Chapitre II

Gr-catégories et Pic-catégories

§1 Gr-catégories

1. Définition des Gr-catégories.

Définition 1.- Une Gr-catégorie $\underline{P}$ est une $\otimes$-catégorie AU (Chap. I, §3, n°2, Déf. 5), dont tous les objets sont inversibles (Chap. I, §3, n°5, Déf. 9), et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, i.e toutes les flèches sont des isomorphismes. Il résulte de la définition que tous les objets de $\underline{P}$ sont réguliers (Chap. I, §3, n°5, Prop. 18).

Proposition 1.- Soient $\underline{P}$, $\underline{P}'$ des Gr-catégories et $(F, \breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$ un $\otimes$-foncteur associatif. Alors $(F, \breve{F})$ est unifère.

Démonstration.- On a aussitôt la proposition en remarquant que $F(\underline{1})$ est régulier, $\underline{1}$ étant l'objet unité de $\underline{P}$, et en appliquant la proposition 8 du (Chap. I, §4, n°2).

Proposition 2.- Soient $\underline{P}$ une Gr-catégorie, $\underline{P}'$ une $\otimes$-catégorie AU, $\underline{1}$ et $\underline{1}'$ les objets unités de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ respectivement. Soit $(F, \breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$ une $\otimes$-équivalence telle qu'on ait $F\underline{1} \simeq \underline{1}'$. Alors $\underline{P}'$ est une Gr-catégorie.

Démonstration.- D'abord toutes les flèches de $\underline{P}'$ sont des isomorphismes en vertu du fait que toutes les flèches de $\underline{P}$ sont des isomorphismes et F est une équivalence.

Montrons maintenant que tous les objets de $\underline{P}'$ sont inversibles. Soit Y un objet de $\underline{P}'$. Puisque F est une équivalence, il existe $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ tel que $Y \simeq FX$. $\underline{P}$ est une Gr-catégorie, ses objets sont donc inversibles, par conséquent il existe $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ tel que $X' \otimes X \simeq X \otimes X' \simeq \underline{1}$ (Chap. I, §3, n°5, Cor de la Prop. 17). Nous avons

$$FX' \otimes Y \simeq FX' \otimes FX \overset{\check{F}}{\simeq} F(X' \otimes X) \simeq F\underline{1} \simeq \underline{1}'$$

$$Y \otimes FX' \simeq FX \otimes FX' \overset{\check{F}}{\simeq} F(X \otimes X') \simeq F\underline{1} \simeq \underline{1}'$$

Ce qui prouve bien que Y est inversible.

2. Premiers invariants d'une Gr. catégorie.

Définition 2.- Soit $\underline{P}$ une Gr. catégorie. Nous poserons par la suite :

$\Pi_0(\underline{P})$ = ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de $\underline{P}$,

$\Pi_1(\underline{P}) = \text{Aut}\,(\underline{1})$.

$\Pi_0(\underline{P})$ muni de la loi de composition, qu'on note multiplicativement, induite par l'opération $\otimes$, est un groupe, l'élément unité 1 étant la classe des objets isomorphes à $\underline{1}$. Ainsi, on vient d'attacher à une Gr. catégorie $\underline{P}$, des groupes $\Pi_0(\underline{P})$, $\Pi_1(\underline{P})$, où $\Pi_1(\underline{P})$ est commutatif (Chap. I, §2, n°3, Prop. 7). La loi de composition de $\Pi_1(\underline{P})$ est notée désormais additivement.

Exemples.- Soit G un groupoïde, et posons $\underline{P} = \underline{\text{Aut}}\,(G)$. Alors $\underline{P}$ est de façon naturelle une Gr. catégorie, la loi $\otimes$ étant donné par la composition des foncteurs. On pourrait appeler $\Pi_0(\underline{P})$ le groupe des automorphismes extérieurs de G, et $\Pi_1(\underline{P})$ le centre de G.

On a les propositions suivantes pour une Gr. catégorie $\underline{P}$.

Proposition 3.- Les homomorphismes γ_X et δ_X définis dans (Chap. I, §2, n°3, Prop. 8) sont des isomorphismes.

Démonstration.- Résultat immédiat de ce que X est régulier.

Proposition 4.- Soit $\underline{Q}$ une composante connexe de $\underline{P}$. Les applications

(1)
$$\begin{aligned} \text{Aut}\,(\underline{1}) &\longrightarrow \text{Aut}\,(id_{\underline{Q}}) \\ u &\longmapsto (\gamma_X u)_{X \in \text{Ob}\,\underline{Q}} \end{aligned}$$

et

$$(2) \qquad \mathrm{Aut}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(id_{\underline{Q}})$$
$$u \longmapsto (\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}}$$

sont des isomorphismes.

<u>Démonstration.</u>— En vertu de (Chap. I, §2, n°3, Prop. 10) et de la proposition 3, les applications (1) et (2) sont des homomorphismes injectifs. Démontrons que (1) est aussi surjective, l'assertion analogue pour (2) étant démontrée de façon semblable. Soit $\tau = (\tau_X)_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}}$ un élément de $\mathrm{Aut}(id_{\underline{Q}})$ et soit $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}$. Puisque $\underline{Q}$ est connexe, il existe une flèche $f : X \longrightarrow Y$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "\gamma_X^{-1}(\tau_X)\otimes id"] \arrow[dddd, bend right=60, "id\otimes f"', "(\mathrm{V})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[dddd, bend left=60, "id\otimes f", "(\mathrm{VI})"'] \\
X \arrow[u, "g_X"] \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & X \arrow[u, "g_X"'] \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "g_Y"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & Y \arrow[d, "g_Y"] \\
\underline{1}\otimes Y \arrow[r, "\gamma_Y^{-1}(\tau_Y)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \underline{1}\otimes Y \\
\underline{1}\otimes X \arrow[u, "id\otimes f"] \arrow[r, "\gamma_Y^{-1}(\tau_Y)\otimes id"] & \underline{1}\otimes X \arrow[u, "id\otimes f"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I) et (III) résulte de la définition de γ ; celle de (II) de la fonctorialité de τ ; celle de (V) et (VI) de la naturalité de g ; enfin celle de (IV) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne

$$(3) \qquad \gamma_X^{-1}(\tau_X) = \gamma_Y^{-1}(\tau_Y)$$

en vertu du fait que X est régulier. Posons $u = \gamma_X^{-1}(\tau_X) = \gamma_Y^{-1}(\tau_Y)$, nous avons bien $\tau = (\gamma_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}}$, ce qui montre que l'application (1) est surjective. Par le même raisonnement, on obtient

$$(4) \qquad \delta_X^{-1}(\tau_X) = \delta_Y^{-1}(\tau_Y)$$

ce qui donne (2) surjective.

<u>Corollaire</u>.– Soient $X, Y \in s$ avec $s \in \Pi_0(\underline{P})$. On a

$$(5) \qquad \gamma_X^{-1}\delta_X(u) = \gamma_Y^{-1}\delta_Y(u)$$

$$(6) \qquad \delta_X^{-1}\gamma_X(u) = \delta_Y^{-1}\gamma_Y(u)$$

pour tout $u \in \mathrm{Aut}(\underline{1}) = \Pi_1(\underline{P})$.

<u>Démonstration</u>.– Posons

$$(\tau_X)_{X\in s} = (\delta_X u)_{X\in s} \quad (\text{resp. } (\tau_X)_{X\in s} = (\gamma_X u)_{X\in s})$$

et appliquons la formule (3) (resp. (4)), on obtient (5) (resp. (6)).

<u>Proposition 5</u>.– L'action de $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$ définie par la relation

$$(7) \qquad su = \gamma_X^{-1}\delta_X(u) \quad ; \; X \in s, \; s \in \Pi_0(\underline{P}), \; u \in \Pi_1(\underline{P})$$

possède les propriétés suivantes :

(i) $s(u_1 + u_2) = su_1 + su_2$,

(ii) $(ss')u = s(s'u)$,

(iii) $1u = u$;

i.e le groupe abélien $\Pi_1(\underline{P})$ muni de l'action (7) est un $\Pi_0(\underline{P})$-module à gauche.

<u>Démonstration</u>.– (i) Nous avons

$$s(u_1+u_2) = \gamma_X^{-1}\delta_X(u_1+u_2) = \gamma_X^{-1}(\delta_X u_1 + \delta_X u_2) = \gamma_X^{-1}\delta_X u_1 + \gamma_X^{-1}\delta_X u_2 = su_1 + su_2$$

en appliquant la formule (7) et la proposition 3.

(ii) Soient $X \in s$, $X' \in s'$, d'où $X \otimes X' \in ss'$. Par suite en appliquant la formule (7) et les formules (28), (29), (30) dans (Chap. I, §3, n°2, Prop. 17), nous obtenons

$$(ss')u = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}\delta_{X\otimes X'}(u) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(id_X \otimes \delta_{X'} u) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(id_X \otimes \gamma_{X'}\gamma_{X'}^{-1}\delta_{X'} u) =$$

$$= \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(id_X \otimes \gamma_{X'}(s'u)) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\delta_X(s'u) \otimes id_{X'}) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\gamma_X\gamma_X^{-1}\delta_X(s'u) \otimes id_{X'}),$$

$$= \gamma^{-1}_{X\otimes X'}\left(\gamma_X(s(s'u))\otimes id_{X'}\right) = \gamma^{-1}_{X\otimes X'}\,\gamma_{X\otimes X'}(s(s'u)) = s(s'u).$$

(iii) Compte tenu de la relation (9) dans (Chap. I, §2, n°3, Prop. 8), nous avons

$$1u = \gamma^{-1}_{\underline{1}}\delta_{\underline{1}}(u) = u.$$

Par une démonstration analogue nous obtenons :

<u>Proposition 6</u>.– L'action de $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$ définie par la relation

$$(8) \qquad uS = \delta^{-1}_X\gamma_X(u) \quad ; \ X \in s, \ s \in \Pi_0(\underline{P}), \ u \in \Pi_1(\underline{P})$$

possède les propriétés suivantes :

(i) $(u_1 + u_2)S = u_1S + u_2S$,

(ii) $u(SS') = (uS)S'$,

(iii) $u1 = u$;

i.e $\Pi_1(\underline{P})$ muni de l'action (8) est un $\Pi_0(\underline{P})$-module à droite.

Dire que $uS =$ c'est !

<u>Remarque</u>.– Soit $\underline{P}_0$ la composante connexe de $1 \in \Pi_0(\underline{P})$, i.e la sous-catégorie pleine de $\underline{P}$ des objets isomorphes à $\underline{1}$: on voit alors que $\underline{P}_0$ est un groupoïde connexe <u>commutatif</u>, donc les groupes $Aut(X)$ $(X \in Ob\underline{P}_0)$ sont canoniquement isomorphes entre eux, ou encore canoniquement isomorphes au groupe $\Pi_1(\underline{P}) = Aut(\underline{1})$. Ces isomorphismes

$$\begin{aligned} Aut(\underline{1}) &\longrightarrow Aut(X) \\ u &\longmapsto fuf^{-1} \end{aligned}$$

où $X \in Ob\underline{P}_0$ et $f : \underline{1} \to X$ une flèche quelconque, coïncident avec les isomorphismes γ_X, δ_X. En effet, en vertu de la relation (9) dans (Chap. I, §2, n°3, Prop. 8) nous avons

$$\gamma_{\underline{1}}(u) = \delta_{\underline{1}}(u) = u$$

pour tout $u \in Aut(\underline{1})$. Puisque $(\gamma_X u)_{X\in Ob\underline{P}}$ et $(\delta_X u)_{X\in Ob\underline{P}}$ sont commutativité des diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[r, "\gamma_{\underline{1}} u = u"] \arrow[d, "f"'] & \underline{1} \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\gamma_X u"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[r, "\delta_{\underline{1}} u = u"] \arrow[d, "f"'] & \underline{1} \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\delta_X u"] & X \end{tikzcd}$$

pour toute flèche $f : \underline{1} \to X$, ce qui montre que γ_X, δ_X coïncident avec les isomorphismes $u \mapsto fuf^{-1}$.

3. Structure des Gr-catégories.

Définition 3.– Soient $\underline{P}$ une Gr-catégorie, $(a, (\underline{1}, g, d))$ la contrainte AU de $\underline{P}$, $\Pi_0(\underline{P})$ et $\Pi_1(\underline{P})$ les groupes attachés à $\underline{P}$ dans (n° 2, Déf. 2). On construit une catégorie $\underline{S}$ dont les objets sont les éléments de $\Pi_0(\underline{P})$, les morphismes sont des automorphismes. On pose pour chaque $s \in \Pi_0(\underline{P})$

$$\mathrm{Aut}_{\underline{S}}(s) = \{s\} \times \Pi_1(\underline{P})$$

la composition des flèches étant l'addition de $\Pi_1(\underline{P})$. Pour chaque classe $s = \mathrm{cl}\, X \in \Pi_0(\underline{P})$, on choisit un représentant noté X_s ; et pour chaque $X \in s$, on choisit un isomorphisme $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$, tel que

$$(9) \qquad i_{X_s} = id_{X_s} .$$

Proposition 7.– Le foncteur $G : \underline{P} \to \underline{S}$ défini par

$$(10) \qquad \begin{cases} G(X) = s \\ G(f) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Y f i_X)) \end{cases}$$

pour $X, Y \in s$ et $f : X \to Y$, est une équivalence.

Démonstration.– D'abord, on a

$$G(id_X) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(id_{X_s})) = (s, 0)$$

et pour $h : Y \to Z$,

$$G(hf) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i_Z^{-1} h f i_X)) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i_Z^{-1} h i_Y i_Y^{-1} f i_X)) =$$

$$= (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i_Z^{-1} h i_Y) + \gamma^{-1}_{X_s}(i_Y^{-1} f i_X)) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i_Z^{-1} h i_Y)) \circ (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i_Y^{-1} f i_X))$$

$$= G(h)\, G(f),$$

ce qui montre que G est un foncteur. Construisons un foncteur $H : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ de la manière suivante :

$$(H) \qquad \begin{cases} H(s) = X_s \\ H(s,u) = \gamma_{X_s}(u) \end{cases}$$

H est bien un foncteur. Par la définition de G, H ; pour $X, Y \in s$ et $f : X \longrightarrow Y$, on a

$$HG(X) = HG(Y) = X_s$$

$$HG(f) = i_Y^{-1} f i_X$$

$$GH(s) = s$$

$$GH(s,u) = (s,u)$$

ce qui donne les isomorphismes fonctoriels

$$HG(X) \xrightarrow[\sim]{i_X} X$$

$$GH(s) \overset{id_s}{=} s .$$

qui, compte tenu de (9), vérifient bien (Chap. I, §5, n°1, Rel. (1)). Par conséquent G est bien une équivalence.

<u>Définition 4</u>.- Définissons une loi $\otimes$ dans la catégorie $\underline{S}$ par transport au moyen du quadruple (G, H, i, id) défini dans la proposition 7 où $G : \underline{P} \longrightarrow \underline{S}$, $H : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$, $HG \xrightarrow[\sim]{i} id_{\underline{P}}$, $GH \overset{id}{=} id_{\underline{S}}$. En vertu de (Chap. I, §5, n°2, Déf. 3), nous avons

(12) $$s \otimes t = G(Hs \otimes Ht) = G(X_s \otimes X_t) = st$$

Pour $(s,u) : s \longrightarrow s$, $(t,v) : t \longrightarrow t$,

$$(s,u) \otimes (t,v) = G(H(s,u) \otimes H(t,v)) = G(\gamma_{X_s}(u) \otimes \gamma_{X_t}(v)) =$$

$$= (st, \gamma^{-1}_{X_{st}}(i^{-1}_{X_s \otimes X_t}(\gamma_{X_s}(u) \otimes \gamma_{X_t}(v))\, i_{X_s \otimes X_t}))$$

Or nous avons, d'après (Chap. I, §3, n°2, For. (28) et (30)) et (n°2, For. (7))

$$\gamma_{X_s}(u) \otimes id_{X_t} = \gamma_{X_s \otimes X_t}(u)$$

$$id_{X_s} \otimes \gamma_{X_t}(v) = \delta_{X_s}(v) \otimes id_{X_t} = \gamma_{X_s} \gamma^{-1}_{X_s} \delta_{X_s}(v) \otimes id_{X_t} =$$

$$= \gamma_{X_s \otimes X_t}(\gamma^{-1}_{X_s} \delta_{X_s}(v)) = \gamma_{X_s \otimes X_t}(sv)$$

Par conséquent

$$\gamma_{X_s}(u) \otimes \gamma_{X_t}(v) = (\gamma_{X_s}(u) \otimes id_{X_t})(id_{X_s} \otimes \gamma_{X_t}(v)) =$$

$$= \gamma_{X_s \otimes X_t}(u)\, \gamma_{X_s \otimes X_t}(sv) = \gamma_{X_s \otimes X_t}(u + sv)$$

Ce qui donne, compte tenu de la fonctorialité de $\gamma(u)$

$$i^{-1}_{X_s \otimes X_t}(\gamma_{X_s \otimes X_t}(u + sv))\, i_{X_s \otimes X_t} = \gamma_{X_{st}}(u + sv)$$

D'où la formule

(13) $$(s,u) \otimes (t,v) = (st, u + sv).$$

On voit aussitôt que la loi ⊗ définie dans $\underline{S}$ par les formules (12) et (13) est indépendante du choix de X_s et i_X, et analogue à celle définie dans la catégorie $\underline{C}$ construite au moyen d'un groupe M et d'un M-module abélien N à gauche (Chap. I, §1, n°2, Ex. 5)). La ⊗-catégorie $\underline{S}$ est appelée la *⊗-catégorie réduite* de la Gr-catégorie $\underline{P}$.

En vertu de (Chap. I, §5, n°2, Prop. 10, For. (8)) posons :

$$\check{G}_{X,Y} = G(i_X \otimes i_Y) \ , \ \check{H}_{s,t} = i^{-1}_{X_s \otimes X_t} \qquad (14)$$

ce qui fait que $((G,\check{G}),(H,\check{H}), i, id)$ est un quadruple de ⊗-équivalence entre $\underline{P}$ et $\underline{S}$ (Chap. I, §5, n°2, Prop. 3).

Nous avons vu que le choix de X_s pour chaque $s \in \Pi_0(\underline{P})$ et de $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$ pour chaque $X \in s$ détermine les ⊗-équivalences

$$(G,\check{G}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{S} \ , \ (H,\check{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P} \ , \quad (\text{For. } (10), (11), (14))$$

ce qui conduit à la définition suivante :

<u>Définition 5</u>.- Soit $\underline{P}$ une Gr-catégorie. On dit qu'on a donné un <u>épinglage</u> dans $\underline{P}$, si pour chaque classe $s \in \Pi_0(\underline{P})$, on a choisi un représentant noté X_s, et pour chaque $X \in s$, on a choisi un isomorphisme $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$, tels que

$$X_s = \underline{1} \text{ pour } s = 1 = cl(\underline{1}),\ i_{X_s} = id_{X_s},\ i_{\underline{1}\otimes X_s} = g_{X_s},\ i_{X_s \otimes \underline{1}} = d_{X_s} \qquad (15)$$

les ⊗-équivalences $(G,\check{G}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{S}$, $(H,\check{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ déterminées par un épinglage sont appelées des <u>⊗-équivalences canoniques</u>.

Pour formuler les propositions qui suivent, nous introduisons les groupes $H^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ au sens de la cohomologie des groupes [12], i.e les groupes de cohomologie du complexe de cochaînes

$$\xrightarrow{\partial} C^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P})) \xrightarrow{\partial} C^{n+1}(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P})) \longrightarrow \qquad (16)$$

où le groupe $C^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ de n-cochaînes est le groupe des fonctions f de n variables s_i dans $\Pi(\underline{P})$, et à valeurs dans $\Pi_1(\underline{P})$, satisfaisant les conditions de normalisation

$$f(s_1, \dots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \dots, s_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (17)$$

La somme de deux cochaînes f_1 et f_2 est donnée par l'addition des valeurs:

$$(f_1+f_2)(s_1,\dots,s_n) = f_1(s_1,\dots,s_n) + f_2(s_1,\dots,s_n)$$

L'homomorphisme de cobord $\partial : C^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P})) \longrightarrow C^{n+1}(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ est défini par

$$(18) \quad \begin{cases} \partial f(s_1,\dots,s_{n+1}) = (-1)^{n+1}\big[s_1 f(s_2,\dots,s_{n+1}) + \dots \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(s_1,\dots,s_i s_{i+1},\dots,s_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(s_1,\dots,s_n)\big] \end{cases}$$

Nous notons $Z^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ le groupe des n-cocycles et $B^n(\Pi_0(\underline{P}),\Pi_1(\underline{P}))$ le groupe des n-cobords. Enfin la valeur prise par une n-cochaîne f en $(s_1,\dots,s_n)$ est notée soit $f(s_1,\dots,s_n)$, soit $f_{s_1,\dots,s_n}$.

Revenons à la $\otimes$-catégorie réduite $\underline{S}$ de la Gr-catégorie $\underline{P}$. Pour des raisons de commodité, nous notons des fois les flèches (s,u) : $s \longrightarrow s$ de $\underline{S}$ par u simplement si aucune confusion n'est à craindre.

Proposition 8. – Soient $\underline{P}$ une Gr-catégorie, a sa contrainte d'associativité, $\underline{S}$ sa $\otimes$-catégorie réduite, (X_s, i_X) un épinglage dans $\underline{P}$, $(H,\breve{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ la $\otimes$-équivalence canonique correspondante. Alors la contrainte d'associativité ξ pour $\underline{S}$ définie par le diagramme commutatif suivant

$$(19) \quad \begin{tikzcd}
X_r \otimes (X_s \otimes X_t) \arrow[d, "a_{X_r, X_s, X_t}"'] & X_r \otimes X_{st} \arrow[l, "id \otimes i_{X_s \otimes X_t}"'] & X_{rst} \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_{st}}"'] \arrow[d, "H(\xi_{r,s,t}) = \gamma_{X_{rst}}(\xi_{r,s,t})"] \\
(X_r \otimes X_s) \otimes X_t & X_{rs} \otimes X_t \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_s} \otimes id"'] & X_{rst} \arrow[l, "i_{X_{rs} \otimes X_t}"']
\end{tikzcd}$$

est un 3-cocycle normalisé de $\Pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans le $\Pi_0(\underline{P})$-module $\Pi_1(\underline{P})$, i.e $\xi \in Z^3(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$.

Démonstration. – Remarquons tout d'abord que ξ déterminé par (19) n'est ~~pas~~ autre que la contrainte d'associativité $H^*(a)$ induite par $(H,\breve{H})$ (Chap. I, §5, n° 1, Déf. 2) en tenant compte de la formule (14) donnant les valeurs de $\breve{H}$. ξ étant une contrainte d'associativité pour $\underline{S}$, on peut donc le considérer comme un 3-cocycle de $\Pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans le $\Pi_0(\underline{P})$-module $\Pi_1(\underline{P})$ (Chap. I, §2, n° 1, Ex.). Montrons que ξ est normalisé.

D'abord pour $r = 1$, nous considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}\otimes(X_s\otimes X_t) \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})" near start] & \underline{1}\otimes X_{st} \arrow[l, "id\otimes i_{X_s\otimes X_t}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})" near end] & X_{st} \arrow[l, "g_{X_{st}}"'] \arrow[d, "\gamma_{X_{st}}(\xi_{1,s,t})"] \\
(\underline{1}\otimes X_s)\otimes X_t & X_s\otimes X_t \arrow[l, "g_{X_s}\otimes id"] \arrow[ul, "g_{X_s\otimes X_t}"'] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{II})"] & X_{st} \arrow[l, "i_{X_s\otimes X_t}"] \arrow[ul, "g_{X_{st}}"']
\end{tikzcd}$$

dont le circuit extérieur n'est ~~pas~~ autre que le diagramme commutatif (19) avec $r = 1$, et dont la région (I) est commutative en vertu de la compatibilité entre a et $(\underline{1}, g, d)$ (Chap. I, §3, n° 2, Déf. 5), la région (II) en vertu de la fonctorialité de g. On en déduit la commutativité de (III), ce qui donne $\xi_{1,s,t} = 0$.

Pour $s = 1$ et $t = 1$, nous avons respectivement les diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{tikzcd}
X_r\otimes(\underline{1}\otimes X_t) \arrow[d, "a"'] & X_r\otimes X_t \arrow[l, "id\otimes g_{X_t}"'] \arrow[d, equal] & X_{rt} \arrow[l, "i_{X_r\otimes X_t}"'] \arrow[d, "\gamma_{rt}(\xi_{r,1,t})"] \\
(X_r\otimes\underline{1})\otimes X_t & X_r\otimes X_t \arrow[l, "d_{X_r}\otimes id"] & X_{rt} \arrow[l, "i_{X_r\otimes X_t}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_r\otimes(X_s\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"'] & X_r\otimes X_s \arrow[l, "id\otimes d_{X_s}"'] \arrow[dl, "d_{X_r\otimes X_s}"'] & X_{rs} \arrow[l, "i_{X_r\otimes X_s}"'] \arrow[dl, "d_{X_{rs}}"'] \arrow[d, "\gamma_{rs}(\xi_{r,s,1})"] \\
(X_r\otimes X_s)\otimes\underline{1} & X_{rs}\otimes\underline{1} \arrow[l, "i_{X_r\otimes X_s}\otimes id"] & X_{rs} \arrow[l, "d_{X_{rs}}"]
\end{tikzcd}$$

qui nous donnent $\xi_{r,1,t} = \xi_{t,s,1} = 0$.

<u>Proposition 9</u>. – Les hypothèses étant celles de la proposition 8, on considère en plus la $\otimes$-équivalence canonique $(G, \breve{G}) : \underline{P} \to \underline{S}$. Alors la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ munie de la contrainte d'associativité ξ définie dans la proposition 8 et de la contrainte d'unité $(1, id, id)$ est une Gr-catégorie ; et les $\otimes$-foncteurs $(G, \breve{G})$, $(H, \breve{H})$ sont des $\otimes$-foncteurs compatibles avec les contraintes d'associativité a, ξ et les contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d)$,

$(1, id, id)$.

Démonstration.- Comme on a remarqué dans la démonstration de la proposition 8, ξ n'est ~~pas~~ autre que la contrainte d'associativité $H^*(a)$ induite par $(H, \check{H})$. Donc $(H, \check{H})$ est compatible avec a, ξ ; et par conséquent il en est de même de $(G, \check{G})$ (Chap. I, §5, n°1, Prop. 4). Quant à la contrainte d'unité $(1, id, id)$, elle est celle définie par le quadruple de $\otimes$-équivalence $((G, \check{G}), (H, \check{H}), i, id)$ (Chap. I, §5, n°1, Prop. 9), compte tenu des formules (10), (11), (14), (15). Donc $(G, \check{G})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(1, id, id)$ (Chap. I, §5, n°1, Prop. 9) et il en est de même de $(H, \check{H})$ (Chap. I, §5, n°1, Prop. 6). $(\xi, (1, id, id))$ est bien une contrainte AU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ en remarquant que ξ est normalisé et en se rappellant la condition de compatibilité donnée dans (Chap. I, §3, n°2, Ex., For. (26)) au cas où ξ est normalisé. Enfin la $\otimes$-catégorie AU $\underline{S}$ est une Gr-catégorie, soit en remarquant que $\Pi_0(\underline{P})$ et le produit semi-direct $\Pi_0(\underline{P}) . \Pi_1(\underline{P})$ sont des groupes, soit en appliquant la proposition 2 du n°1.

- D'après la proposition 8, la contrainte d'associativité ξ définie par le diagramme commutatif (19) pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ est un 3-cocycle. Regardons maintenant ce que devient ξ pour un changement d'épinglage.

Proposition 10.- Par un changement d'épinglage de $\underline{P}$, le 3-cocycle ξ est changé en un 3-cocycle ξ', différent de ξ par un cobord $\partial\beta$, $\beta \in C^2(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$.

Démonstration.- Soient (X_s, i_X), (X'_s, i'_X) deux épinglages de $\underline{P}$ et soient $(G, \check{G})$, $(H, \check{H})$, ξ, $(G', \check{G}')$, $(H', \check{H}')$, ξ' les $\otimes$-équivalences canoniques et les contraintes d'associativité correspondants. D'après la proposition 9, $(G, \check{G})$ et $(H, \check{H})$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité a et ξ ; $(G', \check{G}')$ et $(H', \check{H}')$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité a et ξ'. En vertu des formules (10), (11) et de la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ en X ; nous avons

$$(G', \check{G}') \circ (H, \check{H}) = (id_{\underline{S}}, \breve{G'H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}$$

D'autre part, en vertu de (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 1) le ⊗-foncteur composé

$$(id_{\underline{S}}, \breve{G'H}) : (\underline{S}, \xi) \longrightarrow (\underline{S}, \xi')$$

est compatible avec les contraintes d'associativité ξ, ξ' ; d'où $\xi' = \xi + \partial\beta$, avec $\beta = \breve{G'H}$. On vérifie aussitôt que β est une 2-cochaîne normalisée à l'aide des formules (14), (15) et de la fonctorialité de g et d.

Pour un épinglage donné (X_s, i_X) de $\underline{P}$, nous avons construit les foncteurs G et H au moyen des isomorphismes γ_X, on peut aussi bien le faire avec les isomorphismes δ_X. On obtient des résultats analogues à savoir :

<u>Proposition 11</u>.— Les foncteurs $D : \underline{P} \longrightarrow \underline{S}$ et $K : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ définis par

(20) $$\begin{cases} D(X) = s \\ D(f) = (s, \delta^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Y f \, i_X)) \end{cases}$$

pour $X, Y \in s$, $f : X \longrightarrow Y$, et

(21) $$\begin{cases} K(s) = X_s \\ K((s,u)) = \delta_{X_s}(u) \end{cases}$$

vérifient

$$KD(X) \xrightarrow[\sim]{i_X} X$$

$$DK(s) \overset{id_s}{=} s .$$

BIBLIOTHEQUE CENTRE INTERUNIVERSITAIRE JUSSIEU - ST-BERNARD

Définition 6.- Munissons $\underline{S}$ de la loi $\otimes$ obtenue par transport de la loi $\otimes$ dans $\underline{P}$ au moyen de (D, K, i, id). En vertu de la formule (7) dans (Chap. I, §5, n°2, Déf. 3) nous avons

$$s\otimes t = D(Ks\otimes Kt) = D(X_s\otimes X_t) = st$$

$$(s,u)\otimes(t,v) = D(K(s,u)\otimes K(t,v)) = D(\delta_{X_s}(u)\otimes \delta_{X_t}(v)) =$$

$$= (st, \delta^{-1}_{X_{st}}\{i^{-1}_{X_s\otimes X_t}(\delta_{X_s}(u)\otimes\delta_{X_t}(v))\, i_{X_s\otimes X_t}))$$

Or, d'après (Chap. I, §3, n°2, For. (29) et (30)) et (n°1, For. (8))

$$\delta_{X_s}(u)\otimes id_{X_t} = id_{X_s}\otimes \gamma_{X_t}(u) = id_{X_s}\otimes \delta_{X_t}\delta^{-1}_{X_t}\gamma_{X_t}(u) =$$

$$= \delta_{X_s\otimes X_t}(\delta^{-1}_{X_t}\gamma_{X_t}(u)) = \delta_{X_s\otimes X_t}(ut)$$

et

$$id_{X_s}\otimes \delta_{X_t}(v) = \delta_{X_s\otimes X_t}(v).$$

Par conséquent

$$\delta_{X_s}(u)\otimes\delta_{X_t}(v) = (\delta_{X_s}(u)\otimes id)(id\otimes\delta_{X_t}(v)) = \delta_{X_s\otimes X_t}(ut)\,\delta_{X_s\otimes X_t}(v) =$$

$$= \delta_{X_s\otimes X_t}(ut+v)$$

Ce qui donne, compte tenu de la fonctorialité de $\delta_X(u)$

$$i^{-1}_{X_s\otimes X_t}(\delta_{X_s\otimes X_t}(ut+v))\, i_{X_s\otimes X_t} = \delta_{X_{st}}(ut+v).$$

Donc

(22) $\qquad (s,u)\otimes(t,v) = (st, ut+v).$

On peut dire ici que le produit tensoriel des flèches dans $\underline{S}$ est le produit du produit semi-direct $\pi_0(\underline{P}).\pi_1(\underline{P})$ où $\pi_1(\underline{P})$ est un $\pi_0(\underline{P})$-module à droite. On peut munir la Gr-catégorie $\underline{S}$ ainsi définie de la contrainte $H^*(a)$ induite par $(H, \check{H})$, mais H^*a n'est pas un 3-cocycle au sens de la cohomologie des groupes habituelle comme on peut vérifier aussitôt avec la formule (22). C'est pour cette raison que désormais les foncteurs G et H sont construits au moyen des isomorphismes γ_X et quand on parle du $\Pi_0(\underline{P})$-module $\Pi_1(\underline{P})$, c'est du $\Pi_0(\underline{P})$-module à gauche dont l'action est définie par la formule (7).

Proposition 12.- Soient $\underline{P}$, $\underline{P}'$ deux Gr-catégories, $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ les contraintes d'unité pour $\underline{P}$, $\underline{P}'$ respectivement. Soit $(F, \breve{F})$ un ⊗-foncteur associatif de $\underline{P}$ dans $\underline{P}'$. Alors le ⊗-foncteur $(F, \breve{F})$ détermine des homomorphismes, appelés *homomorphismes induits par* $(F, \breve{F})$

$$\tilde{F} : \mathrm{cl}\,X \longmapsto \mathrm{cl}\,FX$$

$$\overset{\circ}{F} : u \longmapsto \gamma^{-1}_{F\underline{1}}(Fu)$$

de $\Pi_0(\underline{P})$ dans $\Pi_0(\underline{P}')$ et de $\Pi_1(\underline{P})$ dans $\Pi_1(\underline{P}')$ respectivement, ces homomorphismes respectent les actions de $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$ et de $\Pi_0(\underline{P}')$ sur $\Pi_1(\underline{P}')$, c'est à dire

$$(22) \qquad \overset{\circ}{F}(su) = \tilde{F}(s)\,\overset{\circ}{F}(u)$$

En plus, F est une équivalence si et seulement si $\tilde{F}$ et $\overset{\circ}{F}$ sont des isomorphismes.

Démonstration.- D'abord on a

$$\tilde{F}(\mathrm{cl}\,X \otimes \mathrm{cl}\,Y) = \tilde{F}(\mathrm{cl}(X \otimes Y)) = \mathrm{cl}\,F(X \otimes Y) = \mathrm{cl}(FX \otimes FY) = \mathrm{cl}\,FX \otimes \mathrm{cl}\,FY$$
$$= \tilde{F}(\mathrm{cl}\,X) \otimes \tilde{F}(\mathrm{cl}\,Y)$$

ce qui montre que $\tilde{F}$ est un homomorphisme. On vérifie aussitôt que $\overset{\circ}{F}$ est un homomorphisme en vertu du fait que F est un foncteur et $\gamma_{F\underline{1}}$ un isomorphisme.

Pour démontrer (22), remarquons qu'on a une flèche $\hat{F} : \underline{1} \to F\underline{1}$ venant du fait que $(F, \breve{F})$ est aussi compatible avec les unités (n°1, Prop. 4), ensuite considérons les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\gamma^{-1}_{FX}(F\delta_X u)\otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}'\otimes FX \arrow[d, equal] & \\
 & \underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\gamma^{-1}_{F\underline{1}}(F\gamma^{-1}_X\delta_X u)\otimes id"] \arrow[d, "\hat{F}\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}'\otimes FX \arrow[d, "\hat{F}\otimes id"'] & \\
 \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[r, "F\gamma^{-1}_X\delta_X u\otimes id"] \arrow[d, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[d, "\check{F}"'] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VI})"] \\
 & F(\underline{1}\otimes X) \arrow[r, "F(\gamma^{-1}_X\delta_X u\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(\underline{1}\otimes X) & \\
 & FX \arrow[r, "F(\delta_X u)"] \arrow[u, "Fg_X"] \arrow[uuuu, bend left=60, "g'_{FX}"] & FX \arrow[u, "Fg_X"'] \arrow[uuuu, bend right=60, "g'_{FX}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & FX \arrow[r, "\delta_{FX}(\gamma^{-1}_{F\underline{1}}Fu)"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & FX \arrow[d, equal] & \\
 & FX \arrow[r, "F(\delta_X u)"] \arrow[d, "Fd_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & FX \arrow[d, "Fd_X"'] & \\
 & F(X\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(id\otimes u)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & F(X\otimes\underline{1}) & \\
 \arrow[u, phantom, "(\mathrm{XI})"] & FX\otimes F\underline{1} \arrow[r, "id\otimes Fu"] \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & FX\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"'] & \arrow[u, phantom, "(\mathrm{XII})"] \\
 & FX\otimes\underline{1}' \arrow[r, "id\otimes\delta^{-1}_{F\underline{1}}(Fu)"] \arrow[u, "id\otimes\hat{F}"] \arrow[uuuu, bend left=60, "d'_{FX}"] & FX\otimes\underline{1}' \arrow[u, "id\otimes\hat{F}"'] \arrow[uuuu, bend right=60, "d'_{FX}"'] &
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (II) et (X) résulte de la relation $\gamma_{\underline{1}}(u) = u$ et de la fonctorialité de γ ; celle de (III) et (IX) de la fonctorialité de $\check{F}$; celle de (IV), (VIII) et des deux circuits extérieurs de la définition de γ et δ (Chap. I, §2, n° 3, Prop. 8, Diag. (8)) ; celle de (V), (VI), (XI), (XII) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec les unités $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$

On en déduit la commutativité de (I) et (VII), qui donne, compte tenu du fait que FX est régulier

$$\gamma^{-1}_{F\underline{1}}(F\gamma^{-1}_{X}\delta_{X}u) = \gamma^{-1}_{FX}(F\delta_{X}u)$$

$$F(\delta_{X}u) = \delta_{FX}(\gamma^{-1}_{F\underline{1}}Fu)$$

Par conséquent

$$\gamma^{-1}_{F\underline{1}}(F\gamma^{-1}_{X}\delta_{X}u) = \gamma^{-1}_{FX}\delta_{FX}(\gamma^{-1}_{F\underline{1}}Fu).$$

ou, en posant

$$s = \mathrm{cl}\,X\ ,\ s' = \mathrm{cl}\,FX = \tilde{F}(s)$$

et en tenant compte de la relation $\gamma^{-1}_{X}\delta_{X}(u) = su$, on obtient (22). On vérifie aussitôt que $\tilde{F}$ et $\overset{o}{F}$ sont des isomorphismes si et seulement si le foncteur F est une équivalence.

Nous allons maintenant considérer les Gr-catégories ayant le même type, plus précisément :

<u>Définition 6</u>.- Soit M un groupe, N un M-module abélien à gauche. Un <u>préépinglage de type (M,N)</u> pour une Gr-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P})\ ,\ \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N et de $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$, i.e $\varepsilon_1(su) = \varepsilon_0(s)\,\varepsilon_1(u)$. Une Gr-catégorie préépinglée de type (M,N) est une Gr-catégorie $\underline{P}$ munie d'un préépinglage. Un <u>morphisme</u> de Gr-catégories préépinglées de type (M,N) $(\underline{P},\varepsilon) \longrightarrow (\underline{P}',\varepsilon')$ est un ⊗-foncteur associatif $(F,\breve{F}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ tel que les triangles

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_0(\underline{P}) \arrow[rr, "\tilde{F}"] & & \pi_0(\underline{P}') & & \pi_1(\underline{P}) \arrow[rr, "\overset{o}{F}"] & & \pi_1(\underline{P}') \\
(23) & & M \arrow[ul, "\varepsilon_0"] \arrow[ur, "\varepsilon'_0"'] & & & & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon'_1"'] &
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs, $\tilde{F}$ et $\overset{o}{F}$ étant les homomorphismes induits par F. On en déduit que tout tel morphisme est une ⊗-équivalence (Prop.12), donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type (M, N) est égal à l'ensemble des composantes connexes de la catégorie des Gr-catégories préépinglées de type (M, N).

Proposition 13.– Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type (M, N) et l'ensemble $H^3(M, N)$ des 3-cocycles normalisés de M à valeurs dans N modulo cobord.

Démonstration.– Soient $(\underline{P}, \varepsilon)$ une Gr-catégorie préépinglée de type (M, N) et (X_s, i_X) un épinglage de $\underline{P}$. Soient $\underline{S}$ la ⊗-catégorie réduite de $\underline{P}$, $(G, \check{G}) : \underline{P} \to \underline{S}$, $(H, \check{H}) : \underline{S} \to \underline{P}$ les ⊗-équivalences canoniques déterminées par l'épinglage (X_s, i_X). Soit ξ la contrainte d'associativité induite par $(H, \check{H})$ pour la ⊗-catégorie $\underline{S}$. Enfin soit $\underline{I}$ la ⊗-catégorie construite à partir du groupe M et du M-module N (Chap. I, §1, n° 2, Ex 5)). Le couple d'isomorphismes $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ donne les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\underline{I} &\longrightarrow \mathrm{Ob}\,\underline{S} \\ s &\longmapsto \varepsilon_0 s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Fl}\,\underline{I} &\longrightarrow \mathrm{Fl}\,\underline{S} \\ (s, u) &\longmapsto (\varepsilon_0 s, \varepsilon_1 u) \end{aligned}$$

qui détermine un foncteur noté aussi ε de la catégorie $\underline{I}$ dans la catégorie $\underline{S}$. Ce foncteur est un isomorphisme puisque les applications $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ sont des bijections. En outre le couple $(\varepsilon, \check{\varepsilon} = id)$ constitue un ⊗-foncteur de la ⊗-catégorie $\underline{I}$ dans la ⊗-catégorie $\underline{S}$ en vertu du fait que les isomorphismes $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ sont compatibles avec les actions de M sur N et de $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$. Le ⊗-foncteur (ε, id) induit les contraintes ~~$\alpha = \varepsilon_1^{-1}(\xi)$~~ d'associativité $\alpha = \varepsilon_1^{-1}(\xi)$ et d'unité (1, id, id) sur $\underline{I}$, qui sont compatibles (Chap. I, §3, n° 2, Ex.). $\underline{I}$ devient une Gr-catégorie et (ε, id) un ⊗-foncteur associatif dont l'inverse est le ⊗-foncteur associatif (ε^{-1}, id) où ε^{-1} est déterminé par les isomorphismes $\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_1^{-1}$.

Donc à chaque Gr-catégorie préépinglée $(\underline{P}, \varepsilon)$ de type (M, N) nous avons fait correspondre un 3-cocycle $\alpha \in Z^3(M, N)$. Un changement d'épinglage de $\underline{P}$ fait varier α d'un cobord, i.e α est changé en $\alpha + \partial\beta$, $\beta \in C^2(M, N)$.

Soit $(\underline{P}', \varepsilon')$ une autre Gr-catégorie préépinglée de type (M, N) et soit α' le 3-cocycle correspondant. Démontrons que α et α' sont cohomologues si et seulement s'il existe un morphisme de Gr-catégories préépinglées de type (M, N), $(F, \breve{F}) : (\underline{P}, \varepsilon) \longrightarrow (\underline{P}', \varepsilon')$. Supposons qu'il existe $(F, \breve{F}) : (\underline{P}, \varepsilon) \longrightarrow (\underline{P}', \varepsilon')$. Soit $\underline{S}'$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}'$. Considérons un épinglage de $\underline{P}'$ qui détermine les $\otimes$-équivalences canoniques $(G', \breve{G}') : \underline{P}' \longrightarrow \underline{S}'$, $(H', \breve{H}') : \underline{S}' \longrightarrow \underline{P}'$ et les contraintes d'associativité ξ', $\alpha' = \varepsilon_1'^{-1}(\xi')$ pour $\underline{S}'$ et $\underline{I}'$ respectivement. Alors le couple d'isomorphismes $(\tilde{F}, \breve{F})$ induits par $(F, \breve{F})$ (Prop. 12) détermine un foncteur $\mathfrak{F} : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ qui est manifestement un isomorphisme. Considérons le $\otimes$-foncteur composé

$$(G', \breve{G}') \circ (F, \breve{F}) \circ (H, \breve{H}) = (G'FH, \overset{\smile}{G'FH}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$$

En vertu de la proposition 1 dans (Chap. I, §4, n°2), $(G'FH, \overset{\smile}{C'FH})$ est un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité ξ, ξ' de $\underline{S}$ et $\underline{S}'$ respectivement. En outre, on vérifie aussitôt que le foncteur G'FH n'est ~~pas~~ autre que le foncteur $\mathfrak{F}$. Posons $\breve{\mathfrak{F}} = \overset{\smile}{G'FH}$. D'autre part

$$(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) = (\varepsilon'^{-1}, id) \circ (\mathfrak{F}, \breve{\mathfrak{F}}) \circ (\varepsilon, id) : (\underline{I}, \alpha) \longrightarrow (\underline{I}, \alpha')$$

est aussi un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité α, α'. Or d'après la définition 6, $\mathcal{G} = id_{\underline{I}}$, donc on peut écrire

$$\alpha' = \alpha + \partial\breve{\mathcal{G}}$$

$\breve{\mathcal{G}}$ étant considérée comme une 2-cochaine de M à valeurs dans N. Pour avoir $\breve{\mathcal{G}}$ normalisé, il suffit de prendre un épinglage $(X'_{s'}, i'_{X'})$ de $\underline{P}'$ tel que $i'_{F\underline{1}} = \hat{F} : \underline{1}' \longrightarrow F\underline{1}$, $\hat{F}$ étant défini par le diagramme commutatif (5) dans (Chap. I, §4, n°2, Prop. 18). Inversement supposons

α et α' cohomologues. Ceci veut dire (Chap. I, §4, n° 2, Rem. 1)) qu'il existe un $\otimes$-foncteur

$$(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) : (\underline{I}, \alpha) \longrightarrow (\underline{I}, \alpha') \quad \text{avec} \quad \mathcal{G} = id_{\underline{I}}$$

compatible avec les contraintes d'associativité α, α'. Posons

$$(24) \qquad (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) : (\varepsilon', id) \circ (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \circ (\varepsilon^{-1}, id) : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$$

$(\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}})$ est bien un $\otimes$-foncteur associatif et de plus $\mathcal{F}$ est un isomorphisme. Nous obtenons une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ en posant

$$(F, \breve{F}) = (H', \breve{H}') \circ (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) \circ (G, \breve{G})$$

Montrons que $(F, \breve{F})$ est un morphisme de Gr-catégories précinglées de type (M, N). D'après la définition ci-dessus de $(F, \breve{F})$, on peut écrire

$$(G', \breve{G}') \circ (F, \breve{F}) \circ (H, \breve{H}) = (G', \breve{G}') \circ (H', \breve{H}') \circ (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) \circ (G, \breve{G}) \circ (H, \breve{H})$$

ce qui donne

$$G'FH = G'H'\mathcal{F}GH$$

ou en remarquant que $GH = id_{\underline{S}}$; $G'H' = id_{\underline{S}'}$,

$$G'FH = \mathcal{F}$$

ce qui permet de conclure que le couple d'isomorphismes $(\tilde{F}, \mathring{F})$

$$\tilde{F} : \Pi_0(\underline{P}) \longrightarrow \Pi_0(\underline{P}') \quad , \quad \mathring{F} : \Pi_1(\underline{P}) \longrightarrow \Pi_1(\underline{P}')$$

induits par F constitue le foncteur $\mathcal{F}$. Enfin on a bien les triangles commutatifs (23) en vertu de la relation (24).

Nous avons donc démontré qu'il y a une injection entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories précinglées de type (M, N) et l'ensemble $H^3(M, N)$. Montrons que cette injection est en plus surjective. Soit $\alpha \in Z^3(M, N)$. La $\otimes$-catégorie $\underline{I}$ munie de la contrainte d'associativité α, de la contrainte d'unité $(1, id, id)$ et du prépinglage $\varepsilon = (id_M, id_N)$ est en effet une Gr-catégorie prépinglée de type (M,N) dont le 3-cocycle correspondant est bien α, ce qui achève la démonstration. L'élément de $H^3(M,N)$ qui correspond à la catégorie $(\underline{P}, \varepsilon)$ est noté $\xi_{(\underline{P},\varepsilon)}$.

<u>Exemple</u>. — Soit $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie définie dans (Chap. I, §1, n°2, Ex. 3)). $\underline{P}$ est une Gr-catégorie et on a $\pi_0(\underline{P}) = \pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(\underline{P}) = \pi_2(X, x_0)$. L'action de $\pi_0(\underline{P})$ dans $\pi_1(\underline{P})$ est l'action usuelle de $\pi_1(X)$ dans $\pi_2(X)$, et l'invariant $\xi_{(\underline{P}, id)} \in H^3(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ n'est autre que l'invariant de Postnikov, où id est le couple d'isomorphismes $(id_{\pi_0(\underline{P})}, id_{\pi_1(\underline{P})})$.

§2. Pic-catégories

1. Définition des Pic-catégories

<u>Définition 1</u>. — Une <u>Pic-catégorie</u> est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité. Une Pic-catégorie est dite <u>stricte</u> si sa contrainte de commutativité est stricte (Chap. I, §2, n°2, Déf. 8).

<u>Exemples</u>. — 1) Soient A un anneau commutatif unitaire, $\underline{P}$ une catégorie dont les objets sont les A-modules projectifs de rang un et dont les flèches entre ces objets sont les isomorphismes de A-modules. La catégorie $\underline{P}$ munie du produit tensoriel de A-modules est une $\otimes$-catégorie. On vérifie aussitôt que $\underline{P}$ est une Pic-catégorie, les contraintes d'associativité, commutativité, unité étant les contraintes usuelles.

2) Reprenons l'exemple 4) dans (Chap. I, §1, n°2). Soient $\underline{C}$ une catégorie additive, $\underline{E}$ une catégorie cofibrée sur $\underline{C}$. Pour tout objet A de $\underline{C}$, la fibre de $\underline{E}$ en A est notée $\underline{E}(A)$. L'homomorphisme somme

$$A \times A \longrightarrow A$$

dans $\underline{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\underline{E}(A) \times \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(A)$$

qui fait de $\underline{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie. Le foncteur $\underline{E}(0) \longrightarrow \underline{E}(A)$, déduit de l'unique morphisme $0 \to A$, définit dans $\underline{E}(A)$ un objet θ_A, unique à isomorphisme unique près, comme image d'un élément arbitraire de la catégorie $\underline{E}(0)$ équivalente à une catégorie ponctuelle. Les propriétés d'associativité et de commutativité connues pour l'homomorphisme somme $A \times A \to A$, et celles de l'objet nul vis-à-vis de cet homomorphisme, permettent alors de définir des isomorphismes canoniques de foncteurs

$$\begin{cases} X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z \\ X \otimes Y \simeq Y \otimes X \\ X \otimes \theta_A \simeq \theta_A \otimes X \simeq X \end{cases}$$

pour $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{E}(A)$. On peut vérifier que ces isomorphismes fonctoriels constituent une contrainte ACU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{E}(A)$ et que la catégorie $\underline{E}(A)$ est un groupoïde. Enfin le foncteur

$$X \longmapsto X^{-1} \;:\; \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(A)$$

déduit par cochangement de base de l'homomorphisme

$$-\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$$

donne lieu à l'isomorphisme canonique

$$X \otimes X^{-1} \simeq \theta_A$$

qui montre que tous les objets de $\underline{E}(A)$ sont inversibles. Les fibres $\underline{E}(A)$ sont donc des Pic-catégories. Pour une flèche $u : A \to B$ de $\underline{C}$, le foncteur $u_* : \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(B)$ avec l'isomorphisme canonique de bifoncteurs :

$$u_*(X) \otimes u_*(Y) \simeq u_*(X \otimes Y)$$

constitue un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité.

<u>Proposition 1</u>.– Soit $\underline{P}$ une Pic. catégorie, et soient $\Pi_0(\underline{P})$, $\Pi_1(\underline{P})$ le groupe et le $\Pi_0(\underline{P})$-module respectivement attachés à $\underline{P}$, considéré comme une Gr. catégorie (§1, n°2, Déf. 2 et Prop. 5). Alors le groupe $\Pi_0(\underline{P})$ est commutatif et agit trivialement sur $\Pi_1(\underline{P})$.

<u>Démonstration</u>.– Nous avons, en vertu de la contrainte de commutativité

$$\mathrm{cl}\,X \otimes \mathrm{cl}\,Y = \mathrm{cl}(X \otimes Y) = \mathrm{cl}(Y \otimes X) = \mathrm{cl}\,Y \otimes \mathrm{cl}\,X$$

pour tous les objets X, Y de $\underline{P}$, d'où la commutativité du groupe $\Pi_0(\underline{P})$. Enfin l'égalité $\gamma_X = \delta_X$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (Chap. I, §3, n°3, Rel. (33)) montre que $\Pi_0(\underline{P})$ agit trivialement sur $\Pi_1(\underline{P})$ (§1, n°2, Prop. 5).

En vertu de la commutativité du groupe $\Pi_0(\underline{P})$, la loi de composition de $\Pi_0(\underline{P})$ est donc notée additivement avec $0 = \mathrm{cl}\,\underline{1}$. Soit $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$ considéré comme une Gr. catégorie (§1, n°3, Déf. 4). La loi $\otimes$ définie dans $\underline{S}$ (§1, n°3, Déf. 4) s'exprime ici par

$$(1) \qquad \begin{cases} s \otimes t = s + t \\ (s, u) \otimes (t, v) = (s + t, u + v) \end{cases}$$

<u>Proposition 2</u>.– Soient $\underline{P}$ une Pic. catégorie, $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ sa contrainte ACU, $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$, (X_s, i_X) un épinglage de $\underline{P}$, $(G, \breve{G}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{S}$, $(H, \breve{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ les $\otimes$-équivalences canoniques correspondantes, $\xi = H^* a$, $\eta = H^* c$ les contraintes d'associativité, de commutativité respectivement pour $\underline{S}$, induites par $(H, \breve{H})$ (Chap. I, §5, n°1, Déf. 2).

(i) ξ est un 3-cocycle normalisé de $\Pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans $\Pi_1(\underline{P})$ et η un élément du groupe $\mathrm{Ant}^2(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ des fonctions antisymétriques normalisées $\Pi_0(\underline{P}) \times \Pi_0(\underline{P}) \longrightarrow \Pi_1(\underline{P})$, ξ et η vérifiant la relation

$$(2) \qquad \xi(r,s,t) - \xi(r,t,s) + \xi(t,r,s) + \eta(r+s,t) - \eta(r,t) - \eta(s,t) = 0$$

(ii) $\underline{S}$ munie des contraintes ξ, η et de la contrainte d'unité $(0, id, id)$ est une Pic-catégorie, et les $\otimes$-foncteurs $(G, \breve{G})$, $(H, \breve{H})$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité, de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{S}$

(iii) Si on change l'épinglage (X_s, i_X), ξ est changé en $\xi + \partial\mu$, où $\mu \in C^2(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$, et η est changé en $\eta + \mathrm{ant}(\mu)$ où

$$\mathrm{ant}(\mu)(s,t) = \mu(s,t) - \mu(t,s)$$

<u>Démonstration</u>.- (i) L'assertion concernant ξ résulte de (§1, n° 3, Prop. 8). Quant à η, il est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_s \otimes X_t \arrow[r, "c_{X_s, X_t}"] & X_t \otimes X_s \\ X_{s+t} \arrow[u, "i_{X_s \otimes X_t}"] \arrow[r, "H(\eta_{s,t}) = \gamma_{s+t}(\eta_{s,t})"'] & X_{s+t} \arrow[u, "i_{X_s \otimes X_t}"'] \end{tikzcd}$$

En vertu de la définition d'un épinglage (§1, n° 3, Déf. 5) et de la compatibilité des contraintes de commutativité c et d'unité de $\underline{P}$, la fonction $\eta : \Pi_0(\underline{P}) \times \Pi_0(\underline{P}) \longrightarrow \Pi_1(\underline{P})$ est bien normalisée. L'autocompatibilité de la contrainte de commutativité η s'exprime par la formule

$$\eta(s,t) + \eta(t,s) = 0$$

qui donne $\eta \in \mathrm{Ant}^2(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$. Enfin l'axiome de l'hexagone (Chap. I, §3, n° 1, Déf. 1) qui exprime la compatibilité des contraintes d'associativité et de commutativité donne la relation (2).

(ii) La catégorie $\underline{S}$ munie des contraintes d'associativité ξ et d'unité $(0, id, id)$ est déjà une Gr-catégorie (§1, n° 3, Prop. 9). La contrainte de commutativité η pour $\underline{S}$ est bien compatible avec ξ en vertu de (2), ce qui montre que $\underline{S}$ est ~~donc~~ Pic-catégorie. Enfin les $\otimes$-foncteurs

$(G, \breve{G})$, $(H, \breve{H})$, déjà compatibles avec les contraintes d'associativité a, ξ et d'unité $(1, g, d)$, $(0, id, id)$ (§1, n°3, Prop. 9), le sont aussi avec les contraintes de commutativité c, η en vertu de $\eta = H^{*}c$ et de (Chap. I, §5, n°1, Prop. 5).

(iii) Si on change l'épinglage (X_S, i_X) en l'épinglage (X'_S, i'_X), $(G, \breve{G})$, $(H, \breve{H})$, ξ, η sont alors changés en $(G', \breve{G}')$, $(H', \breve{H}')$, ξ', η'. Par le même raisonnement que dans la proposition 10 du (§1, n°3), on obtient le $\otimes$-foncteur

$$(G' \circ H, \breve{G' \circ H}) : (\underline{S}, \xi, \eta) \longrightarrow (\underline{S}, \xi', \eta') \quad \text{avec} \quad G' \circ H = id_{\underline{S}}$$

compatible avec les contraintes d'associativité ξ, ξ' et les contraintes de commutativité η, η'. D'où en posant $\mu = \breve{G' \circ H}$, on obtient $\xi' = \xi + \partial\mu$ et $\eta' = \eta + \mathrm{ant}(\mu)$ (Chap. I, §4, n°2, Déf. 3 et 4). Le fait que μ est normalisé vient de (§1, n°3, For. (14) et (15)) et de la fonctorialité de g, d.

Considérons maintenant une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ et la catégorie $\underline{P}$ dont les objets sont les objets inversibles de $\underline{C}$ et dont $\mathrm{Hom}_{\underline{P}}((X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{isom}}(X, Y)$ pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$, i.e. est constitué des isomorphismes de X dans Y de la catégorie $\underline{C}$. Comme $X \otimes Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (Chap. I, §3, n°5, Prop. 34) et $f \otimes g \in \mathrm{Fl}\,\underline{P}$ pour $f, g \in \mathrm{Fl}\,\underline{P}$, la catégorie $\underline{P}$ munie de la loi induite $\otimes$ et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité de $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU. On vérifie aussitôt que c'est une Pic.-catégorie. Le choix d'un épinglage de $\underline{P}$ nous permet de munir la $\otimes$-catégorie réduite $\underline{S}$ de $\underline{P}$ d'une structure de Pic.-catégorie au moyen des $\otimes$-équivalences

$$(G, \breve{G}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{S} \;, \; (H, \breve{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$$

En vertu de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
GX \otimes GX \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\breve{G}"'] & GX \otimes GX \arrow[d, "\breve{G}"] \\
G(X \otimes X) \arrow[r, "G(c)"'] & G(X \otimes X)
\end{tikzcd}$$

où c est la contrainte de commutativité pour $\underline{P}$ et η la contrainte de commutativité pour $\underline{S}$, induite par $(H, \breve{H})$; la Pic.-catégorie $\underline{P}$ est stricte si et seulement si la Pic.-catégorie $\underline{S}$ est stricte.

Cela étant, proposons-nous de démontrer une proposition pour la ⊗-catégorie ACU $\underline{C}$ que nous avons laissé sans démonstration dans (Chap. I, §3, n°5) au moyen de la Pic.-catégorie $\underline{S}$.

<u>Proposition 3</u>.– Soit $\underline{C}$ une ⊗-catégorie ACU stricte avec comme contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$. Soient $p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$, $t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ des isomorphismes. Alors la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) \arrow[rr, "a_{X^{-1}, X, X^{-1}}"] \arrow[d, "id \otimes p_X"'] & & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X \otimes id"] \\
X^{-1} \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X^{-1} \\
& X^{-1} \arrow[ul, "d_{X^{-1}}"] \arrow[ur, "g_{X^{-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "c_{X, X^{-1}}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X^{-1} \otimes X \arrow[dl, "t_X"] \\
& \underline{1} &
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– Posons $s = \mathrm{cl}\, X$, par conséquent $-s = \mathrm{cl}\, X^{-1}$. Prenons dans la Pic.-catégorie $\underline{P}$, construite à partir de $\underline{C}$ comme ci-dessus, un épinglage tel que

$$X_S = X\ ,\ X_{-S} = X^{-1},\ i_{X\otimes X^{-1}} = r_X^{-1},\ i_{X^{-1}\otimes X} = t_X^{-1}$$

Dans ces conditions, en notant toujours par $\xi = H^*a$, $\eta = H^*c$ les contraintes d'associativité et de commutativité induites par $(H, \check{H})$ pour $\underline{S}$ on a $\xi(-S, S, -S)$ et $\eta(S, -S)$ définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
X^{-1}\otimes(X\otimes X^{-1}) \arrow[r, "a_{X^{-1},X,X^{-1}}"] \arrow[d, "id\otimes r_X"'] & (X^{-1}\otimes X)\otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X\otimes id"] \\
X^{-1}\otimes\underline{1} & \underline{1}\otimes X^{-1} \\
X^{-1} \arrow[u, "d_{X^{-1}}"] \arrow[r, "H(\xi(-S,S,-S))"] & X^{-1} \arrow[u, "g_{X^{-1}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\otimes X^{-1} \arrow[r, "c_{X,X^{-1}}"] \arrow[d, "r_X"'] & X^{-1}\otimes X \arrow[d, "t_X"] \\
\underline{1} \arrow[r, "H(\eta(S,-S))"'] & \underline{1}
\end{tikzcd}$$

(voir §1, n°3, Prop. 8 et §2, n°1, Prop. 2). Tout revient donc à démontrer que $\xi(-S, S, -S) = 0$ si et seulement si $\eta(S, -S) = 0$. Ecrivons la relation (2) pour $z = t = -S$:

$$\xi(-S, S, -S) - \xi(-S, -S, S) + \xi(-S, -S, S) + \eta(0, -S) - \eta(-S, -S) - \eta(S, -S) = 0,$$

en en tenant compte de $\eta(0, -S) = 0$ (η est normalisé (Prop. 2)) et de $\eta(-S, -S) = 0$ ($\underline{C}$ est stricte, par conséquent il en est de même de $\underline{P}$ donc de $\underline{S}$), on obtient $\xi(-S, S, -S) = \eta(S, -S)$, d'où l'assertion.

2. Structure des Pic-catégories.

Définition 2 - Soient M, N des groupes abéliens. Un préépinglage de type (M, N) pour une Pic-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}),\quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}).$$

Une Pic-catégorie préépinglée de type (M, N) est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage. Un <u>morphisme</u> de Pic-catégorie préépinglée de type (M,N) $(\underline{P}, \varepsilon) \longrightarrow (\underline{P}', \varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur $(F, \breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité, et tel que les triangles (23) soient commutatifs. Un tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M,N) est égal à l'ensemble des composantes connexes de la catégorie des Pic-catégories préépinglées de type (M,N).

Pour formuler les propositions qui suivent, introduisons deux complexes de groupes abéliens :

$$L_\cdot(M) : L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \xrightarrow{\tau} M$$

$$'L_\cdot(M) : {}'L_3(M) \xrightarrow{'d_3} {}'L_2(M) \xrightarrow{'d_2} {}'L_1(M) \xrightarrow{'d_1} {}'L_0(M) \xrightarrow{'\tau} M$$

où M est un groupe abélien et

$$L_0(M) = {}'L_0(M) = \mathbb{Z}[M]$$

$$L_1(M) = {}'L_1(M) = \mathbb{Z}[M \times M]$$

$$L_2(M) = {}'L_2(M) = \mathbb{Z}[M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M]$$

$$L_3(M) = {}'L_3(M) + \mathbb{Z}[M]$$

$$'L_3(M) = \mathbb{Z}[M \times M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M]$$

$$d_1[x,y] = {}'d_1[x,y] = [y] - [x+y] + [x]$$

$$d_2[x,y] = {}'d_2[x,y] = [x,y] - [y,x]$$

$$d_2[x,y,z] = {}'d_2[x,y,z] = [y,z] - [x+y,z] + [x,y+z] - [x,y]$$

$$d_3[x,y,z,t] = {}'d_3[x,y,z,t] = [y,z,t] - [x+y,z,t] + [x,y+z,t] - [x,y,z+t] + [x,y,z]$$

$$d_3[x,y,z] = {}'d_3[x,y,z] = [x,y,z] - [x,z,y] + [z,x,y] - [y,z] + [x+y,z] - [x,z]$$

$d_3[x,y] = {}'d_3[x,y] = [x,y] + [y,x]$

$d_3[x] = [x,x]$

$\tau[x] = {}'\tau[x] = x$,

les $\mathbb{Z}[M^i]$ étant les groupes abéliens libres engendrés par M^i ($i = 1,2,3,4$). Puisque L_i (resp. $'L_i$) est libre, un homomorphisme du groupe L_i (resp. $'L_i$) dans un groupe abélien N est uniquement déterminé par ses valeurs sur les générateurs. D'où les complexes $\mathrm{Hom}(L.(M), N)$, $\mathrm{Hom}('L.(M), N)$ sont identifiés aux complexes suivants

$$\mathrm{Hom}(L.(M),N) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{\delta_2}$$
$$\xrightarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{\delta_3}$$
$$\xrightarrow{\delta_3} \mathrm{Hom}(M\times M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M,N)$$

$$\mathrm{Hom}('L.(M),N) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{'\delta_1} \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{'\delta_2}$$
$$\xrightarrow{'\delta_2} \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{'\delta_3}$$
$$\xrightarrow{'\delta_3} \mathrm{Hom}(M\times M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N)$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$ est le groupe des homomorphismes du groupe M dans le groupe N, $\mathrm{Hom}(M^i, N)$ ($i = 1,2,3,4$) le groupe des applications de M^i dans N, et

$\delta_1 f = {}'\delta_1 f$, $\delta_1 f(x,y) = f(y) - f(x+y) + f(x)$;

$\delta_2 g = {}'\delta_2 g = (h_1, h_2)$ avec $h_1(x,y,z) = g(y,z) - g(x+y,z) + g(x,y+z) -$
$- g(x,y)$, et $h_2(x,y) = g(x,y) - g(y,x)$;

$\delta_3(k_1 k_2) = (l_1, l_2, l_3, l_4)$, $'\delta_3(k_1,k_2) = (l_1, l_2, l_3)$ avec

$l_1(x,y,z,t) = k_1(y,z,t) - k_1(x+y,z,t) + k_1(x,y+z,t) - k_1(x,y,z+t) +$
$+ k_1(x,y,z)$, $l_2(x,y,z) = k_1(x,y,z) - k_1(x,z,y) + k_1(z,x,y) - k_2(y,z) +$

$+ k_2(x+y,z) - k_2(x,z)$, $\ell_3(x,y) = k_2(x,y) + k_2(y,x)$, et $\ell_4(x) = k_2(x,x)$.

Proposition 4.- Le complexe L.(M) est une "résolution tronquée" de M, en d'autres termes la suite $L_3 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$ est exacte.

Démonstration.- Une preuve de l'exactitude en degré 0 et 1 se trouve dans [9]. D'autre part, les L_i étant libres, l'exactitude de L.(M) est équivalente à l'exactitude des complexes Hom (L.(M), N) pour N un groupe abélien *arbitraire*. Prouvons l'exactitude en degré 2 pour le complexe Hom (L.(M), N). Soit $(k_1, k_2) \in \operatorname{Ker} \delta_3$, i.e

$$k_1(y,z,t) - k_1(x+y,z,t) + k_1(x,y+z,t) - k_1(x,y,z+t) + k_1(x,y,z) = 0$$

$$k_1(x,y,z) - k_1(x,z,y) + k_1(z,x,y) - k_2(y,z) + k_2(x+y,z) - k_2(x,z) = 0$$

$$k_2(x,y) + k_2(y,x) = 0$$

$$k_2(x,x) = 0,$$

Puisque $k_2(x,y) + k_2(y,x) = 0$ et $k_2(x,x) = 0$; il existe $g \in$ Hom ((M×M, N) tel que $k_2(x,y) = g(x,y) - g(y,x)$, i.e $k_2 = \operatorname{ant} g$. Par conséquent (k_1, k_2) est cohomologue à $(k_1 - \partial g, k_2 - \operatorname{ant} g) = (k_1 - \partial g, 0)$ où $\partial g(x,y,z) = g(y,z) - g(x+y,z) + g(x,y+z) - g(x,y)$ est un cobord au sens de la cohomologie des groupes. Posons $f = k_1 - \partial g$. Puisque $(f, 0) \in \operatorname{Ker} \delta_3$, nous avons, en vertu de la définition de l'homomorphisme de cobord δ_3, $\partial f = 0$ (∂ étant l'homomorphisme de cobord défini par la relation (18) dans (§1, n°3)) et $f(x,y,z) - f(x,z,y) + f(z,x,y) = 0$. Or Mac Lane a démontré que

$$H^3_S(M,N) = Z^3_S(M,N) / \partial C^2_S(M,N) = 0$$

où $Z^3_S(M,N)$ (resp. $C^2_S(M,N)$) est le groupe des 3-cocycles (resp. 2-cochaînes) (au sens de la cohomologie des groupes) *symétriques*, i.e qui vérifient la relation

$$f(x,y,z) - f(x,z,y) + f(z,x,y) = 0 \quad (\text{resp. } g(x,y) = g(y,x)).$$

On en déduit donc pour $(f,0) \in \operatorname{Ker} \delta_3$

$$(f,0) = (\partial u, \operatorname{ant} u) \quad , \quad u \in C^2_S(M,N)$$

et par suite $(f,0) \in \operatorname{Im} \delta_2$; ce qui implique $(k_1, k_2) \in \operatorname{Im} \delta_3$. D'où l'exactitude de $\operatorname{Hom}(L.(M), N)$. On vérifie aussitôt que le complexe reste encore exact quand on impose la condition de normalisation aux cochaînes, i.e.

$f(0) = 0 \quad , \quad f \in \operatorname{Hom}(M,N)$

$g(0, x_2) = g(x_1, 0) = 0 \quad , \quad g \in \operatorname{Hom}(M \times M, N)$

$h(0, x_2, x_3) = h(x_1, 0, x_3) = h(x_1, x_2, 0) = 0 \; , \; h \in \operatorname{Hom}(M \times M \times M, N)$

$k(0, x_2, x_3, x_4) = k(x_1, 0, x_3, x_4) = k(x_1, x_2, 0, x_4) =$

$= k(x_1, x_2, x_3, 0) = 0 \; , \; k \in \operatorname{Hom}(M \times M \times M \times M, N)$.

Dans ce qui suit on suppose que les cochaînes dans les complexes $\operatorname{Hom}(L.(M), N)$, $\operatorname{Hom}('L.(M), N)$ sont normalisées. En nous servant de la proposition 2 (n°1), nous démontrons comme dans (§1, n°3, Prop. 13) la proposition suivante

Proposition 5.- Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de ~~catégories~~ Pic-catégories préépinglées de type (M,N) et l'ensemble $H^2(\operatorname{Hom}('L.(M), N))$.

Démonstration.- Soient $(\underline{P}, E)$ une Pic-catégorie préépinglée de type (M,N) et (X_S, i_X) un épinglage de $\underline{P}$. Soient $\underline{S}$ la ⊗-catégorie réduite de $\underline{P}$, $(G, \breve{G}) : \underline{P} \to \underline{S}$, $(H, \breve{H}) : \underline{S} \to \underline{P}$ les ⊗-équivalences canoniques déterminées par l'épinglage (X_S, i_X). Soit (ξ, η) la contrainte AC induite par $(H, \breve{H})$ pour la ⊗-catégorie $\underline{S}$. Enfin soit $\underline{I}$ la ⊗-catégorie construite à partir du groupe M et du M-module N (trivial). Le couple (E, id) est un ⊗-foncteur de la ⊗-catégorie $\underline{I}$ dans la ⊗-catégorie $\underline{S}$, et (E^{-1}, id) son inverse. (E, id) induit les contraintes d'associativité $\alpha = E_1^{-1}(\xi)$, d'unité $(0, id, id)$, de commutativité $\beta = E_1^{-1}(\eta)$

$\underline{T}$ devient une Pic-catégorie et $(\mathcal{E}, id)$ un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité de $\underline{S}$ et $\underline{T}$.

Donc à chaque Pic-catégorie $\underline{P}$ préépinglé de type (M, N) nous avons fait correspondre un élément $(\alpha, \beta) \in \text{Ker } '\delta_3$ du complexe $\text{Hom}('L.(M), N)$. Un changement d'épinglage de $\underline{P}$ fait varier (α, β) en $(\alpha + \partial u, \beta + \text{ant } u)$, $(\partial u, \text{ant } u) \in \text{Im } '\delta_2$ (n° 1, Prop. 2). D'où l'application $(\underline{P}, \mathcal{E}) \mapsto$ $\longrightarrow \theta_{(\underline{P}, \mathcal{E})} = \overline{(\alpha, \beta)} \in H^2(\text{Hom}('L.(M), N))$. De la même manière que dans (§1, n° 3, Prop. 13), nous démontrons que cette application induit une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M, N) et l'ensemble $H^2(\text{Hom}('L.(M), N))$.

<u>Proposition 6</u>.– La classification des Pic-catégories préépinglés de type (M, N) qui sont <u>stricte</u> est triviale.

<u>Démonstration</u>.– Soit $(\underline{P}, \mathcal{E})$ une Pic-catégorie stricte, préépinglé de type (M, N) et soit $(\alpha, \beta) \in \text{Ker } '\delta_3$ l'élément correspondant. Puisque $\underline{P}$ est stricte, on a $\beta(x, x) = 0$ pour tout $x \in M$. Par conséquent $(\alpha, \beta) \in \text{Ker } \delta_3$ du complexe $\text{Hom}(L.(M), N)$. D'où il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence des Pic-catégories préépinglées de type (M, N) qui sont strictes et l'ensemble $H^2(\text{Hom}(L.(M), N))$. Or $H^2(\text{Hom}(L.(M), N)) = 0$ d'après la proposition 4.

<u>Corollaire 1</u>.– Soient $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ deux Pic-catégories strictes. Alors il existe une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ si et seulement s'il existe des isomorphismes $\lambda_0 : \pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}')$, $\lambda_1 : \pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}')$.

<u>Démonstration</u>.– Supposons qu'il existe une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F})$: $\underline{P} \rightarrow \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$. En vertu de (§1, n° 3, Prop. 12), il existe des isomor-

phismes $\lambda_0 : \Pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}')$, $\lambda_1 : \Pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P}')$.

Inversement supposons qu'il existe des isomorphismes $\lambda_0 : \Pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}')$, $\lambda_1 : \Pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P}')$. Dans ce cas on peut considérer le couple $id = (id_{\Pi_0(\underline{P})}, id_{\Pi_1(\underline{P})})$ comme un préépinglage de type $(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ pour la Pic-catégorie $\underline{P}$, et le couple $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ comme un préépinglage de même type que $\underline{P}$, pour la Pic-catégorie $\underline{P}'$. Comme la catégorie des Pic-catégories préépinglés de même type et strictes, est connexe d'après la proposition 6, on en déduit l'existence d'une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F})$: $\underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$.

<u>Corollaire 2</u>.- Si dans N la relation $2y = 0$ entraîne $y = 0$, alors la classification des Pic-catégories préépinglés de type (M, N) est triviale.

<u>Démonstration</u>.- Dans ce cas toutes les Pic-catégories de type (M, N) sont strictes, d'où le corollaire en appliquant la proposition 6.

<u>Définition 3</u>.- Soient A, B des groupes abéliens, f une application du groupe produit A^n dans B. L'<u>antisymétrisé</u> de f est une application, notée af, de A^n dans B, définie par

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} s_\sigma f(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \dots, x_{\sigma n})$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique, s_σ la signature de la permutation σ.

<u>Définition 4</u>.- Chaque élément $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ker}\ '\delta_3$ du complexe $\mathrm{Hom}('L(M), N)$ est appelé une <u>structure de Pic-catégorie préépinglé de type (M, N)</u>. Deux structures de Pic-catégorie préépinglé de type (M, N) (α, β), (α', β') sont dites <u>cohomologues</u> si et seulement si $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$. Une structure de Pic-catégorie (α, β) est dite <u>stricte</u> si $\beta(x, x) = 0$ pour tout $x \in M$.

[illegible]

<u>Proposition 7</u>.- Soit (α, β) une structure de Pic-catégorie préépinglé de type (M, N). Alors l'antisymétrisé $a\alpha$ [illegible] et l'application $x \mapsto \beta(x, x)$

est un homomorphisme du groupe M dans le groupe ${}_2N$, ${}_2N$ étant le sous-groupe de N contenant les éléments $y \in N$ tels que $2y = 0$.

<u>Démonstration</u>. — Puisque $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Ker} \delta'_3$, nous avons les relations

$$(3) \quad \alpha(x_2, x_3, x_4) - \alpha(x_1 + x_2, x_3, x_4) + \alpha(x_1, x_2 + x_3, x_4) - \alpha(x_1, x_2, x_3 + x_4) + \\ + \alpha(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$(4) \quad \alpha(x_1, x_2, x_3) - \alpha(x_1, x_3, x_2) + \alpha(x_3, x_1, x_2) = \beta(x_2, x_3) - \beta(x_1 + x_2, x_3) + \\ + \beta(x_1, x_3)$$

$$(5) \quad \beta(x_1, x_2) + \beta(x_2, x_1) = 0$$

pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \in M$. En permutant x_1, x_2 dans (4) nous obtenons

$$\alpha(x_2, x_1, x_3) - \alpha(x_2, x_3, x_1) + \alpha(x_3, x_2, x_1) = \beta(x_1, x_3) - \beta(x_1 + x_2, x_3) + \\ + \beta(x_2, x_3)$$

ce qui donne

$$a\alpha(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1, x_2, x_3) - \alpha(x_1, x_3, x_2) + \alpha(x_3, x_1, x_2) - \\ - \alpha(x_2, x_1, x_3) + \alpha(x_2, x_3, x_1) - \alpha(x_3, x_2, x_1) = 0.$$

Ensuite dans (4) faisons successivement $x_1 = x_3 = x$, $x_2 = y$; $x_1 = x_3 = y$, $x_2 = x$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = x + y$; nous obtenons

$$\alpha(x, y, x) = \beta(y, x) - \beta(x + y, x) + \beta(x, x)$$

$$\alpha(y, x, y) = \beta(x, y) - \beta(x + y, y) + \beta(y, y)$$

$$\alpha(x, y, x + y) - \alpha(x, x + y, y) + \alpha(x + y, x, y) = \beta(y, x + y) - \beta(x + y, x + y) + \\ + \beta(x, x + y)$$

ce qui donne

$$\alpha(y, x, y) - \alpha(x + y, x, y) + \alpha(x, x + y, y) - \alpha(x, y, x + y) + \alpha(x, y, x) = \\ = \beta(x, y) - \beta(x + y, y) + \beta(y, y) - [\beta(y, x + y) - \beta(x + y, x + y) + \beta(x, x + y)] + \\ + \beta(y, x) - \beta(x + y, x) + \beta(x, x)$$

Or le premier membre de la relation est nul en vertu de (3) et le second égal à $\beta(x,x)+\beta(y,y)-\beta(x+y,x+y)$ en vertu de (5) ; ce qui montre que l'application $x \mapsto \beta(x,x)$ est un homomorphisme. On peut démontrer cette dernière assertion d'une manière autrement. Pour cela, considérons une Pic-catégorie $(\underline{P},\varepsilon)$ préépinglée de type (M,N) qui correspond au couple (α,β) dans l'application de la proposition 5. Dans $\underline{P}$, prenons quatre objets X_1, X_2, X_3, X_4 tels que $X_1 = X_3 = X$, $X_2 = X_4 = Y$. En vertu de (Chap. I, §3, n° 1, Prop. 7) nous avons la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & (X_1\otimes X_2)\otimes(X_3\otimes X_4) \arrow[dl, "a_{X_1\otimes X_2,X_3,X_4}"'] \arrow[dr, "c_{X_1\otimes X_2,X_3\otimes X_4}"] & \\
((X_1\otimes X_2)\otimes X_3)\otimes X_4 \arrow[d, "a^{-1}_{X_1,X_2,X_3}\otimes id"'] & & (X_3\otimes X_4)\otimes(X_1\otimes X_2) \arrow[d, "a_{X_3\otimes X_4,X_1,X_2}"] \\
(X_1\otimes(X_2\otimes X_3))\otimes X_4 \arrow[d, "(id\otimes c_{X_2,X_3})\otimes id"'] & & ((X_3\otimes X_4)\otimes X_1)\otimes X_2 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3,X_4,X_1}\otimes id"] \\
(X_1\otimes(X_3\otimes X_2))\otimes X_4 \arrow[d, "a_{X_1,X_3,X_2}\otimes id"'] & & (X_3\otimes(X_4\otimes X_1))\otimes X_2 \arrow[d, "(id\otimes c_{X_4,X_1})\otimes id"] \\
((X_1\otimes X_3)\otimes X_2)\otimes X_4 \arrow[d, "(c_{X_1,X_3}\otimes id)\otimes id"'] & & (X_3\otimes(X_1\otimes X_4))\otimes X_2 \arrow[d, "a_{X_3,X_1,X_4}\otimes id"] \\
((X_3\otimes X_1)\otimes X_2)\otimes X_4 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3\otimes X_1,X_2,X_4}"'] & & ((X_3\otimes X_1)\otimes X_4)\otimes X_2 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3\otimes X_1,X_4,X_2}"] \\
(X_3\otimes X_1)\otimes(X_2\otimes X_4) \arrow[rr, "id\otimes c_{X_2,X_4}"] & & (X_3\otimes X_1)\otimes(X_4\otimes X_2)
\end{tikzcd}$$

ce qui donne, en posant $x = \varepsilon_0^{-1}(cl\,X)$, $y = \varepsilon_0^{-1}(cl\,Y)$

$$\alpha(x+y,x,y) - \alpha(x,y,x) + \beta(y,x) + \alpha(x,x,y) + \beta(x,x) -$$
$$- \alpha(2x,y,y) + \beta(y,y) + \alpha(2x,y,y) - \alpha(x,x,y) - \beta(y,x) +$$
$$+ \alpha(x,y,x) - \alpha(x+y,x,y) - \beta(x+y,x+y) = 0$$

ou après simplification

$$\beta(x,x) + \beta(y,y) - \beta(x+y, x+y) = 0.$$

<u>Proposition 8</u>.– Le noyau de l'application $(\overline{\alpha,\beta}) \mapsto \bar{\alpha}$ du groupe $H^2(\mathrm{Hom}\,('L.(M),N))$ dans le groupe $H^3(M,N)$ s'identifie au groupe

$$\mathrm{Linant}^2(M,N) / \mathrm{ant}\,(Z^2(M,N))$$

des applications bilinéaires alternées $M \times M \longrightarrow N$, modulo celles de la forme ant u où $u \in Z^2(M,N)$.

<u>Démonstration</u>.– Soit $(\overline{\alpha,\beta}) \in H^2(\mathrm{Hom}\,('L.(M),N))$ tel que $\bar{\alpha} = 0$, i.e $\alpha = \partial f$, $f \in C^2(M,N)$. Nous avons

$$(\overline{\alpha,\beta}) = (\overline{\partial f,\beta}) = (\overline{\partial f - \partial f,\ \beta - \mathrm{ant} f}) = (\overline{0,g}) \ ,\ g = \beta - \mathrm{ant}\, f$$

En vertu des relations (4) et (5), g est bilinéaire alterné. D'où le noyau de l'application se compose des éléments $(\overline{0,g})$ avec g bilinéaire alterné. De plus

$$(\overline{0,g}) = (\overline{0,g'}) \Longleftrightarrow \exists\, u \in C^2(M,N)\ ,\ \partial u = 0 \text{ et } g - g' = \mathrm{ant}\, u$$

d'où la proposition en remarquant que les éléments de $\mathrm{ant}\,(Z^2(M,N))$ sont des applications bilinéaires alternées $M \times M \longrightarrow N$.

<u>Proposition 9</u>.– Il y a un monomorphisme j de $\mathrm{Linant}^2(M,N)/\mathrm{ant}\,(Z^2(M,N))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$.

<u>Démonstration</u>.– Considérons l'homomorphisme

$$\mathrm{Linant}^2(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$$
$$f \longmapsto \varphi,\quad \varphi(x) = f(x,x)\ ,\ x \in M$$

Le noyau de cette application se compose des applications bilinéaires alternées f telles que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in M$. En vertu des relations (3), (4), (5), $(0, f)$ est une structure de Pic-catégorie préépinglé de type (M, N) qui est stricte puisque $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in M$. Or le complexe $\mathrm{Hom}(L.(M), N)$ est exact, ce qui donne $(0, f) = (\partial u, \mathrm{ant}\, u)$ avec $\partial u = 0$. On en conclut que le noyau est $\mathrm{ant}(Z^2(M, N))$. Cet homomorphisme induit donc le monomorphisme

$$j : \mathrm{Linant}^2(M, N)/\mathrm{ant}(Z^2(M, N)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N) .$$

! dire l'état de la question !

Proposition 10.. Si M est libre, j est un isomorphisme.

Démonstration.. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de M et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. Nous construisons une application $f : M \times M \to N$ de la manière suivante

$$f(e_i, e_i) = \varphi(e_i) , \quad f(e_i, e_k) = 0 \quad \text{pour } i \neq k ,$$

$$f(x, y) = \sum m_i n_k f(e_i, e_k) \text{ pour } x = \sum m_i e_i , \; y = \sum n_k e_k .$$

Il est clair que f est bilinéaire alterné et $f(x, x) = \varphi(x)$, d'où la proposition.

Corollaire.. Si M est libre, alors $\mathrm{Linant}^2(M, N)/\mathrm{ant}(Z^2(M, N)) = 0$ si et seulement si ${}_2N = 0$.

Démonstration.. Si ${}_2N = 0$, il est clair que $\mathrm{Linant}^2(M, N)/\mathrm{ant}(Z^2(M, N))$ $= 0$. Inversement, $\mathrm{Linant}^2(M, N)/\mathrm{ant}(Z^2(M, N)) = 0$ implique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$ $= 0$ et par suite ${}_2N = 0$ puisque M est libre.

Proposition 11.. Il y a un monomorphisme

$$h : H^2(\mathrm{Hom}({}'L.(M), N)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$$

qui est un isomorphisme si M est libre.

Démonstration.. Soit (α, β) une structure de Pic-catégorie préépinglé de type (M, N). En vertu de la proposition 7, l'application $x \mapsto \beta(x, x)$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. De plus deux structures cohomologues (α, β), (α', β') définissent une même application $x \mapsto \beta(x, x) = \beta'(x, x)$. On obtient un homomorphisme h de $H^2(\mathrm{Hom}('L.(M), N))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$ en posant $h(\overline{\alpha, \beta})(x) = \beta(x, x)$, $x \in M$. Le noyau de h est donc $H^2(\mathrm{Hom}(L.(M), N))$ qui est nul en vertu de la proposition 4.

Supposons M libre et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. En vertu de la proposition 10, il existe $f \in \mathrm{Linant}^2(M, N)$ tel que $f(x, x) = \varphi(x)$. Il est clair que $(0, f)$ est une structure de Pic-catégorie préépinglé de type (M, N) et $h(\overline{0, f})(x) = f(x, x) = \varphi(x)$, ce qui achève la démonstration.