commutativité des régions (I), (III), (VII), (IX) résulte de (Chap. I, § 4, n° 2, Prop. 12) ; celle de (II), (VIII) de la définition de W et Ω (Diag. (9)) ; celle de (IV), (VI), (XI), (XII) de la fonctorialité de a, c, $\check{T}$; celle de (V) de l'égalité $[A', B', u'] = [A'_1, B'_1, u'_1]$; enfin celle de (X), (XIII) de la définition de u'_1, v'_1 par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
(A' \otimes C') \otimes E' \arrow[r, "u' \otimes id"] \arrow[d, dashed] & (A'_1 \otimes C'_1) \otimes E' \arrow[d, dashed] \\
(A' \otimes E') \otimes C' \arrow[r, "u'_1"] & (A'_1 \otimes E') \otimes C'_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(B' \otimes C') \otimes F' \arrow[r, "v' \otimes id"] \arrow[d, dashed] & (B'_1 \otimes C'_1) \otimes F' \arrow[d, dashed] \\
(B' \otimes F') \otimes C' \arrow[r, "v'_1"] & (B'_1 \otimes F') \otimes C'_1
\end{tikzcd}$$

On en conclut la commutativité du circuit extérieur, ce qui donne l'égalité $[A' \otimes E', B' \otimes F', W] = [A'_1 \otimes E', B'_1 \otimes F', \Omega]$. De la même manière on démontre que $[A'_1 \otimes E', B'_1 \otimes F', \Omega] = [A'_1 \otimes E'_1, B'_1 \otimes F'_1, W_1]$, ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 11</u>.– Les applications suivantes

$$\otimes : Ob(\underline{P} \times \underline{P}) \longrightarrow Ob\,\underline{P}$$
$$(A, E) \longmapsto A \otimes E$$

$$\otimes : Fl(\underline{P} \times \underline{P}) \longrightarrow Fl\,\underline{P}$$

$$([A', B', u], [E', F', v]) \longmapsto [A' \otimes E', B' \otimes F', W]$$

où $[A', B', u] : A \to B$, $[E', F', v] : E \to F$ sont des flèches de $\underline{P}$, et W est défini par le diagramme commutatif (9) ; définissent un foncteur

$$\otimes : \underline{P} \times \underline{P} \to \underline{P}.$$

<u>Démonstration</u>.– Tout d'abord remarquons que pour deux flèches $f : A \to B$, $g : B \to C$ de $\underline{P}$, on peut toujours les mettre sous la forme

$f=[A',B',u]$, $g=[B',C',x]$ telle que "l'extrémité" B' de f coïncide avec "l'origine" B' de g (Remarques 2) et 3)). Cela étant, soient

$$A \xrightarrow{[A',B',u]} B \xrightarrow{[B',C',x]} C \qquad E \xrightarrow{[E',F',v]} F \xrightarrow{[F',G',y]} G$$

et soient

$$[A'\otimes E', B'\otimes F', w] = [A',B',u]\otimes[E',F',v]$$

$$[B'\otimes F', C'\otimes G', z] = [B',C',x]\otimes[F',G',y]$$

Montrons que

$$[A'\otimes E', C'\otimes G', zw] = [A',C',xu]\otimes[E',G',yv]$$

Pour cela considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes TA')\otimes(E\otimes TE') \arrow[rr, "xu\otimes yv"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & (C\otimes TC')\otimes(G\otimes TG') \arrow[d, equal] \\
(A\otimes TA')\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, "u\otimes v"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (B\otimes TB')\otimes(F\otimes TF') \arrow[r, "x\otimes y"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (C\otimes TC')\otimes(G\otimes TG') \arrow[d, dashed] \\
(A\otimes E)\otimes T(A'\otimes E') \arrow[r, "w"] & (B\otimes F)\otimes T(B'\otimes F') \arrow[r, "z"] & (C\otimes G)\otimes T(C'\otimes G')
\end{tikzcd}$$

où la commutativité de la région (I) est évidente ; et celle de (II), (III) vient de la définition de w et z respectivement. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité voulue.

Enfin soit

$$A \xrightarrow{[A',A',id_{A\otimes TA'}]} A$$

la flèche d'identité de l'objet A (Prop. 8). La flèche

$$[A',A',id_{A\otimes TA'}]\otimes[A',A',id_{A\otimes TA'}] = [A'\otimes A', A'\otimes A', id_{(A\otimes A)\otimes T(A'\otimes A')}]$$

est bien la flèche d'identité de l'objet $A\otimes A$, ce qui achève la démonstration. $\mathcal{P}$ est donc une $\otimes$-catégorie.

Proposition 12.– $[A', A', a_{A,B,C} \otimes id_{TA'}] : A\otimes(B\otimes C) \xrightarrow{\sim} (A\otimes B)\otimes C$ est une contrainte d'associativité pour la $\otimes$-catégorie $\underline{P}$, A' étant un objet quelconque de $\underline{A}'$.

Démonstration.– Tout d'abord remarquons que pour A, B, C donnés, la flèche $[A', A', a\otimes id_{TA'}]$ est bien définie en vertu des égalités

$$[A', A', a_{A,B,C} \otimes id_{TA'}] = [A'\otimes B', A'\otimes B', a_{A,B,C}\otimes id_{T(A'\otimes B')}]$$

$$= [B', B', a_{A,B,C}\otimes id_{TB'}] \qquad (\text{Rem. } 2) \text{ et } 3));$$

pour tout objet B' de $\underline{A}'$. D'où on peut écrire

$$[A', A', a_{A,B,C}\otimes id_{TA'}] = [A'\otimes(B'\otimes C'), A'\otimes(B'\otimes C'), a_{A,B,C}\otimes id_{T(A'\otimes(B'\otimes C'))}]$$

et, en vertu de la remarque 1)

$$[A'\otimes(B'\otimes C'), A'\otimes(B'\otimes C'), a_{A,B,C}\otimes id_{T(A'\otimes(B'\otimes C'))}] = [A'\otimes(B'\otimes C'), (A'\otimes B')\otimes C', a_{A,B,C}\otimes Ta'_{A',B',C'}].$$

pour $B', C' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$.

Cela étant, montrons que $[A', A', a_{A,B,C}\otimes id_{TA'}]$ est fonctoriel en A, B, C. Il nous suffit de montrer qu'il est fonctoriel en un des trois arguments, par exemple A, la démonstration pour les deux autres étant analogue. Soit $[A', A'_1, u] : A \to A_1$, nous allons montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "{[A'\otimes(B'\otimes C'),\,(A'\otimes B')\otimes C',\, a_{A,B,C}\otimes Ta'_{A',B',C'}]}"] \arrow[d, "{[A',A'_1,u]\otimes(id\otimes id)}"'] & (A\otimes B)\otimes C \arrow[d, "{([A',A'_1,u]\otimes id)\otimes id}"] \\
A_1\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "{[A'_1\otimes(B'\otimes C'),\,(A'_1\otimes B')\otimes C',\, a_{A_1,B,C}\otimes Ta'_{A'_1,B',C'}]}"'] & (A_1\otimes B)\otimes C
\end{tikzcd}$$

D'abord nous avons

$$id_B = [B', B', id_{B\otimes TB'}], \quad id_C = [C', C', id_{C\otimes TC'}]$$

Posons

$$[A', A'_1, u]\otimes([B', B', id]\otimes[C', C', id]) = [A'\otimes(B'\otimes C'), A'_1\otimes(B'\otimes C'), u_1]$$

$$([A', A'_1, u] \otimes [B', B', id]) \otimes [C', C', id] = [(A' \otimes B') \otimes C', (A'_1 \otimes B') \otimes C', u_2]$$

où u_1 et u_2 sont définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A' \otimes (B' \otimes C')) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, dashed] & (A_1 \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A'_1 \otimes (B' \otimes C')) \arrow[d, dashed] \\
(A \otimes TA') \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC')) \arrow[r, "u \otimes (id \otimes id)"] & (A_1 \otimes TA'_1) \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes T((A' \otimes B') \otimes C') \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, dashed] & ((A_1 \otimes B) \otimes C) \otimes T((A'_1 \otimes B') \otimes C') \arrow[d, dashed] \\
((A \otimes TA') \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC') \arrow[r, "(u \otimes id) \otimes id"] & ((A_1 \otimes TA'_1) \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC')
\end{tikzcd}$$

en vertu de la définition du produit tensoriel des flèches de P dans la proposition 10. Donc la démonstration de la commutativité du diagramme revient à celle de l'égalité

$$[A' \otimes (B' \otimes C'), (A'_1 \otimes B') \otimes C', u_2(a \otimes Ta')] = [A' \otimes (B' \otimes C'), (A'_1 \otimes B') \otimes C', (a \otimes Ta') u_1].$$

Or le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (A \otimes TA') \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC')) \arrow[r, "u \otimes (id \otimes id)"] \arrow[dd, "a"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(I)}"] & (A_1 \otimes TA'_1) \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC')) \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "a"'] & \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A' \otimes (B' \otimes C')) \arrow[ur, dashed] \arrow[rrr, bend left=60, "u_1"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{(III)}"] & & (A_1 \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A'_1 \otimes (B' \otimes C')) \arrow[d, "a \otimes Ta'"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(IV)}"] \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes T((A' \otimes B') \otimes C') \arrow[u, "a \otimes Ta'"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(II)}"] \arrow[rrr, bend right=60, "u_2"'] & ((A \otimes TA') \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC') \arrow[r, "(u \otimes id) \otimes id"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(V)}"] & ((A_1 \otimes TA'_1) \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC') \arrow[r, dashed] & ((A_1 \otimes B) \otimes C) \otimes T((A'_1 \otimes B') \otimes C') \\
& & &
\end{tikzcd}$$

a les régions (I), (V) commutatives en vertu de la définition de u_1, u_2 respectivement ; les régions (II), (IV) en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12);

enfin la région (III) en vertu de la fonctorialité de a. On en conclut la commutativité du circuit extérieur, et par suite l'égalité $u_2(a\otimes Ta') = (a\otimes Ta')\, u_1$.

Pour montrer que l'axiome du pentagone est satisfait, écrivons les flèches

$$[A', A', a_{A,B,C}\otimes id_{TA'}] : A\otimes(B\otimes C) \xrightarrow{\sim} (A\otimes B)\otimes C$$

sous la forme

$$[A'\otimes(B'\otimes C'), (A'\otimes B')\otimes C', a_{A,B,C}\otimes Ta'_{A',B',C'}]$$

et remarquons qu'on a

$$[W', W', id_{W\otimes TW'}]\otimes[X'\otimes(Y'\otimes Z'), (X'\otimes Y')\otimes Z', a_{X,Y,Z}\otimes Ta'_{X',Y',Z'}] =$$

$$=[W'\otimes(X'\otimes(Y'\otimes Z')), W'\otimes((X'\otimes Y')\otimes Z'), (id_W\otimes a_{X,Y,Z})\otimes T(id_{W'}\otimes a'_{X',Y',Z'})]$$

et

$$[W'\otimes(X'\otimes Y'), (W'\otimes X')\otimes Y', a_{W,X,Y}\otimes Ta'_{W',X',Y'}]\otimes[Z', Z', id_{Z\otimes TZ'}] =$$

$$=[(W'\otimes(X'\otimes Y'))\otimes Z', ((W'\otimes X')\otimes Y')\otimes Z', (a_{W,X,Y}\otimes id_Z)\otimes T(a'_{W',X',Y'}\otimes id_{Z'})]$$

Ces remarques faites, l'axiome du pentagone est réalisé dans $\underline{P}$ en vertu du fait qu'il est réalisé dans $\underline{A}$ et $\underline{A}'$. D'où la proposition.

<u>Proposition 13</u>.- $[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}] : A\otimes B \xrightarrow{\sim} B\otimes A$ est une contrainte de commutativité pour la $\otimes$-catégorie $\underline{P}$, A' étant un objet quelconque de $\underline{A}'$.

<u>Démonstration</u>.- En vertu des remarques 2) et 3) on a

$$[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}] = [A'\otimes B', A'\otimes B', c_{A,B}\otimes id_{T(A'\otimes B')}] = [B', B', c_{A,B}\otimes id_{TB'}]$$

pour tout $B'\in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, ce qui montre que la flèche $[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}]$ est bien définie pour A, B donnés. Ensuite la fonctorialité et l'autocompatibilité

(Chap. I, §2, n° 2, Déf. 6, Rel. (4)) de $[A', A', c_{A,B} \otimes id_{TA'}]$ s'obtiennent en remarquant qu'on a

$$[A', A', c_{A,B} \otimes id_{TA'}] = [A' \otimes B', B' \otimes A', c_{A,B} \otimes Tc'_{A',B'}]$$

B' étant un objet quelconque de $\underline{A}'$.

<u>Proposition 14</u>.– Soit $A'_0 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$. Alors le triple

$$(1_P = TA_0,\ g_A = [A'_0 \otimes A', A', t_A],\ d_A = [A'_0 \otimes A', A', r_A])$$

où A' est un objet quelconque de $\underline{A}'$, A varie dans $\mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et les isomorphismes t_A, r_A sont définis par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_0 \otimes A') \arrow[d, "t_A"'] & A \otimes (TA'_0 \otimes TA') \arrow[l, "id \otimes \breve{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(TA'_0 \otimes A) \otimes TA' & (A \otimes TA'_0) \otimes TA' \arrow[l, "c \otimes id"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_0 \otimes A') \arrow[d, "r_A"'] & A \otimes (TA'_0 \otimes TA') \arrow[l, "id \otimes \breve{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(A \otimes TA'_0) \otimes TA' \arrow[r, equal] & (A \otimes TA'_0) \otimes TA'
\end{tikzcd}$$

constitue une contrainte d'unité pour la $\otimes$-catégorie $\underline{P}$.

<u>Démonstration</u>.– D'abord démontrons que les isomorphismes ne dépendent pas de A'. Soit B' un objet quelconque de $\underline{A}'$. Les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A \otimes T((A'_0 \otimes A') \otimes B') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"'] & (A \otimes T(A'_0 \otimes A')) \otimes TB' \arrow[r, "t_A \otimes id"] & ((TA'_0 \otimes A) \otimes TA') \otimes TB' \arrow[r, dashed] & (TA'_0 \otimes A) \otimes T(A' \otimes B') \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"] \\
A \otimes T((A'_0 \otimes B') \otimes A) \arrow[r, dashed] & (A \otimes T(A'_0 \otimes B')) \otimes TA' \arrow[r, "t_A \otimes id"] & ((TA'_0 \otimes A) \otimes TB') \otimes TA' \arrow[r, dashed] & (TA'_0 \otimes A) \otimes T(B' \otimes A')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A \otimes T((A'_0 \otimes A') \otimes B') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"'] & (A \otimes T(A'_0 \otimes A')) \otimes TB' \arrow[r, "r_A \otimes id"] & ((A \otimes TA'_0) \otimes TA') \otimes TB' \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_0) \otimes T(A' \otimes B') \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"] \\
A \otimes T((A'_0 \otimes B') \otimes A') \arrow[r, dashed] & (A \otimes T(A'_0 \otimes B')) \otimes TA' \arrow[r, "r_A \otimes id"] & ((A \otimes TA'_0) \otimes TB') \otimes TA' \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_0) \otimes T(B' \otimes A')
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs: en remarquant que t_A et r_A sont des composés des flèches construites à l'aide de a, c, $\breve{T}$, des identités et de la loi $\otimes$, et en appliquant (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 12), ce qui montre que

$$[A'_0\otimes A', A', t_A] = [A'_0\otimes B', B', t_A]$$

et

$$[A'_0\otimes A', A', p_A] = [A'_0\otimes B', B', p_A]$$

i.e $[A'_0\otimes A', A', t_A]$, $[A'_0\otimes A', A', p_A]$ ne dépendent pas de A'. Ces isomorphismes sont en plus fonctoriels en A en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) et de la fonctorialité de c, $\check{T}$. Enfin pour $A = \underline{1}_P$, on a $t_A = p_A$ en vertu de $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$ (Rem. 41), ce qui donne $g_{\underline{1}_P} = d_{\underline{1}_P}$.

<u>Proposition 15</u>.– La $\otimes$-catégorie $\underline{P}$ munie des contraintes d'associativité $[A', A', a_{A,B,C}\otimes id_{TA'}]$, de commutativité $[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}]$ et d'unité $(\underline{1}_P, [A'_0\otimes A', A', t_A], [A'_0\otimes A', A', p_A])$ est une $\otimes$-catégorie ACU.

<u>Démonstration</u>.– En vertu de (Chap. I, §3, n°4, Prop. 12), il nous suffit de démontrer que $[A', A', a\otimes id]$ est compatible respectivement avec $[A', A', c\otimes id]$ et $(\underline{1}_P, g, d)$.

La compatibilité de $[A', A', a\otimes id]$ avec $[A', A', c\otimes id]$ s'obtient en remarquant comme dans les propositions 12 et 13 qu'on peut écrire

$$[A', A', a_{X,Y,Z}\otimes id_{TA'}] = [X'\otimes(Y'\otimes Z'), (X'\otimes Y')\otimes Z', a_{X,Y,Z}\otimes Ta'_{X',Y',Z'}]$$

$$[A', A', c_{X\otimes Y, Z}\otimes id_{TA'}] = [(X'\otimes Y')\otimes Z', Z'\otimes(X'\otimes Y'), c_{X\otimes Y, Z}\otimes Tc'_{X'\otimes Y', Z'}]$$

$$[X'\otimes Z', Z'\otimes X', c_{X,Z}\otimes Tc'_{X',Z'}]\otimes[Y', Y', id_{Y\otimes TY'}] =$$

$$= [(X'\otimes Z')\otimes Y', (Z'\otimes X')\otimes Y', (c_{X,Z}\otimes id_Y)\otimes T(c'_{X',Z'}\otimes id_{Y'})]$$

$$[X', X', id_{X\otimes TX'}]\otimes[Y'\otimes Z', Z'\otimes Y', c_{Y,Z}\otimes Tc'_{Y',Z'}] =$$

$$= [X'\otimes(Y'\otimes Z'), X'\otimes(Z'\otimes Y'), (id_X\otimes c_{Y,Z})\otimes T(id_{X'}\otimes c'_{Y',Z'})]$$

et que l'axiome de l'hexagone est satisfait dans $\underline{A}$ et $\underline{A}'$.

Enfin la compatibilité de $[A', A', a\otimes id]$ avec $(\underline{1}_P, g, d)$ résulte aussitôt de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12).

<u>Proposition 16</u>.– Soient

$$D : \mathrm{Ob}\,\underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\underline{P}$$
$$A \longmapsto A$$

$$D : \mathrm{Fl}\,\underline{A} \longrightarrow \mathrm{Fl}\,\underline{P}$$
$$(u : A \longrightarrow B) \longmapsto [A', A', u \otimes id_{TA'}]$$

A' étant un objet quelconque de $\underline{A}'$,

$$\check{D}_{A,B} = id_{A \otimes B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Alors $(D, \check{D})$ est un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$.

<u>Démonstration</u>.– Comme on a remarqué dans les propositions 12 et 13 ; la flèche $[A', A', u \otimes id_{TA'}]$ est indépendante de l'objet A'. En en vertu des propositions 8 et 9, nous avons

$$[A', A', id_A \otimes id_{TA'}] = id_A \quad (\text{dans } \underline{P})$$

$$[A', A', vu \otimes id_{TA'}] = [A', A', v \otimes id_{TA'}] \circ [A', A', u \otimes id_{TA'}]$$

ce qui montre que D est un foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$. En outre, pour $u : A \to A_1$ et $v : B \to B_1$, l'égalité

$$[A', A', u \otimes id_{TA'}] \otimes [B', B', v \otimes id_{TB'}] = [A' \otimes B', A' \otimes B', (u \otimes v) \otimes id_{T(A' \otimes B')}]$$

venant de la fonctorialité de $a, c, \check{T}$ nous montre que $\check{D}$ est un isomorphisme fonctoriel. Enfin la compatibilité de $(D, \check{D})$ avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$ se vérifie aussitôt en partant de la définition du $\otimes$-foncteur $(D, \check{D})$ et des contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{P}$.

<u>Proposition 17</u>.– Il existe un $\otimes$-isomorphisme ~~fonctoriel~~

$$\lambda : (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $1_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$ (Déf. 3).

<u>Démonstration</u>.– Soit A' un objet de $\underline{A}'$, considérons la flèche $\lambda_{A'}$ dans $\underline{P}$

$$(10)\qquad DTA' = TA' \xrightarrow{\lambda_{A'} = [A'_0, A', c_{TA', TA'_0}]} I_{\underline{P}} A' = TA'_0$$

$\lambda_{A'}$ est bien un isomorphisme dans $\underline{P}$ puisque c_{TA', TA'_0} est un isomorphisme dans $\underline{A}$ (Prop. 9). Montrons que λ est fonctoriel en A'. Considérons le diagramme suivant où $u' : A' \to A''$ est une flèche de $\underline{A}'$ et

$$\begin{tikzcd}
DTA' = TA' \arrow[r, "{[A'_0, A', c_{TA', TA'_0}]}"] \arrow[d, "{DTu' = [A'_0, A'_0, Tu' \otimes id_{TA'_0}]}"'] & I_{\underline{P}} A' = TA'_0 \arrow[d, equal, "I_{\underline{P}} u'"] \\
DTA'' = TA'' \arrow[r, "{[A'_0, A'', c_{TA'', TA'_0}]}"] & I_{\underline{P}} A'' = TA'_0
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité se réalise si on a l'égalité

$$[A'_0, A', c_{TA', TA'_0}] = [A'_0, A'', c_{TA'', TA'_0}(Tu' \otimes id_{TA'_0})]$$

Or la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA', TA'_0}"] \arrow[d, "id \otimes Tid"'] & TA'_0 \otimes TA' \arrow[d, "id \otimes Tu'"] \\
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "(id \otimes Tu') c_{TA', TA'_0}"] & TA'_0 \otimes TA''
\end{tikzcd}$$

nous donne

$$[A'_0, A', c_{TA', TA'_0}] = [A'_0, A'', (id \otimes Tu') c_{TA', TA'_0}]$$

en vertu de la remarque 1), et celle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA', TA'_0}"] \arrow[d, "Tu' \otimes id"'] & TA'_0 \otimes TA' \arrow[d, "id \otimes Tu'"] \\
TA'' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA'', TA'_0}"] & TA'_0 \otimes TA''
\end{tikzcd}$$

venant de la fonctorialité de c, nous donne

$$[A'_0, A'', c_{TA'', TA'_0}(Tu' \otimes id_{TA'_0})] = [A'_0, A'', (id \otimes Tu') c_{TA', TA'_0}]$$

D'où l'égalité voulue, ce qui montre que λ est un morphisme fonctoriel. Il nous reste à prouver que λ est un $\otimes$-morphisme, i.e le diagramme

$$\begin{tikzcd} DTA'\otimes DTB' \arrow[r, "\breve{DT}"] \arrow[d, "\lambda_{A'}\otimes\lambda_{B'}"'] & DT(A'\otimes B') \arrow[d, "\lambda_{A'\otimes B'}"] \\ I_{\underline{P}}A'\otimes I_{\underline{P}}B' \arrow[r, "\breve{I}_{\underline{P}}"] & I_{\underline{P}}(A'\otimes B') \end{tikzcd}$$

est commutatif pour $A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$. La définition de $\breve{DT}_{A',B'}$ (Chap. I, §4, n°1, Déf. 2) nous donne

$$\breve{DT}_{A',B'} = [C', C', \breve{T}_{TA',TB'} \otimes id_{TC'}] \quad , \ C' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$$

que nous écrivons ici

$$\breve{DT}_{A',B'} = [A'_o\otimes(A'_o\otimes A'_o), A'_o\otimes(A'_o\otimes A'_o), \breve{T}_{TA',TB'} \otimes id_{T(A'_o\otimes(A'_o\otimes A'_o))}]$$

En plus en appliquant les remarques 2) et 3) où on prend successivement les isomorphismes $id : A'_o \to A'_o$, $id : A'_o\otimes A'_o \to A'_o\otimes A'_o$, $id : A'\otimes B' \to A'\otimes B'$, nous obtenons

$$\lambda_{A'}\otimes\lambda_{B'} = [A'_o, A', c_{TA',TA'_o}]\otimes[A'_o, B', c_{TB',TA'_o}] = [A'_o\otimes A'_o, A'\otimes B', w] =$$

$$= [A'_o\otimes(A'_o\otimes A'_o), A'_o\otimes(A'\otimes B'), \overset{2}{w}] \ , \ w \text{ étant défini par } (9)$$

$$\lambda_{A'\otimes B'} = [A'_o, A'\otimes B', c_{T(A'\otimes B'),TA'_o}] =$$

$$= [A'_o\otimes(A'_o\otimes A'_o), (A'\otimes B')\otimes(A'_o\otimes A'_o), \tilde{c}_{T(A'\otimes B'),TA'_o}]$$

$$\breve{I}_{\underline{P}}(A',B') = d^{-1}_{1_{\underline{P}}} = [A'_o, A'_o\otimes A'_o, p^{-1}_{TA'_o}] = [A'_o\otimes(A'\otimes B'), (A'_o\otimes A'_o)\otimes(A'\otimes B'), \tilde{p}^{-1}_{TA'_o}]$$

Cela étant, la commutativité du diagramme considéré résulte de la remarque 1) et de (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 12).

<u>Proposition 18</u>.- Soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(E,\breve{E})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{Q}$ tel qu'il existe un $\otimes$-isomorphisme ~~foncteur~~

$$\mu : (E,\breve{E})\circ(T,\breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \breve{I}_{\underline{Q}})$$

Alors il existe un $\otimes$-foncteur ACU et un seul $(E',\breve{E}')$ de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$

tel que $(E, \breve{E}) = (E', \breve{E}') \circ (D, \breve{D})$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] \arrow[d, equal] & E'(\underline{1}_{P}) \\ ETA' \arrow[r, "\mu_{A'}"] & \underline{1}_{Q} \arrow[u, "\hat{E}'"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, $\hat{E}' : \underline{1}_{Q} \xrightarrow{\sim} E'(\underline{1}_{P})$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(E', \breve{E}')$ avec les unités de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$.

<u>Démonstration</u>. – 1° Unicité de $(E', \breve{E}')$. Supposons que $(E', \breve{E}')$ existe. Alors l'égalité $(E, \breve{E}) = (E', \breve{E}') \circ (D, \breve{D})$ nous donne

$$E'D = E \ ; \quad \breve{E'D} = \breve{E}$$

ou en vertu de la définition de $(D, \breve{D})$ (Prop. 16)

$$(11) \qquad E'(A) = E(A) \ , \quad \breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Faisons $A' = A'_0$ dans la formule (10) donnant $\lambda_{A'}$, nous obtenons $\lambda_{A'_0} = id$ puisque $T(c'_{A'_0, A'_0}) = id$, ce qui nous donne

$$(12) \qquad \hat{E}' = \mu^{-1}_{A'_0}$$

à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E'(DTA'_0) \arrow[r, "E'(\lambda_{A'_0}) = id"] \arrow[d, equal] & E'(\underline{1}_{P}) \\ ETA'_0 \arrow[r, "\mu_{A'_0}"] & \underline{1}_{Q} \arrow[u, "\hat{E}'"'] \end{tikzcd}$$

Puisque $(E', \breve{E}')$ est compatible avec les unités $(\underline{1}_{P}, g, d)$, $(\underline{1}_{Q}, g, d)$ de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ respectivement, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E'A \arrow[r, "E'd_A"] \arrow[d, "d_{E'A}"'] & E'(A \otimes \underline{1}_{P}) \\ E'A \otimes \underline{1}_{Q} \arrow[r, "id \otimes \hat{E}'"] & E'A \otimes E'\underline{1}_{P} \arrow[u, "\breve{E}'"'] \end{tikzcd}$$

qui donne l'unicité de $E'd_A$ en vertu de (11) et (12). L'unicité de $E'\lambda_{A'}$ vient du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] \arrow[d, equal] & E'(1_{\underline{P}}) \\
ETA' \arrow[r, "\mu_{A'}"] & 1_{\underline{Q}} \arrow[u, "\hat{E}'"']
\end{tikzcd}$$

et de la formule (12). D'où l'unicité de $id_{E'A} \otimes E'\lambda_{A'}$ et par conséquent l'unicité de $E'(id_A \otimes \lambda_{A'})$ en vertu de (11) et du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'(A\otimes TA') \arrow[r, "E'(id_A\otimes\lambda_{A'})"] & E'(A\otimes TA'_0) \\
E'A\otimes E'TA' \arrow[u, "\check{E}'"] \arrow[r, "id\otimes E'\lambda_{A'}"] & E'A\otimes E'TA'_0 \arrow[u, "\check{E}'"']
\end{tikzcd}$$

Enfin soit $[A', B', u] : A \to B$ une flèche de $\underline{P}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "{[A',B',u]}"'] & A\otimes 1_{\underline{P}} = A\otimes TA'_0 \arrow[r, "id_A\otimes\lambda^{-1}_{A'}"] & A\otimes TA' \arrow[d, "Du"] \\
B \arrow[r, "d_B"] & B\otimes 1_{\underline{P}} = B\otimes TA'_0 \arrow[r, "id_B\otimes\lambda^{-1}_{B'}"] & B\otimes TB'
\end{tikzcd}$$

et écrivons, successivement, en nous servant de la remarque 3) où l'on prend les isomorphismes $id : A' \to A'$, $id : A'_0 \to A'_0$

$$d_A = [A'_0\otimes A', A', p_A] = [A'\otimes(A'_0\otimes A'), A'\otimes A', \overset{2}{p}_A]$$

$$id_A \otimes \lambda^{-1}_{A'} = [A', A', id_{A\otimes TA'}]\otimes[A', A'_0, c_{TA'_0, TA'}] = [A'\otimes A', A'\otimes A'_0, w]$$

$$Du = [A'\otimes A'_0, A'\otimes A'_0, u\otimes id_{T(A'\otimes A'_0)}]$$

$$d_B \circ [A', B', u] = [A'_0\otimes B', B', p_B]\circ[A'_0\otimes A', A'_0\otimes B', \overset{2}{u}] =$$

$$= [A'_0\otimes A', B', p_B\circ\overset{2}{u}] = [A'\otimes(A'_0\otimes A'), A'\otimes B', \overset{2}{\overline{p_B\circ\overset{2}{u}}}]$$

$$id_B\otimes\lambda^{-1}_{B'} = [A', A', id_{B\otimes TA'}]\otimes[B', A'_0, c_{TA'_0, TB'}] = [A'\otimes B', A'\otimes A'_0, w_1]$$

w et w_1 étant définis par le diagramme commutatif (9). Il ne nous reste qu'à composer les flèches et nous servir de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) et de la fonctorialité de $\check{T}$ et des contraintes d'associativité, de commutativité pour avoir la commutativité du diagramme considéré. Appliquons à ce diagramme le foncteur E', nous obtenons le diagramme commutatif

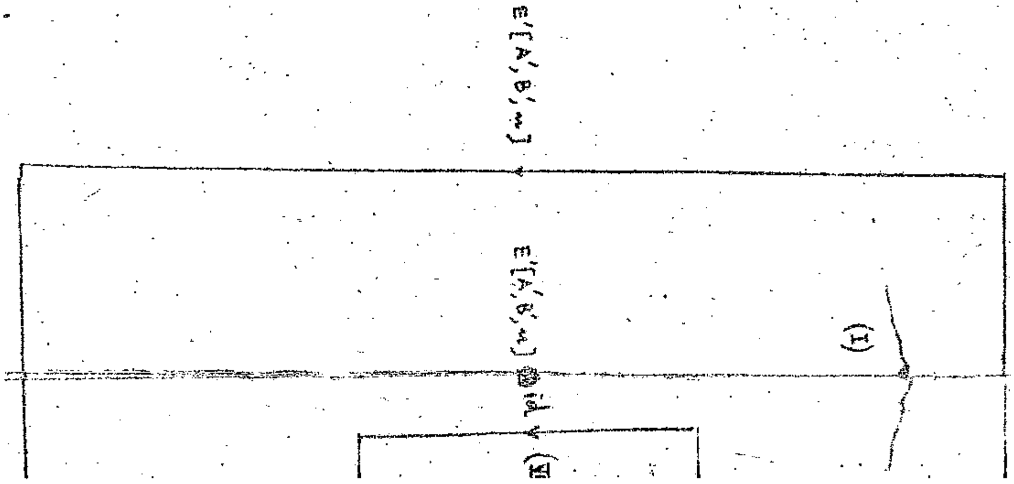
$$\begin{array}{ccccc} E'A & \xrightarrow{E'd_A} & E'(A\otimes TA'_0) & \xrightarrow{E'(id_A\otimes \lambda^{-1}_{A'})} & E'(A\otimes TA') \\ \downarrow{\scriptstyle E'([A',B',u])} & & & & \downarrow{\scriptstyle E'Du\,=\,Eu} \\ E'B & \xrightarrow{E'd_B} & E'(B\otimes TA'_0) & \xrightarrow{E'(id_B\otimes \lambda^{-1}_{B'})} & E'(B\otimes TB') \end{array}$$

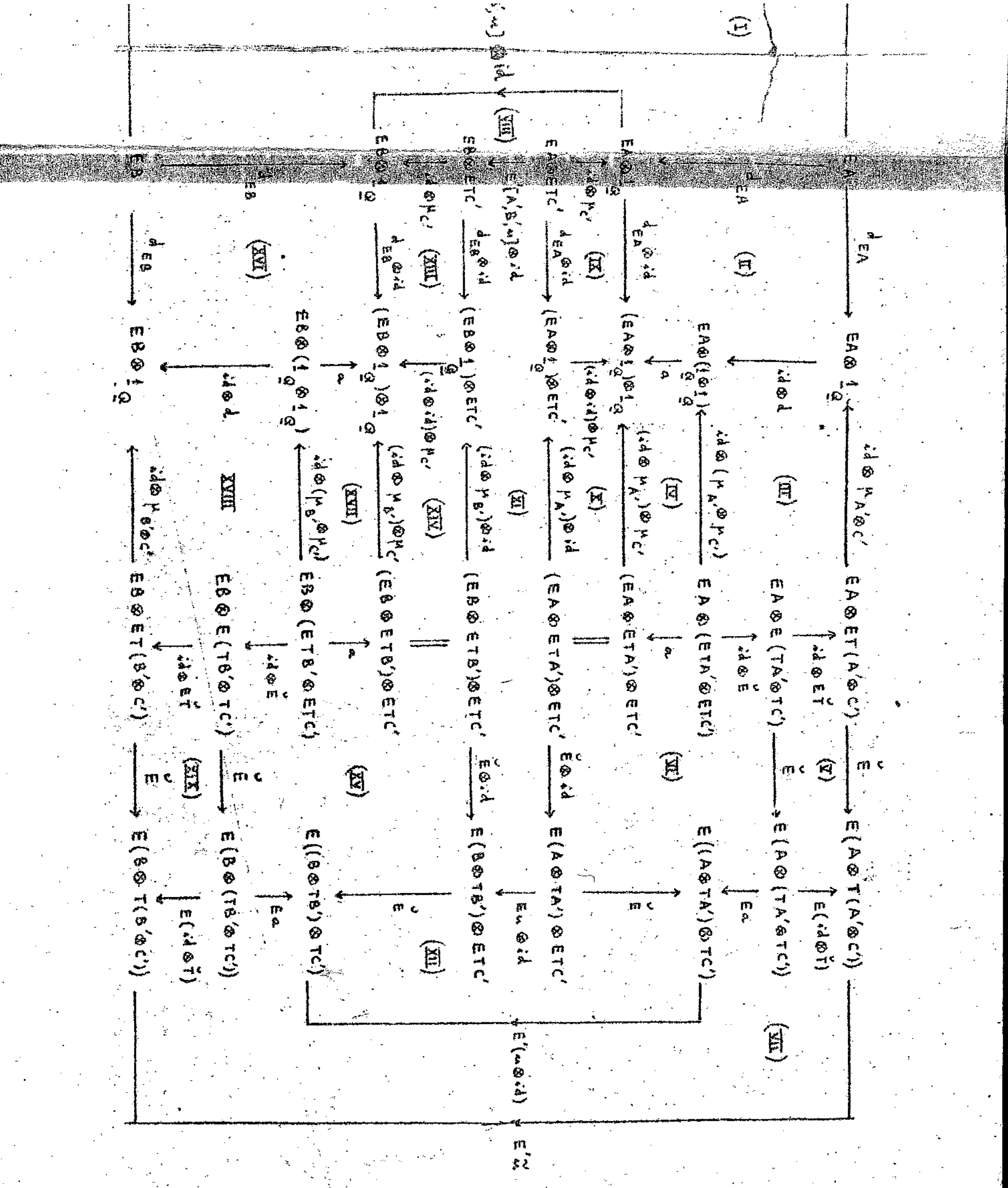
ce qui donne effectivement l'unicité de $E'([A',B',u])$ en vertu de l'unicité de $E'd_A$, $E'd_B$, $E'(id_A \otimes \lambda^{-1}_{A'})$, $E'(id_B\otimes \lambda^{-1}_{B'})$ qu'on vient de démontrer ci-dessus. D'où l'unicité du $\otimes$-foncteur $(E', \check{E}')$.

2° Existence de $(E', \check{E}')$. Soient $A, B \in Ob\,\underline{P}$ et $[A',B',u] : A \to B$ une flèche de $\underline{P}$. Définissons $E'A$, $\check{E}'_{A,B}$ par les formules (11) et $E'[A',B',u]$ par le diagramme commutatif

$$\text{(13)}\quad \begin{array}{ccccccc} E'A = EA & \xrightarrow{d_{EA}} & EA\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & \xleftarrow{id\otimes \mu_{A'}} & EA\otimes ETA' & \xrightarrow{\check{E}} & E(A\otimes TA') \\ \downarrow{\scriptstyle E'[A',B',u]} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle Eu} \\ E'B = EB & \xrightarrow{d_{EB}} & EB\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & \xleftarrow{id\otimes \mu_{B'}} & EB\otimes ETB' & \xrightarrow{\check{E}} & E(B\otimes TB') \end{array}$$

Prouvons que $E'[A',B',u]$ est indépendant des représentants de la classe $[A',B',u]$. D'abord nous allons montrer que $E'[A',B',u] = E'[A'\otimes C', B'\otimes C', \tilde{u}]$ où C' est un objet quelconque de $\underline{A}'$, $\tilde{u}$ défini dans la remarque 2) avec l'isomorphisme $id : C'_A \to C'$. Pour cela considérons le diagramme suivant





dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de d ; celle de (II), (XVI) de la compatibilité de la contrainte d'associativité a de Q avec sa contrainte d'unité $(\underline{1}_Q, g, d)$; celle de (III), (XVIII) du fait que μ est un $\otimes$-morphisme ; celle de (IV), (XVII) de la fonctorialité de a ; celle de (V), (XII), (XIX) de la fonctorialité de $\check{E}$; celle de (VI), (XV) de la compatibilité de $(E, \check{E})$ avec les contraintes d'associativité ; celle de (VII) de la définition de $\tilde{u}$ (Rem. 21) ; celle de (VIII), (IX), (X), (XIII), (XIV) s'obtient en composant les flèches ; celle de (XI) est donnée par le diagramme commutatif (13) ; d'où la commutativité du circuit circuit extérieur qui donne $E'[A', B', u] = E'[A'\otimes C', B'\otimes C', \tilde{u}]$. Ensuite soient (A', B', u), (A'_1, B'_1, u_1) tels que $u' : A' \xrightarrow{\sim} A'_1$, $v' : B' \xrightarrow{\sim} B'_1$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A\otimes TA' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id\otimes Tu'"'] & B\otimes TB' \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \\
A\otimes TA'_1 \arrow[r, "u_1"] & B\otimes TB'_1
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. D'après la remarque 1) on a $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$. Prouvons que $E'[A', B', u] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$. Pour cela considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & EA\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & EA\otimes ETA'_1 \arrow[l, "id\otimes \mu_{A'_1}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E(A\otimes TA'_1) \arrow[ddd, bend left=60, "Eu_1"] \\
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]}"'] & EA\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & EA\otimes ETA' \arrow[l, "id\otimes \mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[u, "id\otimes ETu'"'] & E(A\otimes TA') \arrow[u, "E(id\otimes Tu')"'] \arrow[d, "Eu\ (\mathrm{VIII})"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & EB\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & EB\otimes ETB' \arrow[l, "id\otimes \mu_{B'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "id\otimes ETv'"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & E(B\otimes TB') \arrow[d, "E(id\otimes Tv')"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] & EB\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & EB\otimes ETB'_1 \arrow[l, "id\otimes \mu_{B'_1}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes TB'_1)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (V) est évidente ; celle de (II), (VI) résulte de la fonctorialité de μ ; celle de (III), (VII) de la fonctorialité de $\check{E}$; celle de (IV) est donnée par le diagramme commutatif (13) ; enfin celle de (VIII) vient de l'hypothèse sur (A', B', u), (A'_1, B'_1, u_1) ; d'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité $E'[A', B', u] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$. Enfin soient (A', B', u), (A'_1, B'_1, u_1) tels qu'il existe des objets C', C'_1 et des isomorphismes $u' : A'\otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1\otimes C'_1$, $v' : B'\otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1\otimes C'_1$ de $\underline{A}'$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A\otimes T(A'\otimes C') & \xrightarrow{\tilde{u}} & B\otimes T(B'\otimes C') \\ {\scriptstyle id\otimes Tu'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes Tv'} \\ A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) & \xrightarrow{\tilde{u}_1} & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \end{array}$$

D'après ce que nous venons de démontrer nous avons

$$E'[A',B',u] = E'[A'\otimes C', B'\otimes C', \tilde{u}] = E'[A'_1\otimes C'_1, B'_1\otimes C'_1, \tilde{u}_1] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$$

ce qui montre que $E'[A',B',u]$ ne dépend pas effectivement des représentants de la classe $[A',B',u]$. Le diagramme commutatif (13) nous montre qu'en plus

$$E'([B',C',v]\circ[A',B',u]) = E'[B',C',v]\circ E'[A',B',u]$$

$$E'[A',A',id_{A\otimes TA'}] = id_{E'A}$$

ce qui fait que E' est bien un foncteur.

Il nous reste à prouver que $\breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B}$ est fonctoriel en A,B pour que $(E',\breve{E}')$ soit un $\otimes$-foncteur. Pour cela, nous démontrons d'abord la commutativité du diagramme

$$(14)\qquad \begin{array}{ccc} EA\otimes EA_1 & \xrightarrow{\breve{E}} & E(A\otimes A_1) \\ {\scriptstyle E'[A',B',u]\otimes id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E'([A',B',u]\otimes[A'_1,A'_1,id_{A_1\otimes TA'_1}])} \\ EB\otimes EA_1 & \xrightarrow{\breve{E}} & E(B\otimes A_1) \end{array}$$

$$(15)\qquad \begin{array}{ccc} EB\otimes EA_1 & \xrightarrow{\breve{E}} & E(B\otimes A_1) \\ {\scriptstyle id\otimes E'[A'_1,B'_1,u_1]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E'([B',B',id]\otimes[A'_1,B'_1,u_1])} \\ EB\otimes EB_1 & \xrightarrow{\breve{E}} & E(B\otimes B_1) \end{array}$$

ce qui donnera la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} EA\otimes EA_1 & \xrightarrow{\breve{E}} & E(A\otimes A_1) \\ {\scriptstyle E'[A',B',u]\otimes E'[A'_1,B'_1,u_1]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E'([A',B',u]\otimes[A'_1,B'_1,u_1])} \\ EB\otimes EB_1 & \xrightarrow{\breve{E}} & E(B\otimes B_1) \end{array}$$

Posons

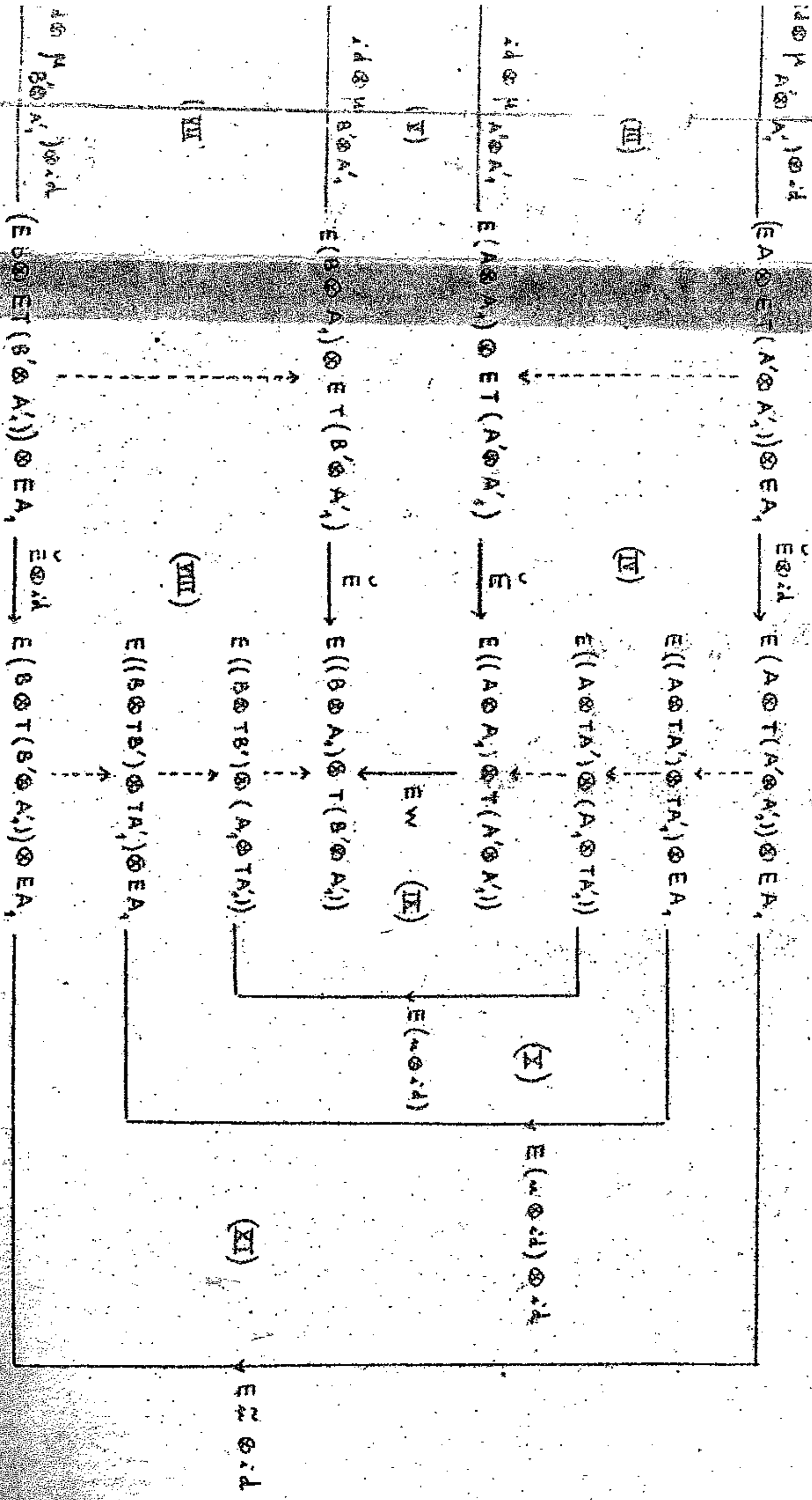
$$E'([A', B', u] \otimes [A'_1, A'_1, id_{A_1 \otimes TA'_1}]) = E'[A' \otimes A'_1, B' \otimes A'_1, w]$$

w étant défini par le diagramme commutatif (9), et soit $\tilde{u}$ la flèche dans $\underline{A}$ défini par le diagramme commutatif (Rem. 2))

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes A'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\tilde{u}"'] & (A \otimes TA') \otimes TA'_1 \arrow[d, "u \otimes Tid"] \\
B \otimes T(B' \otimes A'_1) \arrow[r, dashed] & (B \otimes TB') \otimes TA'_1
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
EA \otimes EA_1 \arrow[r, "d_{EA} \otimes id"] \arrow[d, "mc"'] \arrow[ddd, bend right=60, "{E'[A' \otimes A'_1, B' \otimes A'_1, \tilde{u}] \otimes id}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & (EA \otimes 1_Q) \otimes EA_1 \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & (id \otimes \mu_{A' \otimes A'_1}) \otimes id \arrow[l] \\
E(A \otimes A_1) \arrow[r, "d_{E(A \otimes A_1)}"] \arrow[d, "{E'[A' \otimes A'_1, B' \otimes A'_1, w]}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & E(A \otimes A_1) \otimes 1_Q & id \otimes \mu_{A' \otimes A'_1} \arrow[l] \\
E(B \otimes A_1) \arrow[r, "d_{E(B \otimes A_1)}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & E(B \otimes A_1) \otimes 1_Q \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & id \otimes \mu_{B' \otimes A'_1} \arrow[l] \\
EB \otimes EA_1 \arrow[r, "d_{EB} \otimes id"] \arrow[u, "mc"] & (EB \otimes 1_Q) \otimes EA_1 \arrow[u, dashed] & (id \otimes \mu_{B' \otimes A'_1}) \otimes id \arrow[l]
\end{tikzcd}$$



La commutativité des régions (II), (IV), (VI), (VIII) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (III), (VII), (X) de la fonctorialité de $\check{E}$ et des contraintes d'associativité, de commutativité ; celle de (V) et du circuit extérieur est donnée par la définition de $E'[A', B', u]$ (Diag. (13)) ; celle de (IX) par la définition de w (Diag. (9)) ; enfin celle de (XI) par la définition de $\tilde{\tilde{u}}$. D'où la commutativité de la région (I) qui n'est ~~pas~~ autre que le diagramme (14) en remarquant que $E'[A'\otimes A'_1, B'\otimes A'_1, \tilde{u}] = E'[A', B', u]$. De la même façon on démontre que le diagramme (15) est commutatif, ce qui montre que $\breve{E}'_{A,B}$ est fonctoriel en A, B. Le couple $(E', \breve{E}')$ ainsi défini est bien un $\otimes$-foncteur. Dans le cas où $[A', B', u] = Dv = [A', A', v\otimes id_{TA'}] : A \rightsquigarrow B$ le diagramme commutatif (13) est le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, "E'Dv"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & EA\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "Ev\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & EA\otimes ETA' \arrow[l, "id\otimes \mu_{A'}"'] \arrow[r, "\breve{E}"] \arrow[d, "Ev\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E(A\otimes TA') \arrow[d, "E(v\otimes id)"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] & EB\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & EB\otimes ETA' \arrow[l, "id\otimes \mu_{A'}"'] \arrow[r, "\breve{E}"] & E(B\otimes TA')
\end{tikzcd}$$

dont les régions (II) et (III) sont manifestement commutatives. D'où la commutativité de la région (I) qui donne, en vertu de la naturalité de d, $E'Dv = Ev$. On en conclut, avec la définition de $(D, \breve{D})$ (Prop. 16) et de $(E', \breve{E}')$ (For. (11)) que $(E, \breve{E}) = (E', \breve{E}')\circ(D, \breve{D})$.

3°. Compatibilité de $(E', \breve{E}')$ avec les contraintes. Pour les contraintes d'associativité et de commutativité, il suffit de remarquer que

$$E'[A', A', a_{A,B,C}\otimes id_{TA'}] = E'D(a_{A,B,C}) = E(a_{A,B,C})$$

$$E'[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}] = E'D(c_{A,B}) = E(c_{A,B})$$

$$\breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B}$$

pour avoir aussitôt les compatibilités. Quant à la contrainte d'unité de $\underline{P}$, nous avons pour l'image par E' de son objet unité $\underline{1}_{\underline{P}}$:

$$E'(\underline{1}_{\underline{P}}) = E'(TA'_0) = E(TA'_0) \xrightarrow[\sim]{\mu_{A'_0}} \underline{1}_{\underline{Q}}$$

D'où $E'(\underline{1}_{\underline{P}})$ est régulier et par suite $(E', \breve{E}')$ est compatible avec les unités en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 8).

4°. Enfin il nous reste à démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} ETA' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu_{A'}"'] & E'DTA' \arrow[d, "E'\lambda_{A'}"] \\ \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\hat{E}'"] & E'\underline{1}_{\underline{P}} = E'TA'_0 \end{tikzcd}$$

En vertu des formules (10) et (12) nous avons

$$\lambda_{A'} = [A'_0, A', c_{TA', TA'_0}]$$

$$\hat{E}' = \mu^{-1}_{A'_0}$$

La démonstration revient donc à démontrer l'égalité

$$E'\lambda_{A'} = E'[A'_0, A', c_{TA', TA'_0}] = \mu^{-1}_{A'_0}\mu_{A'}$$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] ETA' \arrow[r, "d_{ETA'}"] \arrow[d, "E'\lambda_{A'}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & ETA'\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mu_{A'}\otimes id"] \arrow[d, "\mu^{-1}_{A'_0}\mu_{A'}\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "c = id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & ETA'\otimes ETA'_0 \arrow[l, "\mu_{A'}\otimes\mu_{A'_0}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & E(TA'\otimes TA'_0) \arrow[d, "Ec"] \\ ETA'_0 \arrow[r, "d_{ETA'_0}"] & ETA'_0\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mu_{A'_0}\otimes id"] & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & ETA'_0\otimes ETA' \arrow[l, "\mu_{A'_0}\otimes\mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(TA'_0\otimes TA') \end{tikzcd}$$

où la commutativité de la région (II) est évidente ; celle de (III) résulte de la fonctorialité de la contrainte de commutativité c de $\underline{Q}$; celle de (IV) de la compatibilité de $(E, \check{E})$ avec les contraintes de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{Q}$, enfin celle du circuit extérieur de la définition de $E'[A'_0, A', c] = E'\lambda_{A'}$ (Diag. (13)). D'où la commutativité de (I) qui donne, en vertu de la naturalité de d, $E'\lambda_{A'} = \mu^{-1}_{A'_0}\mu_{A}$. La proposition est ainsi démontrée. Le triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ est donc une solution du problème universel posé.

<u>Remarque 5)</u>.– Dans la remarque 4) nous avons supposé $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in Ob\,\underline{A}$ pour simplifier les notations dans la construction du triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$. En vérité, c'est le $\otimes$-foncteur AC composé $(\tau, \check{\tau}) = (H, \check{H})\circ(T, \check{T}) : \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}^{\mathcal{S}}$, où $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est la $\otimes$-catégorie AC,

qui possède la propriété $\mathcal{T}(c'_{A',A'}) = id$, $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ étant la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par la partie multiplicative $\mathcal{S}$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de la forme $T(c'_{A',A'})$ et $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ (n° 1, Déf. 2) ; ce qui nous conduit à la définition suivante.

<u>Définition 4</u>.- Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : (a, c), A' une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : (a', c') et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(T, \check{T}) : \underline{A}' \to \underline{A}$ un $\otimes$-foncteur AC, $\mathcal{S}$ la partie multiplicative engendrée par l'ensemble des endomorphismes de $\underline{A}$ de la forme $T(c'_{A',A'})$, $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par $\mathcal{S}$, et $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$. On appelle <u>$\otimes$-catégorie ACU</u> de la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}$ définie par $(\underline{A}', (T, \check{T}))$ la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ suivante :

1° $Ob\,\underline{P} = Ob\,\underline{A}$

2° $Hom_{\underline{P}}(A, B) = \Phi(A, B)/\mathcal{R}_{A,B} \qquad A, B \in Ob\,\underline{P}$

$\Phi(A, B)$ étant l'ensemble des triples (A', B', u) où $A', B' \in Ob\,\underline{A}'$, $u \in Fl\,\underline{A}^{\circ}$, $u : A \otimes TA' \to B \otimes TB'$; $\mathcal{R}_{A,B}$ la relation <u>binaire</u> définie dans $\Phi(A, B)$ de la façon suivante

$$(A'_1, B'_1, u_1)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_2, B'_2, u_2)$$

si et seulement s'il existe des objets C'_1, C'_2 de $\underline{A}'$ et des isomorphismes

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2 \ , \ v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

de $\underline{A}'$ tels que soit commutatif dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ le diagramme suivant (i.e ce diagramme est dans $\underline{A}$ et il est transformé par le foncteur H en un diagramme commutatif dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$).

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id \otimes Tu'"'] & (A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1 \otimes id"] & (B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[d, "id \otimes Tv'"] \\
A \otimes T(A'_2 \otimes C'_2) \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_2) \otimes TC'_2 \arrow[r, "u_2 \otimes id"] & (B \otimes TB'_2) \otimes TC'_2 \arrow[r, dashed] & B \otimes T(B'_2 \otimes C'_2)
\end{tikzcd}$$

3° Composition des flèches dans $\underline{P}$. Soient $[A', B', u] : A \to B$, $[B'', C'', v] : B \to C$.

$$[B'', C'', v] \circ [A', B', u] = [A' \otimes B'', B' \otimes C'', w]$$

w étant défini par le diagramme commutatif (8)

4° $\otimes$-structure sur $\underline{P}$

$$A \otimes B \text{ (dans } \underline{P}) = A \otimes B \text{ (dans } \underline{A})$$

$$[A', B', u] \otimes [E', F', v] = [A' \otimes E', B' \otimes F', W]$$

W étant défini par le diagramme commutatif (9)

5° Contrainte ACU dans $\underline{P}$

$$([A', A', a \otimes id], [A', A', c \otimes id], (TA'_0, [A'_0 \otimes A', A', t_A], [A'_0 \otimes A', A', r_A]))$$

t_A et r_A étant définis dans la proposition 14.

On appelle <u>$\otimes$-foncteur canonique</u> de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ le $\otimes$-foncteur AC $(D, \check{D})$:

$$D(A) = A \ , \ D(u) = [A', A', u \otimes id_{TA'}] \ , \ \check{D}_{A,B} = id_{A \otimes B}$$

pour $A, B \in Ob\,\underline{A}$, $u : A \to B$.

On appelle <u>$\otimes$-isomorphisme ~~(fonctoriel)~~ canonique</u> le $\otimes$-isomorphisme ~~(fonctoriel)~~

$$\lambda : (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$$

défini dans la proposition 17.

On voit aussitôt que si $\underline{A}$ est un groupoïde et si pour tout $A \in Ob\underline{A}$, il existe $B \in Ob\underline{A}$, $A' \in Ob\underline{A}'$ tels que $A \otimes B \simeq TA'$, alors $\underline{P}$ est une Pic-catégorie (Chap. II, §2, n°1).

Les hypothèses et les notations restant les mêmes que dans la définition 4, en plus nous notons par $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q})$ la catégorie ayant pour objets les $\otimes$-foncteurs ACU de $\underline{P}$ (Déf. 4) dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$; pour morphismes les $\otimes$-morphismes unifères (Chap. I, §4, n°2, Déf. 7) ; par $\mathrm{Hom}^{\otimes, AC}(\underline{A}, \underline{Q})$ l'ensemble des $\otimes$-foncteurs AC de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$; et par $\underline{\mathcal{C}}$ la catégorie définie de la manière suivante :

$$\mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{C}} = \{((E,\breve{E}),\mu) \mid (E,\breve{E}) \in \mathrm{Hom}^{\otimes, AC}(\underline{A}, \underline{Q}),\ \mu : \otimes\text{-isomorphisme} : (E,\breve{E})\circ(T,\breve{T}) \xrightarrow{\sim} I_{\underline{Q}}\}$$

$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(((E,\breve{E}),\mu),((F,\breve{F}),\nu))$ = l'ensemble des $\otimes$-morphismes du $\otimes$-foncteur $(E,\breve{E})$ dans le $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F})$ tels que soit commutatif le diagramme

(16)
$$\begin{tikzcd} ET \arrow[r, "\mu", "\sim"'] \arrow[d, "\tau T"'] & I_{\underline{Q}} \arrow[d, equal] \\ FT \arrow[r, "\nu", "\sim"'] & I_{\underline{Q}} \end{tikzcd}$$

$(I_{\underline{Q}}, \breve{I}_{\underline{Q}})$ étant le $\otimes$-foncteur $1_{\underline{Q}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{Q}$ (Déf. 3). Alors nous avons la proposition suivante

<u>Proposition 19</u>. – Les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q})$ et $\underline{\mathcal{C}}$ sont isomorphes.

<u>Démonstration</u>. – Posons

$$S : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q}) \longrightarrow \underline{\mathcal{C}}$$

$$\begin{tikzcd} (E',\breve{E}') \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\tau'"'] & ((E,\breve{E}) = (E',\breve{E}')\circ(D,\breve{D}),\ \mu = \hat{E}'^{-1} \circ E'\lambda) \arrow[d, "\tau = \tau' D"] \\ (F',\breve{F}') \arrow[r, mapsto] & ((F,\breve{F}) = (F',\breve{F}')\circ(D,\breve{D}),\ \nu = \hat{F}'^{-1} \circ F'\lambda) \end{tikzcd}$$

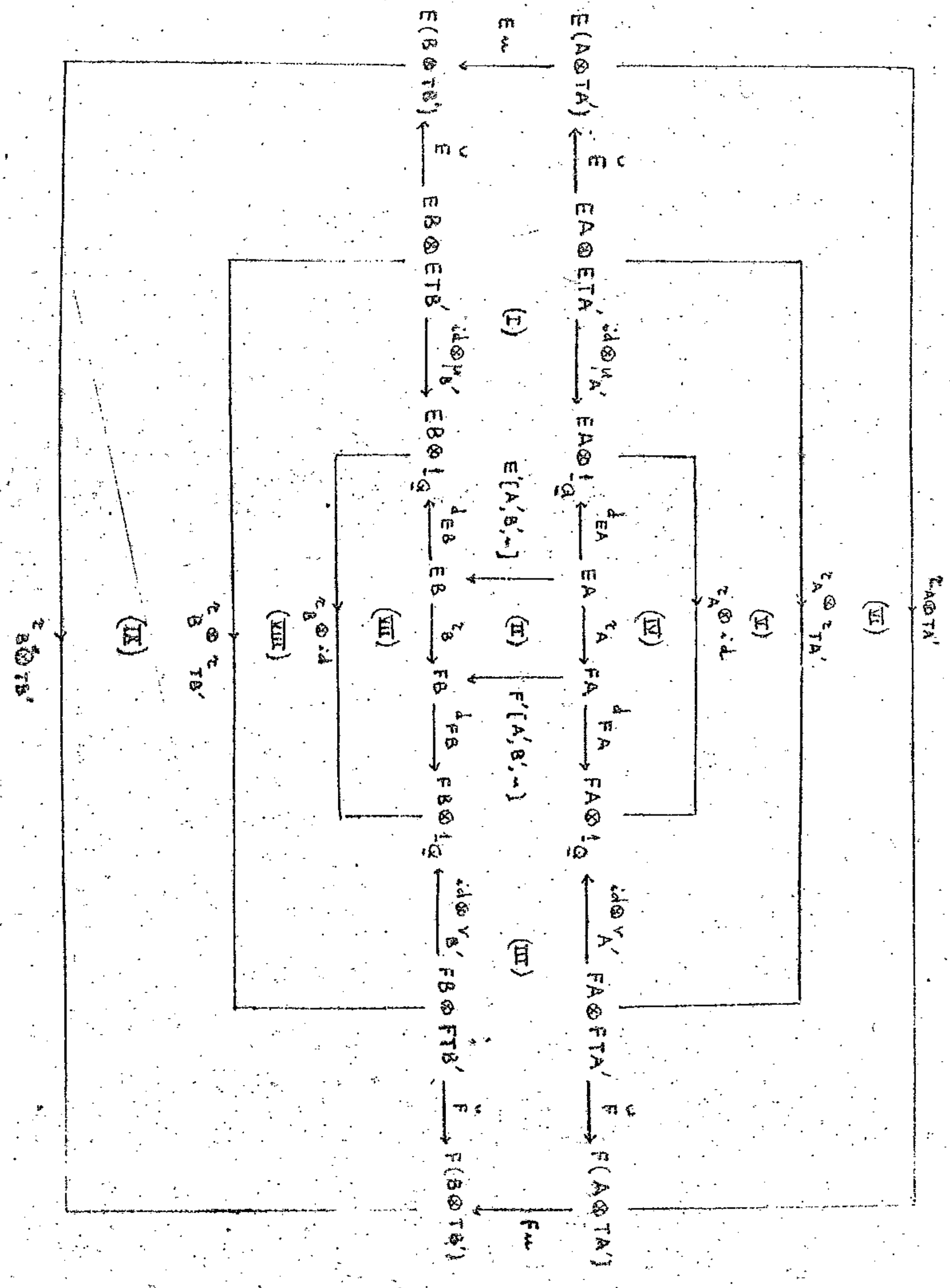
En vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 1 et 2) $(E,\breve{E}) = (E',\breve{E}')\circ(D,\breve{D})$ et $(F,\breve{F}) = (F',\breve{F}')\circ(D,\breve{D})$ appartiennent bien à $\mathrm{Hom}^{\otimes, AC}(\underline{A}, \underline{Q})$. De plus $\tau = \tau' D$ est un $\otimes$-morphisme (Chap. I, §4, n°1). Ensuite considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
ETA' = E'DTA' \arrow[r, "E'\lambda_{A'}"] \arrow[rr, bend left, "\mu_{A'}"] \arrow[d, "\tau_{TA'} = \tau'_{DA'}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & E'\underline{1}_{\underline{P}} \arrow[d, "\tau'_{\underline{1}_{\underline{P}}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[l, "\hat{E}'"'] \arrow[d, equal] \\
FTA' = F'DTA' \arrow[r, "F'\lambda_{A'}"] \arrow[rr, bend right, "\nu_{A'}"'] & F'\underline{1}_{\underline{P}} & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[l, "\hat{F}'"']
\end{tikzcd}
$$

(I) (IV)

où les régions (I), (IV) sont commutatives par la définition de μ, ν ; (II) par la naturalité de τ' ; (III) en vertu du fait que τ' est uniforme ; d'où la commutativité du circuit extérieur qui montre que τ est effectivement une flèche de $\underline{\mathcal{C}}$. Enfin on vérifie aussitôt que $S(s'\tau') = S(s')S(\tau')$ et $S(id) = id$, par conséquent S est bien un foncteur.

Montrons maintenant que S est un isomorphisme. En vertu de la proposition 18, S est une bijection entre $Ob(\underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q}))$ et $Ob\, \underline{\mathcal{C}}$. Il nous reste à prouver que S est aussi une bijection entre $Fl(\underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q}))$ et $Fl\, \underline{\mathcal{C}}$. On voit aussitôt que S est une injection en vertu de $\tau_X = \tau'_{DX} = \tau'_X$ pour tout objet X de $\underline{A}$. Donnons-nous une flèche τ de $\underline{\mathcal{C}}$, i.e un $\otimes$-morphisme de $(E, \check{E})$ dans $(F, \check{F})$ tel qu'on ait la commutativité du diagramme (16) et soient $(E', \check{E}')$, $(F', \check{F}') \in Hom^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q})$ tels que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$, $(F, \check{F}) = (F', \check{F}') \circ (D, \check{D})$ (Prop. 18). En vertu de la proposition 18 (For. (11)), $E'A = EA$, $F'A = FA$ pour tout $A \in Ob\,\underline{P} = Ob\,\underline{A}$. Posons $\tau'_A = \tau_A$, $A \in Ob\,\underline{P}$, et montrons que τ' est un $\otimes$-morphisme uniforme de $(E', \check{E}')$ dans $(F', \check{F}')$. D'abord considérons le diagramme ci-dessous où les régions (I), (III) sont commutatives par la définition de $E'[A', B', u]$, $F'[A', B', u]$ (Diag. (13)) ; (VI), (VII) par la fonctorialité de $\otimes$; (V), (VIII) en vertu du fait que τ est une flèche de $\mathcal{C}$; (IV), (IX) et le circuit extérieur puisque τ est un $\otimes$-morphisme ; d'où la commutativité de la région (II) qui montre que τ'_A est fonctoriel en A.



On vérifie aussitôt que τ' est un $\otimes$-morphisme puisque τ en est un et puisque

$$E'A = EA\ ,\ F'A = FA\ ,\ \breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B}\ ,\ \breve{F}'_{A,B} = \breve{F}_{A,B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (For. (11)). Enfin par la définition de τ', nous avons

$$\tau'_{\underline{1}_{\underline{P}}} = \tau'_{TA'_0} = \tau_{TA'_0} = \gamma^{-1}_{A'_0}\,\mu_{A'_0}\,,$$

la dernière égalité étant le résultat de la commutativité du diagramme (16). On en conclut que τ' est unifère en appliquant (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 4).

§2. Le problème d'inverser des objets

1. Construction de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie ACU.

Dans tout ce n°, $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, $\underline{C}'$ une $\otimes$ catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a', c', (\underline{1}', g', d'))$ et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(F, \breve{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un $\otimes$-foncteur ACU. On se propose de chercher une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur ACU $(\mathfrak{D}, \breve{\mathfrak{D}}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{P}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{tikzcd} \underline{Q} & & \\ & \underline{C} \arrow[ul, "\mathcal{E}"'] \arrow[r, "\mathfrak{D}"] & \underline{P} \arrow[ull, bend right, "\exists ! E"'] \\ & \underline{C}' \arrow[u, "F"] & \end{tikzcd}$$

1° $\mathfrak{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.

2° Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \breve{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme près) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}}) \simeq (E', \breve{E}') \circ (\mathfrak{D}, \breve{\mathfrak{D}})$.

Pour la construction de la solution du problème, nous avons be-