12
HOA
73

? → 1975

Gr-catégories

HOANG XUAN Sinh

Institut pédagogique n°2 de Hanoi

Département de mathématiques

BIBLIOTHEQUE

Introduction

Ce travail se compose de trois chapitres. Le premier rassemble un certain nombre de définitions et résultats nécessaires pour les chapitres qui suivent sur les catégories munies d'une loi ⊗ qu'on peut trouver dans [2], [6], [11], [14], [15], la terminologie employée dans ce chapitre étant de Neantro Saavedra Rivano [14]. Une <u>⊗-catégorie</u> est une catégorie munie d'une loi ⊗. Une ⊗-catégorie <u>associative</u> est une ⊗-catégorie ~~telle qu'on puisse trouver~~ munie d' un isomorphisme de trifoncteurs appelé <u>contrainte d'associativité</u>

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

vérifiant une condition dite l'<u>axiome du pentagone</u>. Une ⊗-catégorie <u>commutative</u> est une ⊗-catégorie ~~telle qu'il existe~~ munie d'un isomorphisme de bifoncteurs appelé <u>contrainte de commutativité</u>

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

vérifiant la relation $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$. Une contrainte de commutativité est <u>stricte</u> si

$$c_{X,X} = id_{X \otimes X}$$

pour tout X. Enfin une ⊗-catégorie est dite <u>unifère</u> s'il ~~existe~~ est donné un objet $\underline{1}$ et des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X$$

$$d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

tels que

$$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$$

le triple $(\underline{1}, g, d)$ constitue une <u>contrainte d'unité</u>.

Une <u>⊗-catégorie AC</u> (resp. <u>AU</u>) est une ⊗-catégorie associative et commutative (resp. associative et unifère) vérifiant une certaine condition de compatibilité. Une <u>⊗-catégorie ACU</u> est une ⊗-catégorie AC et AU.

Un <u>⊗-foncteur</u> d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie $\underline{C}'$ est un couple $(F, \breve{F})$ où F est un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\breve{F}$ un isomorphisme de bifoncteurs

$$\breve{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

Un <u>⊗-foncteur associatif</u> (resp. <u>commutatif</u>, <u>unifère</u>) est un ⊗-foncteur d'une ⊗-catégorie associative (resp. commutative, unifère) dans une ⊗-catégorie associative (resp. commutative, unifère) vérifiant une condition dite condition de <u>compatibilité</u> avec les contraintes d'associativité (resp. de commutativité, d'unité). Un <u>⊗-foncteur AC</u> est un ⊗-foncteur associatif et commutatif, un <u>⊗-foncteur ACU</u> est un ⊗-foncteur associatif, commutatif et unifère.

Pour deux ⊗-foncteurs $(F, \breve{F})$, $(G, \breve{G})$ d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie $\underline{C}'$, un <u>⊗-morphisme</u> de $(F, \breve{F})$ dans $(G, \breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda : F \to G$ rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes FY \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "\lambda_X \otimes \lambda_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X \otimes Y}"] \\
GX \otimes GY \arrow[r, "\breve{G}_{X,Y}"] & G(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

Le deuxième chapitre est réservé à l'étude des Gr-catégories et des Pic-catégories. Une Gr-catégorie est une ⊗-catégorie AU, dont tous les objets sont inversibles, et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde (i.e. toutes les flèches sont des isomorphismes). Une Gr-catégorie ressemble donc à un groupe. On tire de cette définition que si $\underline{P}$ est une Gr-catégorie, l'ensemble $\Pi_0(\underline{P})$ des classes à isomorphisme près d'objets de $\underline{P}$, muni de la loi de composition induite par l'opération ⊗, est un groupe ; le groupe $Aut(\underline{1}) = \Pi_1(\underline{P})$ est un groupe commutatif ; et pour tout $X \in Ob\,\underline{P}$

1-objet

$$\gamma_X : u \longmapsto u \otimes id_X = Aut(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} Aut(X)$$

$$\delta_X : u \longmapsto id_X \otimes u = Aut(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} Aut(X)$$

On attache ainsi à une Gr-catégorie $\underline{P}$, des groupes $\Pi_0(\underline{P})$, $\Pi_1(\underline{P})$ où $\Pi_1(\underline{P})$ est commutatif. On peut définir en plus, une action de $\Pi_0(\underline{P})$ dans $\Pi_1(\underline{P})$, de la façon suivante : si $s \in \Pi_0(\underline{P})$ est représenté par $X \in Ob\,\underline{P}$, et $u \in \Pi_1(\underline{P})$, on pose

$$su = \delta_X^{-1}\gamma_X(u)$$

$\Pi_1(\underline{P})$ en devient un $\Pi_0(\underline{P})$-module à gauche.

Soient M un groupe, N un M-module (abélien à gauche). Un préépinglage de type (M,N) pour une Gr-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N, $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$. Une Gr-catégorie préépinglée de type (M,N) est une Gr-catégorie munie d'un préépinglage. Enfin, un <u>morphisme</u> de Gr-catégories préépinglés de type (M,N) $(\underline{P}, \varepsilon) \longrightarrow (\underline{P}', \varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur associatif tel que les triangles

$$\begin{tikzcd} \Pi_0(\underline{P}) \arrow[rr] & & \Pi_0(\underline{P}') \\ & M \arrow[ul, "\varepsilon_0"] \arrow[ur, "\varepsilon'_0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Pi_1(\underline{P}) \arrow[rr] & & \Pi_1(\underline{P}') \\ & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon'_1"'] & \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglés de type (M,N) est égal à l'ensemble des <u>composantes connexes</u> de la ? catégorie des Gr-catégories préépinglés de type (M,N). Si on considère le groupe de cohomologie $H^3(M,N)$ du groupe M à valeurs dans le M-module N (au sein de la cohomologie des groupes [12]) on obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglés de type (M,N) et l'ensemble $H^3(M,N)$.

Une <u>Pic-catégorie</u> est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité, ce qui fait qu'une Pic-catégorie ressemble à un groupe commutatif. On vérifie aussitôt qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une structure de Pic-catégorie sur une Gr-catégorie $\underline{P}$ est que $\Pi_0(\underline{P})$ soit commutatif et agisse trivialement sur $\Pi_1(\underline{P})$. Une Pic-catégorie est <u>stricte</u> si sa contrainte de commutativité est stricte. vague

Soient M, N des groupes abéliens. Un <u>préépinglage</u> de type (M,N) pour une Pic-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P})$$

Une Pic_catégorie *préépinglée de type (M,N)* est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage. On définit *les morphismes* de tels objets de la même façon qu'on a fait pour les Gr-catégories.

Pour formuler des propositions, on introduit deux complexes de groupes abéliens libres.

$$L.(M) \ : \ L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \longrightarrow M$$

$$'L.(M) \ : \ 'L_3(M) \xrightarrow{'d_3} 'L_2(M) \xrightarrow{'d_2} 'L_1(M) \xrightarrow{'d_1} 'L_0(M) \longrightarrow M$$

dont le premier est une résolution tronquée de M, i.e est une suite exacte. On obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M,N) et l'ensemble $H^2(\mathrm{Hom}('L.(M), N))$. L'exactitude de du complexe L.(M) nous donne la trivialité de la classification des Pic. catégories strictes préépinglées de type (M,N), i.e toutes les Pic-catégories strictes préépinglées de type (M,N) sont équivalentes.

Enfin le troisième chapitre donne la construction de la solution de deux problèmes universels : celui de rendre des objets "objet unité" et celui d'inverser des objets.

Soient $\underline{A}$ une ⊗-catégorie AC, $\underline{A}'$ une autre ⊗-catégorie AC dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, et $(T,\breve{T}) : \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ un ⊗-foncteur AC. On cherche à rendre les objets TA' de $\underline{A}$, $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, "objet unité", c'est à dire on cherche :

1° Une ⊗-catégorie ACU $\underline{P}$;

2° Un ⊗-foncteur AC $(D,\breve{D}) : \underline{A} \to \underline{P}$;

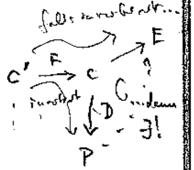
3° Un ⊗-isomorphisme

$$\lambda : (D,\breve{D}) \circ (T,\breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est le ⊗-foncteur $\underline{1}_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$. Le triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ est tel qu'il soit universel pour les triples $(\underline{Q}, (E, \check{E}), \mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3°.

1-universel
ou 2-universel ?

Pour le problème d'inverser des objets, on considère une ⊗-catégorie ACU $\underline{C}$, une ⊗-catégorie ACU $\underline{C}'$ dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, et un ⊗-foncteur ACU $(F, \check{F}) : \underline{C}' \to \underline{C}$. On cherche une ⊗-catégorie ACU $\underline{P}$ et un ⊗-foncteur ACU $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{P}$ ayant les propriétés suivantes :



1° $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.

2° Pour tout ⊗-foncteur ACU $(\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}})$ de $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{G}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un ⊗-foncteur ACU $(E', \check{E}')$ unique (à ⊗-isomorphisme ~~près~~ unique près) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}}) \simeq (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$.

Ce problème se ramène au premier. Il suffit de poser $\underline{A}' = \underline{C}'$, $\underline{A} = \underline{C}' \times \underline{C}$, $TX' = (FX', X')$, et de remarquer que si $\underline{C}, \underline{C}', \underline{Q}$ sont des ⊗-catégories ACU, $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q})$ la catégorie des ⊗-foncteurs ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$, alors on a une équivalence canonique de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C} \times \underline{C}', \underline{Q}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C}', \underline{Q}) .$$

La ⊗-catégorie ACU $\underline{P}$ ainsi définie est appelée la <u>⊗-catégorie de fractions</u> de la catégorie $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$. La ⊗-catégorie de fractions de $\underline{C}^{is}$ définie par $(\underline{C}^{is}, (id_{\underline{C}^{is}}, id))$ est une Pic-catégorie, on l'appelle la <u>Pic-enveloppe</u> de la catégorie $\underline{C}$ et on la note $\underline{\mathrm{Pic}}(\underline{C})$. Pour $\underline{C} = \mathcal{P}(R)$, catégorie des R-modules projectifs de type fini (R un anneau unitaire) et $\underline{P} = \mathrm{Pic}(\mathcal{P}(R))$, on obtient

elles sont [illegible]

Pic (C)

$$\pi_0(\underline{P}) \simeq K^0(R)$$

$$\pi_1(\underline{P}) \simeq K^1(R)$$

où $K^0(R)$ est le groupe de Grothendieck et $K^1(R)$ le groupe de Whitehead [1].

La considération de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie ACU nous donne le résultat suivant :

!! Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, Z un objet quelconque de $\underline{C}$ ~~différent de l'objet unité 1~~, S le foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ défini par

$$X \longmapsto X \otimes Z$$

On appelle catégorie de suspension de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z, le triple $(\underline{P}, i, p)$, solution du problème universel pour les triples $(\underline{Q}, j, q)$ où $\underline{Q}$ est une catégorie, j un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$, q une équivalence de $\underline{Q}$ dans $\underline{Q}$, tels que le carré

Pb 2-universel

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"'] & \underline{C} \arrow[d, "j"] \\ \underline{Q} \arrow[r, "q"] & \underline{Q} \end{tikzcd}$$

vague

soit commutatif (à isomorphisme fonctoriel près) i.e $qj \simeq jS$.

Dans le cas où $\underline{C}$ est la catégorie homotopique pointuée $\underline{Htp}_*$ munie du produit contracté $\wedge$, des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité habituelles et Z la 1-sphère S^1, S est par conséquent le foncteur de suspension, on retrouve la définition connue de catégorie de suspension.

Soient $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ engendrée par Z et $\underline{P}$ la catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, id))$ où $F : \underline{C}' \to \underline{C}$ est le foncteur d'inclusion. On obtient un foncteur $G : \underline{P} \to \underline{P}$ de la catégorie de suspension $\underline{P}$ dans la $\otimes$-catégorie de fractions $\underline{P}$. Si G n'est pas fidèle (ce qui se produit dans le cas où $\underline{C} = \underline{Htp}_*$, $Z = S^1$ et la loi $\otimes$ est le produit contracté $\wedge$) alors il est impossible de construire dans $\underline{P}$ une loi $\otimes$ telle que $\underline{P}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, iZ inversible dans $\underline{P}$ et i immergé dans un couple $(i, \breve{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

Ces deux problèmes universels ont été posés par Monsieur Grothendieck lors de son séjour à l'Université de Hanoi en Novembre 1967. Je tiens à lui exprimer ici tous mes remerciements pour ses précieuses directives.

Chapitre I

⊗- Catégories et ⊗- foncteurs

§1. ⊗- Catégories.

1. Définition des ⊗- catégories.

Définition 1.- Soit $\underline{C}$ une catégorie ; un foncteur $\underline{C} \times \underline{C} \to \underline{C}$ est appelé une ⊗- structure sur $\underline{C}$, ou encore une loi ⊗ sur $\underline{C}$. Une ⊗- catégorie est une catégorie $\underline{C}$ munie d'une ⊗- structure qu'on note $\otimes_{\underline{C}}$, ou simplement ⊗, si aucune confusion n'est possible ; à des objets X, Y de $\underline{C}$, on associe donc un objet $X \otimes Y$ de $\underline{C}$ appelé produit tensoriel des objets X et Y, qui dépend fonctoriellement de (X,Y), i.e à des flèches $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ de $\underline{C}$, on a une flèche $f \otimes g : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ de $\underline{C}$ appelé produit tensoriel des flèches f et g, vérifiant les relations $id_X \otimes id_Y = id_{X \otimes Y}$, $f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ au cas où f, f' et g, g' sont composables.

Définition 2.- Soit X un objet d'une ⊗- catégorie $\underline{C}$. On dit que X est régulier si les foncteurs, définis par les applications

$$Y \mapsto Y \otimes X \ , \quad f : Y \to Z \longmapsto f \otimes id_X : Y \otimes X \to Z \otimes X$$

et

$$Y \longmapsto X \otimes Y \ , \quad f : Y \to Z \longmapsto id_X \otimes f \ : X \otimes Y \to X \otimes Z$$

de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ sont des équivalences de catégories. On vérifie aisément que si X est régulier et si $X' \simeq X$ i.e X' est isomorphe à X, alors X' est aussi régulier.

2. Exemples de $\otimes$-catégories.

1) Soit $\underline{C}$ une catégorie dans laquelle le produit des couples d'objets existe. Pour tout couple (X, Y), choisissons un produit $(X \times Y, p_X, p_Y)$. On définit alors une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$ en posant pour des objets X, Y

$$X \otimes Y = X \times Y,$$

pour des flèches $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$,

$$f \otimes g = f \times g.$$

On vérifie sans difficulté que, dans cette $\otimes$-catégorie, les objets réguliers sont les objets finaux.

2) Soit $\underline{C}$ la catégorie $\underline{\text{Mod}}(A)$ des modules sur un anneau commutatif unitaire A. Le produit tensoriel de A-modules définit une loi $\otimes$ sur $\underline{C}$. Ici les objets réguliers sont les A-modules projectifs de rang 1 [4].

3) Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On définit une catégorie $\underline{C}$ de la façon suivante : les objets de $\underline{C}$ sont les lacets de X localisés en x_0 ; si ω_1, ω_2 sont deux lacets, $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(\omega_1, \omega_2)$ est l'ensemble d'homotopies $\omega_1 \to \omega_2$ modulo la relation d'homotopie. La composition des lacets définit une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$. Dans cette $\otimes$-catégorie tous les objets sont réguliers.

4) Soient $\underline{C}$ une catégorie additive, $\underline{E}$ une catégorie cofibrée sur $\underline{C}$ [10]. Pour tout objet A de $\underline{C}$, la fibre de $\underline{E}$ en A est notée $\underline{E}(A)$. L'homomorphisme somme

dans $\underline{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\underline{E}(A) \times \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(A)$$

qui fait de $\underline{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie.

5) Soient M un groupe, N un M-module abélien à gauche. On construit une catégorie $\underline{C}$ dont les objets sont les éléments de M, les morphismes sont des automorphismes. Pour $s \in M$, on définit

$$\mathrm{Aut}_{\underline{C}}(s) = \{s\} \times N$$

La composition des flèches dans $\underline{C}$ provient de l'addition dans N. On définit sur $\underline{C}$ une loi $\otimes$ de la façon suivante : si s_1, $s_2 \in M$, on pose

$$s_1 \otimes s_2 = s_1 s_2 \quad ;$$

si $(s_1, u_1), (s_2, u_2)$ sont des morphismes ($u_1, u_2 \in N$), on pose

$$(s_1, u_1) \otimes (s_2, u_2) = (s_1 s_2, \; u_1 + s_1 u_2).$$

Ici tous les objets de la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont réguliers en vertu du fait que M est un groupe et l'ensemble des flèches de $\underline{C}$ muni de la loi $\otimes$ est aussi un groupe, à savoir le produit semi-direct $M.N$.

Dans le cas où N est un M-module abélien à droite, on définit la loi $\otimes$ dans $\underline{C}$ par

$$s_1 \otimes s_2 = s_1 s_2 \quad .$$

$$(s_1, u_1) \otimes (s_2, u_2) = (s_1 s_2 \, , \; u_1 s_2 + u_2) .$$

§2. Contraintes pour une loi $\otimes$.

1. Contraintes d'associativité.

<u>Définition 1</u>.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. <u>Une contrainte d'associativité</u> pour $\underline{C}$ est un isomorphisme fonctoriel a

$$a_{X,Y,Z} : X\otimes(Y\otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X\otimes Y)\otimes Z$$

tel que pour des objets X, Y, Z, T de $\underline{C}$ le diagramme suivant soit commutatif (<u>axiome du pentagone</u>)

$$\begin{tikzcd}
 & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes T) \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,T}"] & \\
X\otimes(Y\otimes(Z\otimes T)) \arrow[ur, "a_{X,Y,Z\otimes T}"] \arrow[d, "id_X\otimes a_{Y,Z,T}"'] & & ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes T \\
X\otimes((Y\otimes Z)\otimes T) \arrow[rr, "a_{X,Y\otimes Z,T}"] & & (X\otimes(Y\otimes Z))\otimes T \arrow[u, "a_{X,Y,Z}\otimes id_T"']
\end{tikzcd}$$

<u>Définition 2</u>.– On appelle <u>$\otimes$-catégorie associative</u> <u>une $\otimes$-catégorie</u> munie d'une contrainte d'associativité.

<u>Définition 3</u>.– Deux contraintes d'associativité a et a' d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont dites <u>cohomologues</u> s'il existe un automorphisme fonctoriel φ du foncteur $\otimes : \underline{C}\times\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(1)\qquad \begin{tikzcd}
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "id_X\otimes\varphi_{Y,Z}"'] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "\varphi_{X,Y}\otimes id_Z"] \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "\varphi_{X,Y\otimes Z}"'] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "\varphi_{X\otimes Y,Z}"] \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a'_{X,Y,Z}"] & (X\otimes Y)\otimes Z
\end{tikzcd}$$

pour des objets X, Y, Z de $\underline{C}$.

<u>Exemples</u>.– 1) Toutes les $\otimes$-catégories données dans (§1, n°2) sont des $\otimes$-catégories associatives.

2) Dans l'exemple 5) du (§1, n°2), il y a une contrainte d'associativité évidente à savoir l'identité. On va voir qu'il y en a d'autres. Se donner un morphisme de trifoncteurs a revient dans

ce cas à se donner une application $f : M^3 \to N$, la relation entre f et a étant

$$a_{s_1, s_2, s_3} = (s_1 s_2 s_3 , f(s_1, s_2, s_3)).$$

Lorsqu'on écrit l'axiome du pentagone en utilisant cette relation, on trouve

$$s_1 f(s_2, s_3, s_4) - f(s_1 s_2, s_3, s_4) + f(s_1, s_2 s_3, s_4) - f(s_1, s_2, s_3 s_4) + f(s_1, s_2, s_3) = 0$$

où l'on a posé $X = s_1$, $Y = s_2$, $Z = s_3$, $T = s_4$. Autrement dit $f : M^3 \to N$ définit une contrainte d'associativité si et seulement si f est un 3-cocycle de M à valeurs dans le M-module N, au sens de la cohomologie des groupes [12]. On explicite de même (1) pour démontrer que des 3-cocycles f, f' déterminent des contraintes d'associativité cohomologues si et seulement si f, f' sont des cocycles cohomologues. On trouve donc, dans ce cas, que le groupe des contraintes d'associativité, sous-groupe du groupe des automorphisme du foncteur $(s_1, s_2, s_3) \longmapsto s_1 s_2 s_3$, est isomorphe au groupe $Z^3(M,N)$ des 3-cocycles de M à valeurs dans N. De même, le groupe des contraintes d'associativité modulo cohomologie est isomorphe au groupe cohomologique $H^3(M,N)$.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$, indexée par un ensemble fini non vide totalement ordonné $(I,<)$. Au moyen des X_i et de la loi $\otimes$, nous allons construire des objets de $\underline{C}$ qu'on appelle des <u>produits des X_i relativement à l'ordre $<$</u>. Par exemple pour $I = \{\alpha\}$, nous avons un seul produit X_α ; pour $I = \{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha < \beta$, nous avons aussi un seul produit $X_\alpha \otimes X_\beta$; pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ avec $\alpha < \beta < \gamma$, nous avons deux produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)$ et $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$; pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ avec $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, nous avons cinq produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta))$, $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta)$, $((X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta$, $(X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)) \otimes X_\delta$, $X_\alpha \otimes ((X_\beta \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta)$. Parmi ces produits relativement à l'ordre $<$, nous allons en choisir un que nous appellons le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$.

Définition 4.- Soit $(X_i)_{i\in J}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$, indexée par un ensemble totalement ordonné non vide $(J,<)$. Pour chaque ensemble non vide fini $I\subset J$ (totalement ordonné par l'ordre induit), on appelle le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$, l'objet de $\underline{C}$, noté $\underset{I}{\otimes} X_i$, et défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I de la manière suivante :

1° Si $I=\{\beta\}$, alors $\underset{I}{\otimes} X_i = X_\beta$;

2° Si I a p éléments $(p>1)$ avec β le plus grand élément et I' l'ensemble des éléments $<\beta$ de I, alors $\underset{I}{\otimes} X_i = (\underset{I'}{\otimes} X_i)\otimes X_\beta$.

D'après cette définition, pour $I=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $\alpha<\beta<\gamma$ est $(X_\alpha\otimes X_\beta)\otimes X_\gamma$. Dans ce qui suit de ce n°, nous dirons produit canonique (resp. produit) de la famille $(X_i)_{i\in I}$ au lieu de dire produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$ (resp. produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$) si aucune confusion n'est à craindre.

Soit $(X_i)_{i\in J}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ associative, indexée par un ensemble non vide totalement ordonné $(J,<)$. Les ensembles non vides $I\subset J$ considérés ci-dessous sont des ensembles finis totalement ordonnés par l'ordre induit.

Définition 5.- Pour chaque couple (I_1,I_2) de sous-ensembles non vides de I, tels que $I=I_1\amalg I_2$ et que tout $i_1\in I_1$ est plus petit que tout $i_2\in I_2$, soit ϕ_{I_1,I_2} un isomorphisme fonctoriel en les X_i, $i\in I$,

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow[\sim]{\phi_{I_1,I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i)$$

défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I_2 de la manière suivante :

1° Si $I_2 = \{\beta\}$, alors

$$\phi_{I_1, I_2} : \bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes X_\beta$$

est l'identité ;

2° Si I_2 a $p > 1$ éléments avec β le plus grand éléments et I'_2 l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_2, alors ϕ_{I_1, I_2} est défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I'_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
(\bigotimes_{I_1 \amalg I'_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\phi_{I_1, I'_2} \otimes id_{X_\beta}"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I'_2} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 1</u>.– Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles non vides de I tels qu'on ait $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$, le diagramme suivant est commutatif

$$(2) \quad \begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur le nombre d'éléments de I_3.

1° Si $I_3 = \{\beta\}$, alors (2) devient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif par définition de $\phi_{I_1, I_2 \amalg \{\beta\}}$.

2° Si I_3 a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I'_3 l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_3, nous démontrons la commutativité de (2) en considérant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I'_3} \otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta \arrow[r, "(id \otimes \phi_{I_2, I'_3}) \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big)\Big) \otimes X_\beta \arrow[dddd, bend left=60, "a \otimes id"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id \otimes (\phi_{I_2, I'_3} \otimes id)"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\Big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[u, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2, I_3}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big)\Big) \arrow[u, "id \otimes a"] \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift left=12em, "(\mathrm{VIII})"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & \big(\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\Big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I'_3} \otimes id"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta \arrow[r, "(\phi_{I_1, I_2} \otimes id) \otimes id"] & \Big(\Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\Big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

dans lequel les régions (II), (VII) sont commutatives par naturalité de a ; les régions (I), (IV), (VI) par définition de Φ (Déf. 5) ; la région (III) par évidence ; la région (VIII) par l'axiome du pentagone ; enfin le circuit extérieur par hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de la région (V) qui n'est ~~pas~~ autre que le diagramme (2) en se rappelant de la définition de $\underset{I}{\otimes} X_i$ (Déf. 4).

faire des déf. dans le cas général

Proposition 2. – Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique $\underset{I}{\otimes} X_i$ par un isomorphisme

$$y : \underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les X_i.

Démonstration. – Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Pour $I = \{\beta\}$, l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_\beta$. Pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$ et $i_1 < i_2$ pour $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$, on définit y par le composé des isomorphismes

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\Phi_{I_1, I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \xrightarrow{z \otimes t} Z \otimes T = Y$$

où z et t sont des isomorphismes définis par hypothèse de récurrence. L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé l'isomorphisme canonique.

Proposition 3. – Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$; et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, $(X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme

(3)
$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a_{Y,Z,T}"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

est commutatif, b et b' étant les isomorphismes canoniques.

<u>Démonstration</u>. – Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2, I_3}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)) \arrow[r, "y \otimes (z \otimes t)"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "(y \otimes z) \otimes t"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

où y, z, t sont les isomorphismes canoniques. Remarquons d'abord que les composés des isomorphismes horizontaux du diagramme donnent respectivement les isomorphismes canoniques b et b' du diagramme (3). On a la commutativité de la région (I) en vertu de la proposition 1, et celle de la région (II) par la naturalité de a. D'où la commutativité du circuit extérieur, et donc celle de (3).

On peut énoncer la proposition 3 sous forme plus générale dont la vérification est immédiate.

<u>Proposition 4</u>. – Soient Y_1, Y_2 des produits de $(X_i)_{i \in I}$ et $\tau : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de a, a^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "\tau"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "b_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

où b_1, b_2 sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.

<u>Proposition 5</u>. – Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des produits de $(X_i)_{i \in I}$, $\tau_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et $\tau_{n1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de a, a^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant

$$\begin{tikzcd}
& Y_1 \arrow[r, "\tau_{12}"] & Y_2 \arrow[dr, "\tau_{23}"] & \\
Y_n \arrow[ur, "\tau_{n1}"] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[l, dotted] & \cdot \arrow[l, dotted] & \cdot \arrow[l, dotted]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. – En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\tau_{12}"] \arrow[rrrr, phantom, "(1)", bend left=25] & Y_2 \arrow[r, "\tau_{23}"] & Y_3 \cdots\cdots & Y_{n-1} \arrow[r, "\tau_{n-1,n}"] & Y_n \arrow[llll, bend right=40, "\tau_{n1}"'] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_1"] \arrow[ur, phantom, "(2)"] \arrow[r, equal] & \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_2"] \arrow[ur, phantom, "(3)"] \arrow[r, equal] & \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_2"] \cdots\cdots & \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_{n-1}"] \arrow[ur, phantom, "(n)"] \arrow[r, equal] & \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_n"']
\end{tikzcd}$$

où les b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont des isomorphismes canoniques, a les régions (2), (3),.... (n) et le circuit extérieur commutatifs en vertu de la proposition 4. D'où la commutativité de la région (1) qui est le polygone considéré de la proposition.

Exemple 3). – En vertu de la proposition 5, le pentagone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& (X_1 \otimes X_2) \otimes ((X_3 \otimes X_4) \otimes X_5) \arrow[dr, "id \otimes a^{-1}_{X_3, X_4, X_5}"] & \\
((X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes X_4)) \otimes X_5 \arrow[ur, "a^{-1}_{X_1 \otimes X_2, X_3 \otimes X_4, X_5}"] \arrow[d, "a_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4} \otimes id"'] & & (X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \arrow[d, "a_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4 \otimes X_5}"] \\
(((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes X_4) \otimes X_5 & & ((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes (X_4 \otimes X_5) \arrow[ll, "a_{(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3, X_4, X_5}"]
\end{tikzcd}$$

2. Contraintes de commutativité.

Définition 6. – Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte de commutativité pour $\underline{C}$ est un isomorphisme fonctoriel c

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

tel qu'on ait

(4) $$c_{X,Y} \circ c_{Y,X} = id_{Y \otimes X}$$

Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité est appelée une <u>$\otimes$-catégorie commutative</u>.

<u>Définition 7.</u>– Deux contraintes de commutativité c et c' d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont dites <u>cohomologues</u> s'il existe un automorphisme fonctoriel φ du foncteur $\otimes : \underline{C} \times \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{c_{X,Y}} & Y \otimes X \\ {\scriptstyle \varphi_{X,Y}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi_{Y,X}} \\ X \otimes Y & \xrightarrow[c'_{X,Y}]{} & Y \otimes X \end{array}$$

<u>Définition 8.</u>– Si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité c, X un objet de $\underline{C}$, on appelle <u>symétrie canonique</u> de $X \otimes X$ l'automorphisme

$$c_X = c_{X,X} : X \otimes X \xrightarrow{\sim} X \otimes X .$$

On dit que la contrainte de commutativité c est <u>stricte</u> si les symétries canoniques sont des identités ; $\underline{C}$ est alors appelée une <u>$\otimes$-catégorie strictement commutative.</u>

<u>Exemple.</u>— Dans l'exemple 5) du (§1, n°2), on vérifie aussitôt qu'il existe des contraintes de commutativité si et seulement si M est commutatif et opère trivialement sur N. Se donner une contrainte de commutativité c revient dans ce cas à se donner une fonction antisymétrique $k : M^2 \longrightarrow N$, la relation entre k et c étant

$$c_{s_1, s_2} = (s_1 s_2 , k(s_1, s_2))$$

Ici le groupe des contraintes de commutativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteur $(s_1, s_2) \longmapsto s_1 s_2$, est isomorphe canoniquement au groupe $\mathrm{Ant}^2(M, N)$ des fonctions antisymétriques $M^2 \longrightarrow N$. Quand on écrit la commutativité du diagramme (5) en y remplaçant X, Y par s_1, s_2 respectivement et en posant

$$\varphi_{s_1, s_2} = (s_1 s_2 , h(s_1, s_2)) , \; h \in C^2(M, N) \text{ étant une 2-cochaîne,}$$

on obtient

$$k = {}^{h}k' + \mathrm{ant}(h)$$

avec

$$\mathrm{ant}(h)\,(s_1, s_2) = h(s_1, s_2) - h(s_2, s_1).$$

Il en résulte que le groupe des classes de cohomologie de contraintes de commutativité dans ce cas s'identifie à $\mathrm{Ant}^2(M,N)/\mathrm{ant}(C^2(M,N))$ où $\mathrm{ant}(C^2(M,N))$ est le groupe des fonctions antisymétriques de la forme $\mathrm{ant}(h)$ avec $h \in C^2(M,N)$.

3. Contraintes d'unité.

Définition 9.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'unité pour $\underline{C}$, ou simplement une unité pour $\underline{C}$ est un triple $(\underline{1}, g, d)$, où $\underline{1}$ est un objet de $\underline{C}$ appelé objet unité et g, d sont des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X \quad , \quad d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

vérifiant la condition

(6) $$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$$

On note encore d l'isomorphisme $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. On peut remarquer que les foncteurs

$$X \longmapsto \underline{1} \otimes X \quad \text{et} \quad X \longmapsto X \otimes \underline{1}$$

sont des équivalences de catégories, d'où l'objet $\underline{1}$ est régulier (§1, n°1, Déf. 2). Une $\otimes$-catégorie munie d'une unité est dite unifère.

Proposition 6.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$. Pour tout objet X de $\underline{C}$, on a les formules

(7) $$g_{\underline{1} \otimes X} = id_{\underline{1}} \otimes g_X \quad , \quad d_{X \otimes \underline{1}} = d_X \otimes id_{\underline{1}}$$

Démonstration.– La naturalité de g, d donne les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_X} & \underline{1}\otimes X \\ {\scriptstyle g_X}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle id_{\underline{1}}\otimes g_X} \\ \underline{1}\otimes X & \xrightarrow[g_{\underline{1}\otimes X}]{} & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{d_X} & X\otimes\underline{1} \\ {\scriptstyle d_X}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle d_X\otimes id_{\underline{1}}} \\ X\otimes\underline{1} & \xrightarrow[d_{X\otimes\underline{1}}]{} & (X\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \end{array}$$

ce qui démontre les formules.

Proposition 7. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\underline{1}, g, d)$; alors le monoïde $\mathrm{End}(\underline{1})$ est commutatif.

Démonstration. — Grâce à l'isomorphisme $\underline{1} \xrightarrow{d} \underline{1}\otimes\underline{1}$, il suffit donc de prouver que $\mathrm{End}(\underline{1}\otimes\underline{1})$ est commutatif. Puisque $\underline{1}$ est régulier (Déf. 9), tout endomorphisme f de $\underline{1}\otimes\underline{1}$ peut s'exprimer

$$f = u\otimes id_{\underline{1}} = id_{\underline{1}}\otimes v \ , \qquad u, v\in \mathrm{End}(\underline{1}) .$$

Si f' est un autre endomorphisme, on a

$$f' = u'\otimes id_{\underline{1}} = id_{\underline{1}}\otimes v' ,$$

d'où

$$ff' = (u\otimes id_{\underline{1}})(id_{\underline{1}}\otimes v') = u\otimes v' = (id_{\underline{1}}\otimes v')(u\otimes id_{\underline{1}}) = f'f .$$

Remarques. — 1) En vertu de la naturalité de g, d et de la relation $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$, on a $u\otimes id_{\underline{1}} = id_{\underline{1}}\otimes u$ pour tout $u\in\mathrm{End}(\underline{1})$.

2) Dans la démonstration ci-dessus, on utilise seulement l'hypothèse que $\underline{1}$ soit régulier et $\underline{1}\simeq\underline{1}\otimes\underline{1}$. Donc la proposition reste valable pour tout objet régulier Z tel que $Z\simeq Z\otimes Z$.

Nous allons maintenant définir deux homomorphismes γ, δ du monoïde $\mathrm{End}(\underline{1})$ dans le monoïde $\mathrm{End}(id_{\underline{C}})$ des morphismes fonctoriels du foncteur identique $id_{\underline{C}}$ de $\underline{C}$, qui nous serviront au chapitre III.

Proposition 8. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\underline{1}, g, d)$. Les applications

$$\gamma_X : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(X) \ , \quad \delta_X : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(X)$$
$$u \longmapsto \gamma_X(u) \qquad\qquad\qquad u\longmapsto \delta_X(u)$$

définies respectivement par les diagrammes commutatifs

$$(8)\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma_X(u)"] \arrow[d, "g_X"'] & X \arrow[d, "g_X"] \\ \underline{1}\otimes X \arrow[r, "u\otimes id_X"'] & \underline{1}\otimes X \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_X(u)"] \arrow[d, "d_X"'] & X \arrow[d, "d_X"] \\ X\otimes\underline{1} \arrow[r, "id_X\otimes u"'] & X\otimes\underline{1} \end{tikzcd}$$

sont des homomorphismes transformant l'élément unité en l'élément unité pour tout objet X de $\underline{C}$.

<u>Démonstration</u>.– La vérification est immédiate. En plus, la naturalité de g, d donne

$$(9)\qquad \gamma_{\underline{1}}(u) = \delta_{\underline{1}}(u) = u$$

<u>Proposition 9</u>.– $(\gamma_X(u))_{X\in Ob\underline{C}}$, $(\delta_X(u))_{X\in Ob\underline{C}}$ sont des morphismes fonctoriels du foncteur identique $id_{\underline{C}}$ de $\underline{C}$.

<u>Démonstration</u>.– Considérons les diagrammes

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] X \arrow[rrr, bend left=30, "\gamma_X(u)"] \arrow[rrr, phantom, bend left=15, "(\mathrm{IV})"] \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes f"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[d, "id\otimes f"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X \arrow[l, "g_X"'] \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[rrr, bend right=30, "\gamma_{X'}(u)"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=15, "(\mathrm{V})"] \arrow[r, "g_{X'}"'] & \underline{1}\otimes X' \arrow[r, "u\otimes id"'] & \underline{1}\otimes X' & X' \arrow[l, "g_{X'}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] X \arrow[rrr, bend left=30, "\delta_X(u)"] \arrow[rrr, phantom, bend left=15, "(\mathrm{IX})"] \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X\otimes\underline{1} \arrow[r, "id\otimes u"] \arrow[d, "f\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & X\otimes\underline{1} \arrow[d, "f\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X \arrow[l, "d_X"'] \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[rrr, bend right=30, "\delta_{X'}(u)"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=15, "(\mathrm{X})"] \arrow[r, "d_{X'}"'] & X'\otimes\underline{1} \arrow[r, "id\otimes u"'] & X'\otimes\underline{1} & X' \arrow[l, "d_{X'}"] \end{tikzcd}$$

où f est une flèche quelconque. Dans ces diagrammes la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) est donnée par la naturalité de g, d ; celle de (II) et (VII) est immédiate en composant les flèches ; enfin celle de (IV), (V), (IX), (X) résulte des diagrammes commutatifs (8). On en déduit la commutativité des circuits extérieurs, ce qui montre la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ et $\delta_X(u)$.

<u>Proposition 10.</u>– Les applications

$$\gamma : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\underline{C}}) \qquad \delta : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\underline{C}})$$
$$u \longmapsto (\gamma_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}} \qquad u \longmapsto (\delta_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}}$$

sont des homomorphismes ~~transformant l'élément unité en l'élément unités~~ de monoïdes

<u>Démonstration.</u>– Résultat immédiat des propositions 8 et 9.

<u>Exemple.</u>– Dans l'exemple 5 du (§1, n° 2), la donnée d'une unité revient à celle d'un couple (ℓ, r) de fonctions $M \to N$ vérifiant la relation $\ell(1) = r(1)$. Dans les diagrammes (8), si on remplace X par S, on trouve

$$\gamma_S(u) = (S, u) \quad , \quad \delta_S(u) = (S, Su)$$

ce qui montre que $\gamma \neq \delta$ en général. Cet exemple montre qu'une $\otimes$-catégorie peut avoir plusieurs unités.

<u>Définition 10.</u>– Soient $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ des unités pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. On appelle <u>morphisme</u> de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g', d')$ un morphisme $\lambda : \underline{1} \to \underline{1}'$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} & \underline{1} \otimes X \arrow[dd, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] \\ X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[dr, "g'_X"'] & \\ & \underline{1}' \otimes X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \otimes \underline{1} \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes \lambda"] \\ X \arrow[ur, "d_X"] \arrow[dr, "d'_X"'] & \\ & X \otimes \underline{1}' \end{tikzcd}$$

pour tout objet X de $\underline{C}$. En faisant $X = \underline{1}$, on voit que λ est un isomorphisme, et que pour $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ donnés, il y a au plus un tel λ.

il y en a 1 et 1 seul ?

§3. Compatibilités entre contraintes.

1. Associativité et commutativité.

<u>Définition 1</u>.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'associativité a et une contrainte de commutativité c pour $\underline{C}$ sont <u>compatibles</u> si pour des objets X, Y, Z de $\underline{C}$, le diagramme suivant est commutatif. (<u>axiome de l'hexagone</u>)

$$\begin{tikzcd}
& (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "c_{X\otimes Y,Z}"] & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[dr, "a_{Z,X,Y}"] & \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "id_X\otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z\otimes X)\otimes Y \\
& X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "a_{X,Z,Y}"'] & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z}\otimes id_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Un couple (a, c) vérifiant l'axiome de l'hexagone est appelé une <u>contrainte mixte d'associativité – commutativité</u>, ou plus simplement une <u>contrainte AC</u> pour la catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC est appelée une <u>$\otimes$-catégorie AC</u>. Elle est dite <u>stricte</u> si c l'est (§2, n°2, Déf. 8).

<u>Définition 2</u>.– Deux contraintes AC (a, c) et (a', c') pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont dites <u>cohomologues</u> s'il existe un automorphisme fonctoriel φ du foncteur $\otimes : \underline{C}\times\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ tel que les diagrammes (1) du (§2, n°1) et (5) du (§2, n°2) soient commutatifs.

Ici, pour avoir une proposition analogue à (§2, n°1, Prop. 5), nous allons reprendre les notions de produit et produit canonique d'une famille d'objets de $\underline{C}$ $(X_i)_{i\in I}$ relativement à un ordre donné dans I. Comme nous possédons maintenant, en plus de la contrainte d'associativité, la contrainte de commutativité, nous allons donc introduire la notion de produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$. Dans ce qui suit de ce n°, on considère une famille d'objets $(X_i)_{i\in J}$ d'une $\otimes$-catégorie AC $\underline{C}$, indexée par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$. Les ensembles $I \subset J$ considérés sont supposés finis, non vides. On appelle <u>ordre canonique</u> de I l'ordre induit. Donc si

I possède p éléments, I a $p!-1$ ordres autres que l'ordre canonique.

Définition 3.– Un produit de $(X_i)_{i\in I}$ est le produit de $(X_i)_{i\in I}$ relativement à un ordre quelconque de I

Exemple.– Soit $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ avec l'ordre canonique $\alpha < \beta < \gamma$. En dehors de cet ordre, I possède cinq autres ordres. Donc on a 12 produits de $(X_i)_{i\in I}$ qui sont

$$
\begin{array}{lll}
(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma & (X_\beta \otimes X_\gamma) \otimes X_\alpha & (X_\gamma \otimes X_\alpha) \otimes X_\beta \\
(X_\beta \otimes X_\alpha) \otimes X_\gamma & (X_\gamma \otimes X_\beta) \otimes X_\alpha & (X_\alpha \otimes X_\gamma) \otimes X_\beta \\
X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma) & X_\beta \otimes (X_\gamma \otimes X_\alpha) & X_\gamma \otimes (X_\alpha \otimes X_\beta) \\
X_\beta \otimes (X_\alpha \otimes X_\gamma) & X_\gamma \otimes (X_\beta \otimes X_\alpha) & X_\alpha \otimes (X_\gamma \otimes X_\beta)
\end{array}
$$

Nous notons toujours par $\underset{I}{\otimes} X_i$ le produit canonique de $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre canonique.

Définition 4.– Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les X_i, $i \in I$

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow[\sim]{\Psi_{I_1,I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)$$

par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Notons β le plus grand élément de I.

1° $I = \{\alpha, \beta\}$.

1er cas $\beta \in I_2$, alors

(1) $$\Psi_{I_1,I_2} : \underset{I}{\otimes} X_i = X_\alpha \otimes X_\beta$$

est l'identité.

2e cas $\beta \in I_1$, alors

(2) $$\Psi_{I_1,I_2} = c_{X_\alpha, X_\beta} : \underset{I}{\otimes} X_i = X_\alpha \otimes X_\beta \longrightarrow (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) = X_\beta \otimes X_\alpha$$

est la contrainte de commutativité c_{X_α, X_β}.

2° I a $p > 2$ éléments

<u>1er cas</u> $\beta \in I_2$

a) $I_2 = \{\beta\}$, alors

(3) $$\Psi_{I_1, I_2} : \bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes X_\beta$$

est l'identité.

b) I_2 a plus d'un élément, alors Ψ_{I_1, I_2} est défini par le diagramme commutatif suivant

(4) $$\begin{tikzcd} \bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I'_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\ \bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I'_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I_1,I'_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I'_2} X_i)) \otimes X_\beta \end{tikzcd}$$

où I'_2 est l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_2.

<u>2e cas</u> $\beta \in I_1$

a) $I_1 = \{\beta\}$, alors

(5) $$\Psi_{I_1, I_2} = c_{\bigotimes_{I_2} X_i, X_\beta} : \bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta \longrightarrow X_\beta \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)$$

est la contrainte de commutativité $c_{\bigotimes_{I_2} X_i, X_\beta}$.

b) I_1 a plus d'un élément, alors Ψ_{I_1, I_2} est défini par le diagramme commutatif suivant

(6) $$\begin{tikzcd} \bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[dddd, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, equal] & ((\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes X_\beta) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \\ & & (\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes (X_\beta \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[u, "a"] \arrow[d, "id \otimes c"] \\ & & (\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\ & & \\ \bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I'_1 \amalg I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I'_1,I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta \end{tikzcd}$$

où I'_1 est l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_1.

<u>Proposition 1</u>.– Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles non vides de I tels qu'on ait $I = I_1 \amalg I_2$, le diagramme suivant est commutatif

$$(7)\qquad \begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la symétrie de I_1, I_2 dans (7) on peut toujours supposer le plus grand élément β de I appartenant à I_1 pour fixer les idées. Pour démontrer la commutativité de (7) nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de I. D'abord remarquons que pour $I_1 = \{\beta\}$, le diagramme (7) devient

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & X_\beta \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

compte tenu des relations (3) et (5). Ce diagramme est évidemment commutatif, en particulier pour $I = \{\alpha, \beta\}$.

Supposons la commutativité de (7) pour les ensembles I ayant $p-1 \geqslant 2$ éléments, nous allons la montrer pour les ensembles I ayant p élément. Pour cela considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I'_1 \amalg I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I_2,I'_1} \otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I'_1} X_i)) \otimes X_\beta & \\
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I'_1 \amalg I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I'_1,I_2} \otimes id"] \arrow[ddd, equal] \arrow[dddr, phantom, "(\mathrm{II})"] & ((\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta \arrow[u, "c \otimes id"'] & \\
 & (\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[u, "a"'] & \\
 & (\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes (X_\beta \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[u, "id \otimes c"'] \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & {} \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = ((\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes X_\beta) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] & \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i) = (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I'_1} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[uuuuu, bend right, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

où I'_1 est l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_1. Dans ce diagramme la région (I) est commutative par hypothèse de récurrence ; (II) par définition de Ψ_{I_1, I_2}. (diag. (6)) ; (IV) par l'axiome de l'hexagone ; et enfin le circuit extérieur par définition de Ψ_{I_2, I_1} (diag (4)). On en déduit la commutativité de (III), d'où l'assertion.

Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ nous allons considérer les diagrammes suivants.

(8)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

(9)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_1, I_3}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \amalg I_1, I_3}"] & (\bigotimes_{I_2 \amalg I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

(10)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3 \amalg I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3 \amalg I_2} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_3, I_2}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_3, I_2}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)
\end{tikzcd}$$

(11)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3, I_1 \amalg I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_1, I_2}"] & (\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3 \amalg I_1, I_2}"] & (\bigotimes_{I_3 \amalg I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_3, I_1} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)
\end{tikzcd}$$

$$(12)\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_3 \amalg I_1}"] \arrow[d, equal] & \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3 \amalg I_1} X_i\right) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_3, I_1}"] & \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right)\right) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \amalg I_3,\, I_1}"] & \left(\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_3} \otimes id"] & \left(\left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right)\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right)
\end{tikzcd}$$

$$(13)\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3,\, I_2 \amalg I_1}"] \arrow[d, equal] & \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_2 \amalg I_1} X_i\right) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_1}"] & \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \otimes \left(\left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right)\right) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3 \amalg I_2,\, I_1}"] & \left(\bigotimes_{I_3 \amalg I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \arrow[r, "\Psi_{I_3, I_2} \otimes id"] & \left(\left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right)\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right)
\end{tikzcd}$$

<u>Lemme</u>. — Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) les diagrammes (8) et (9) sont commutatifs.

b) les diagrammes (10) et (11) sont commutatifs.

c) les diagrammes (12) et (13) sont commutatifs.

<u>Démonstration</u>. — a) $\Rightarrow$ b). Considérons le diagramme suivant

$$(14)\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,\, I_3 \amalg I_2}"] \arrow[d, equal] & \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3 \amalg I_2} X_i\right) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_3, I_2}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \otimes \left(\left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right)\right) \arrow[d, "a"] \arrow[ddddd, bend left=60, "id \otimes c"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_3,\, I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \left(\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3} \otimes id"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \left(\left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right)\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_1 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i\right) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_1, I_3}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right)\right) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift left=10ex, "(\mathrm{VIII})"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \amalg I_1,\, I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \left(\bigotimes_{I_2 \amalg I_1} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1} \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & \left(\left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right)\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2,\, I_3}"] \arrow[d, equal] & \left(\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] \arrow[u, "id \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \left(\left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_2} X_i\right)\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right) \arrow[u, "c \otimes id"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,\, I_2 \amalg I_3}"] & \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i\right) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & \left(\bigotimes_{I_1} X_i\right) \otimes \left(\left(\bigotimes_{I_2} X_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I_3} X_i\right)\right) \arrow[u, "a"]
\end{tikzcd}$$

où la commutativité des régions (II), (VI) et du contour extérieur découle de la proposition 1 ; celle de (III) vient de la naturalité de c ; celle de (IV), (VII) est donnée par l'hypothèse ; celle de (V) est évidente ; enfin celle de (VIII) résulte de l'axiome de l'hexagone. D'où la commutativité de la région (I) qui est le diagramme (10). Dans le diagramme (14), si on remplace I_2 par I_3 et I_3 par I_2, on obtient la commutativité de (11).

b) $\Rightarrow$ c). Il suffit de remplacer dans (14) I_1, I_2, I_3 respectivement par I_3, I_1, I_2, puis par I_3, I_2, I_1.

c) $\Rightarrow$ a). On remplace dans (14) I_1, I_2, I_3 respectivement par I_2, I_3, I_1, puis par I_2, I_1, I_3.

<u>Proposition 2</u>.— Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$, le diagramme (8) est commutatif.

<u>Démonstration</u>.— Soit β le plus grand élément de I. D'après le lemme précédent, pour démontrer la commutativité de (8), on peut toujours supposer $\beta \in I_3$. D'abord remarquons que pour $I_3 = \{\beta\}$ le diagramme (8) devient

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[rr, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg \{\beta\}}"] \arrow[d, equal] & & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg \{\beta\}} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[rr, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] & & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif par définition de Ψ (diag. (4)) pour tout I non vide, en particulier pour I se composant de trois éléments. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de I. L'assertion est vraie pour les ensembles I ayant trois éléments. Supposons la commutativité de (8) pour les ensembles I ayant $p-1 \geqslant 3$ éléments, nous allons la démontrer pour les ensembles I ayant p éléments. Cela revient à prouver la commutativité de la région (IV) du diagramme suivant où I'_3 désigne l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_3 (I_3 est supposé évidemment avoir plus d'un élément):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg I'_3} \otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \big((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2 \amalg I'_3}{\otimes} X_i)\big) \otimes X_\beta \arrow[r, "(id \otimes \Psi_{I_2, I'_3}) \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \big((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes ((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I'_3}{\otimes} X_i))\big) \otimes X_\beta \arrow[dddd, bend left=60, "a \otimes id"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes \big((\underset{I_2 \amalg I'_3}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[u, "a"'] \arrow[r, "id \otimes (\Psi_{I_2, I'_3} \otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes \big(((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I'_3}{\otimes} X_i)) \otimes X_\beta\big) \arrow[u, "a"'] \arrow[dd, phantom, "(\mathrm{VII})"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes \big((\underset{I_2 \amalg I'_3}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes \big((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes ((\underset{I'_3}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta)\big) \arrow[u, "id \otimes a"'] \arrow[d, "a"'] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\underset{I_1 \amalg I_2}{\otimes} X_i) \otimes \big((\underset{I'_3}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & \big((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)\big) \otimes \big((\underset{I'_3}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[d, "a"'] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2, I'_3} \otimes id"] & \big((\underset{I_1 \amalg I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I'_3}{\otimes} X_i)\big) \otimes X_\beta \arrow[r, "(\Psi_{I_1, I_2} \otimes id) \otimes id"] & \big(((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \otimes (\underset{I'_3}{\otimes} X_i)\big) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme la commutativité des régions (I), (III), (V) résulte de la définition de Ψ (diag. (4)) ; celle de (II), (VI) résulte de la naturalité de a ; celle de (VII) résulte de l'axiome du pentagone ; enfin celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de (IV).

<u>Proposition 3</u>.– Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ est isomorphe au produit canonique $\underset{I}{\otimes} X_i$ relativement à l'ordre canonique par un isomorphisme

$$y : \underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} Y \qquad ;$$

fonctoriel en les X_i.

<u>Démonstration</u>.– Nous allons construire y par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Pour $I = \{\beta\}$ l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_\beta$. Pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$, l'isomorphisme y est défini comme le composé des isomorphismes

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1,I_2}} (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \xrightarrow{z \otimes t} Z \otimes T$$

où z et t sont des isomorphismes donnés par l'hypothèse de récurrence. L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé l'isomorphisme canonique.

Nous allons maintenant énoncer des propositions dont la démonstration est analogue à celle dans (§2, n° 1, Prop. 3, 4 et 5)

Proposition 4.– Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$; et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$, $(X_i)_{i \in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme suivant est commutatif, b et b' étant les isomorphismes canoniques définis dans la prop. 3

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_I X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\ \bigotimes_I X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T \end{tikzcd}$$

Proposition 5.– Soient I_1, I_2 des sous-ensembles non vides de I, tels que $I = I_1 \amalg I_2$; et soient Y, Z des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$ respectivement. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_I X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \otimes Z \arrow[d, "c"] \\ \bigotimes_I X_i \arrow[r, "f'"] & Z \otimes Y \end{tikzcd}$$

est commutatif, f et f' étant les isomorphismes canoniques.

Proposition 6.– Soient Y_1, Y_2 des produit de $(X_i)_{i \in I}$ et $\mu : Y_1 \to Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de a, a^{-1}, c, c^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_I X_i \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "\mu"] \\ \bigotimes_I X_i \arrow[r, "b_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

où b_1, b_2 sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.

<u>Proposition 7.</u> — Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des produits de $(X_i)_{i\in I}$, $\mu_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ et $\mu_{n1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de a, a^{-1}, c, c^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[dr] & \\
Y_n \arrow[ur] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\cdot \arrow[u] & & & \cdot \arrow[dl] \\
& \cdot \arrow[ul] & \cdot \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

<u>Exemple.</u> — Le polygone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "id \otimes c"'] & (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[d, "c \otimes id"] \\
(X_1 \otimes X_2) \otimes ((X_4 \otimes X_5) \otimes X_3) \arrow[d, "a"'] & ((X_4 \otimes X_5) \otimes X_3) \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[d, "a^{-1}"] \\
((X_1 \otimes X_2) \otimes (X_4 \otimes X_5)) \otimes X_3 \arrow[d, "c \otimes id"'] & (X_4 \otimes X_5) \otimes (X_3 \otimes (X_1 \otimes X_2)) \arrow[d, "id \otimes c"] \\
((X_4 \otimes X_5) \otimes (X_1 \otimes X_2)) \otimes X_3 \arrow[r, "a^{-1}"] & (X_4 \otimes X_5) \otimes ((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3)
\end{tikzcd}$$

<u>Remarque.</u> — Supposons $X_1 = X_4 = X$ et $X_2 = X_5 = Y$ dans le polygone ci-dessus. Alors si on remplace la flèche $c_{X\otimes Y} \otimes id$ par l'identité $id_{X\otimes Y} \otimes id_{X_3}$, alors le polygone n'est plus commutatif sauf dans le cas où la catégorie $\underline{C}$ est stricte. Donc quand on est dans une $\otimes$-catégorie AC non stricte et on a affaire avec un polygone du genre dans l'exemple, dont les sommets sont des produits d'objets non différents, il nous faut penser à les numéroter pour ne pas faire gaffe.

2. Associativité et unité.

Définition 5. – Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité a et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ pour $\underline{C}$ sont compatibles, si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\underline{C}$ les triangles suivants

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] \underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[rr, "a"] & & (\underline{1}\otimes X)\otimes Y \\ & X\otimes Y \arrow[ul, "g_{X\otimes Y}"] \arrow[ur, swap, "g_X \otimes id_Y"] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=tiny] X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes \underline{1})\otimes Y \\ & X\otimes Y \arrow[ul, "id_X\otimes g_Y"] \arrow[ur, swap, "d_X\otimes id_Y"] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=tiny] X\otimes(Y\otimes \underline{1}) \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes Y)\otimes \underline{1} \\ & X\otimes Y \arrow[ul, "id_X\otimes d_Y"] \arrow[ur, swap, "d_{X\otimes Y}"] & \end{tikzcd}$$

(15) (16) (17)

sont commutatifs.

Un couple comme ci-dessus est appelé une contrainte mixte d'associativité-unité, ou plus simplement une contrainte AU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU est appelée une $\otimes$-catégorie AU.

Nous allons voir que ces conditions de compatibilité sont surabondantes.

Proposition 8. – Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) (16) est commutatif.

b) (15) et (17) sont commutatifs.

c) Les diagrammes suivants sont commutatifs pour tout X de $\underline{C}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[rr, "a"] & & (\underline{1}\otimes \underline{1})\otimes X \\ & \underline{1}\otimes X \arrow[ul, "g_{\underline{1}\otimes X}"] \arrow[ur, swap, "g_{\underline{1}}\otimes id_X"] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=tiny] X\otimes(\underline{1}\otimes \underline{1}) \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes \underline{1})\otimes \underline{1} \\ & X\otimes \underline{1} \arrow[ul, "id_X\otimes d_{\underline{1}}"] \arrow[ur, swap, "d_{X\otimes \underline{1}}"] & \end{tikzcd}$$

(15′) (17′)

Démonstration. – b) $\Rightarrow$ c). Evident.

c) $\Rightarrow$ a). Considérons les diagrammes suivants

(18)
$$\begin{tikzcd}
(X\otimes\underline{1})\otimes Y \arrow[r, "(id_X\otimes g_{\underline{1}})\otimes id_Y"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & (X\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}))\otimes Y \arrow[dddd, bend left=60, "a\otimes id_Y"] \\
X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_X\otimes(g_{\underline{1}}\otimes id_Y)"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & X\otimes((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes Y) \arrow[u, "a"'] \\
X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[r, "id_X\otimes g_{\underline{1}\otimes Y}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X\otimes(\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes Y)) \arrow[u, "id_X\otimes a"'] \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & {} \\
X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[r, "d_X\otimes id_{\underline{1}\otimes Y}"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (X\otimes\underline{1})\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(X\otimes\underline{1})\otimes Y \arrow[r, "(d_X\otimes id_{\underline{1}})\otimes id_Y"] & ((X\otimes\underline{1})\otimes\underline{1})\otimes Y
\end{tikzcd}$$

(19)
$$\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "id_X\otimes g_Y"] \arrow[d, "id_X\otimes g_Y"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[d, "id_X\otimes g_{\underline{1}\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=60, "a"] \\
X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[r, "id_X\otimes g_{\underline{1}\otimes Y}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & X\otimes(\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes Y)) \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IX})"] & {} \\
X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[r, "d_X\otimes id_{\underline{1}\otimes Y}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (X\otimes\underline{1})\otimes(\underline{1}\otimes Y) \\
X\otimes Y \arrow[u, "id_X\otimes g_Y"] \arrow[r, "d_X\otimes id_Y"] & (X\otimes\underline{1})\otimes Y \arrow[u, "id_{X\otimes\underline{1}}\otimes g_Y"']
\end{tikzcd}$$

où la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la fonctorialité de a et il en est de même de celle de (IX) si on remarque qu'on a $g_{\underline{1}\otimes Y} = id_{\underline{1}}\otimes g_Y$ (§2, n°3, For. (7)) ; celle de (II) et du circuit extérieur de (18) est donnée par l'hypothèse en tenant compte des relations $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$, $d_X\otimes id_{\underline{1}} = d_{X\otimes\underline{1}}$ (§2, n°3, For. (6) et (7)) ; celle de (V) résulte de l'axiome du pentagone ; celle de (VI), (VIII) est évidente. On en déduit la commutativité de (III) et par conséquent celle de (VII). D'où la commutativité du circuit extérieur de (19).

a) ⇒ b). Considérons les diagrammes ci-dessous dont la commutativité de régions (I), (IV), (VII), (IX) découle de la naturalité de a ; celle de (III), (VIII) et des circuits extérieurs résulte de l'hypothèse ; et enfin celle de (V), (X) vient de l'axiome du pentagone. On en déduit la commutativité de (II) et (VI) et par conséquent celle de (15) et (17) puisque $\underline{1}$ est régulier (§1, n°1, Déf. 2).

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\underline{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "(id_{\underline{1}}\otimes g_X)\otimes id_Y"] & (\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X))\otimes Y \arrow[dddd, bend left=60, "a\otimes id_Y"] \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_{\underline{1}}\otimes(g_X\otimes id_Y)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(I)}"] & \underline{1}\otimes((\underline{1}\otimes X)\otimes Y) \arrow[u, "a"'] \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[u, equal] \arrow[r, "id_{\underline{1}}\otimes g_{X\otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes(X\otimes Y)) \arrow[u, "id_{\underline{1}}\otimes a"'] \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(V)}"] & {} \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[u, equal] \arrow[r, "d_{\underline{1}}\otimes id_{X\otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(III)}"] \arrow[d, "a"] & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(\underline{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "(d_{\underline{1}}\otimes id_X)\otimes id_Y"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & ((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X)\otimes Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(X\otimes Y)\otimes\underline{1} \arrow[r, "d_{X\otimes Y}\otimes id_{\underline{1}}"] & ((X\otimes Y)\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \\
(X\otimes Y)\otimes\underline{1} \arrow[u, equal] \arrow[r, "(id_X\otimes d_Y)\otimes id_{\underline{1}}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & (X\otimes(Y\otimes\underline{1}))\otimes\underline{1} \arrow[u, "a\otimes id_{\underline{1}}"'] \\
X\otimes(Y\otimes\underline{1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_X\otimes(d_Y\otimes id_{\underline{1}})"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & X\otimes((Y\otimes\underline{1})\otimes\underline{1}) \arrow[u, "a"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(X)}"] & {} \\
X\otimes(Y\otimes\underline{1}) \arrow[u, equal] \arrow[r, "id_X\otimes(id_Y\otimes g_{\underline{1}})"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] \arrow[d, "a"] & X\otimes(Y\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1})) \arrow[u, "id\otimes a"'] \arrow[d, "a"] \\
(X\otimes Y)\otimes\underline{1} \arrow[r, "(id_X\otimes id_Y)\otimes g_{\underline{1}}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(IX)}"] & (X\otimes Y)\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[uuuu, bend right=60, "a"']
\end{tikzcd}$$

Soit toujours $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AU avec $(a, (\underline{1}, g, d))$ comme contrainte AU. De façon analogue à (§2, n°1), nous considérons une J pour l'ordre ≠ P ? famille d'objets $(X_i)_{i\in J}$ de $\underline{C}$, indexée par un ensemble totalement ordonné $(J, <)$ et nous supposons qu'il existe des $i \in J$ tels que ?? $X_i = \underline{1}$. Pour chaque ensemble fini $I \subset J$ totalement ordonné par l'ordre induit (ici I peut être l'ensemble vide), nous définissons comme dans (§2 n°1) le produit canonique et les produits de $(X_i)_{i\in I}$ à la seule différence qu'ici on pose

$$(20) \qquad \bigotimes_{\emptyset} X_i = \underline{1}$$

quand I est l'ensemble vide.

<u>Définition 6.</u> — Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \amalg I_2$ et que la relation $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$ implique la relation $i_1 < i_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les X_i, $i \in I$,

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\phi_{I_1, I_2}} (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)$$

de la manière suivante :

1° Si $I_1 = \emptyset$, alors

(21) $$\phi_{I_1, I_2} = g_{\bigotimes_I X_i}$$

2° Si $I_2 = \emptyset$, alors

(22) $$\phi_{I_1, I_2} = d_{\bigotimes_I X_i}$$

3° Si $I_2 = \{\beta\}$, alors

(23) $$\phi_{I_1, I_2} = id_{\bigotimes_I X_i}$$

4° Si I_2 a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I_2' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_2, alors ϕ_{I_1, I_2} est défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I_2 par le diagramme commutatif suivant

(24) $$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
(\bigotimes_{I_1 \amalg I_2'} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2'} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2'} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 9.</u> — Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et que la relation $\alpha \in I_j$, $\alpha' \in I_{j'}$, $(1 \leq j < j' \leq 3)$ implique $\alpha < \alpha'$, le diagramme suivant est commutatif

(25) $$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>. — 1° I_1, I_2, I_3 sont différents de l'ensemble vide. Alors on est dans le cas de (§2, n°1, Prop. 1).

2° $I_1 = \emptyset$. Alors (25) devient le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "g_{\otimes X_i}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\phi_{I_2,I_3}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "(\mathrm{I})"] & \underline{1} \otimes (\bigotimes_I X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2,I_3}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1} \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "(\mathrm{III})"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_2,I_3}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "g_{\otimes_{I_2} X_i} \otimes id"] \arrow[ur, "g"] & (\underline{1} \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (20) et (21). Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) est évidente ; celle de (II) résulte de la naturalité de g ; et enfin celle de (III) vient de la compatibilité de a avec $(1, g, d)$ (diag. ...). D'où la commutativité du circuit extérieur.

3° $I_2 = \emptyset$. Alors (25) est le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes g_{\otimes_{I_3} X_i}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\underline{1} \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "d_{\otimes_{I_1} X_i} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes \underline{1}) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (20), (21), (22). Ici la commutativité est évidente en vertu de (16).

4° $I_3 = \emptyset$. Alors (25) est le circuit extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "d_{\otimes_I X_i}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "(\mathrm{I})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "id \otimes d_{\otimes_{I_2} X_i}"] \arrow[dr, "d_{(\otimes_{I_1} X_i) \otimes (\otimes_{I_2} X_i)}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes \underline{1}) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "(\mathrm{III})"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "d_{\otimes_{I_1 \sqcup I_2} X_i}"] & (\bigotimes_{I_1 \sqcup I_2} X_i) \otimes \underline{1} \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (20), (22). Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) est évidente ; celle de (II) découle de la fonctorialité de d ; et enfin celle de (III) résulte de la compatibilité de a avec $(1, g, d)$ (diag. (17)). D'où la commutativité du circuit extérieur.

Proposition 10.– Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[rr, equal] \arrow[d, equal] & & \bigotimes_I X_i \arrow[d, "g_{\otimes_I X_i}"'] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{\emptyset,I}"] & (\bigotimes_\emptyset X_i)\otimes(\bigotimes_I X_i) = \underline{1}\otimes(\bigotimes_I X_i) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[rr, equal] \arrow[d, equal] & & \bigotimes_I X_i \arrow[d, "d_{\otimes_I X_i}"'] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I,\emptyset}"] & (\bigotimes_I X_i)\otimes(\bigotimes_\emptyset X_i) = (\bigotimes_I X_i)\otimes\underline{1} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration.– On a la commutativité de ces diagrammes en vertu de (20), (21), (22).

Proposition 11.– Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique $\bigotimes_{I'} X_i$ par un isomorphisme

$$y : \bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les X_i, $i\in I'$, I' étant le sous-ensemble de I se composant des éléments $i\in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Démonstration.– 1° Pour $I=\{\beta\}$; on a $I'=I$ pour $X_\beta\neq\underline{1}$ et $I'=\emptyset$ pour $X_\beta=\underline{1}$. Dans les deux cas on pose

$$y = id_{X_\beta}$$

2° Pour I ayant $p>1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y=Z\otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$ et $i_1<i_2$ pour $i_1\in I_1$, $i_2\in I_2$, on on définit l'isomorphisme y comme le composé des isomorphismes

$$\bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\phi_{I'_1,I'_2}} (\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I'_2} X_i) \xrightarrow{z\otimes t} Z\otimes T = Y$$

z et t étant les isomorphismes définis par l'hypothèse de récurrence.

3° Pour $I=\emptyset$, on a $Y=\underline{1}$ et $\bigotimes_{I'} X_i = \underline{1}$. Dans ce cas on pose

$$y = id_{\underline{1}}$$

L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé l'isomorphisme canonique.

Ici nous avons aussi les propositions dont la démonstration est comme celle dans (§2, n°1).

Proposition 12.– Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$; et soient $\mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \mathbb{T}$ des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, $(X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{I'} X_i & \xrightarrow{b} & Y \otimes (Z \otimes T) \\ \| & & \downarrow a \\ \bigotimes_{I'} X_i & \xrightarrow{b'} & (Y \otimes Z) \otimes T \end{array}$$

est commutatif ; b et b' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments i de I tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 13.– Soit Y un produit d'une famille non vide $(X_i)_{i\in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{I'} X_i & \xrightarrow{y} & Y \\ \| & & \downarrow g_Y \\ \bigotimes_{I'} X_i & \xrightarrow{y'} & \underline{1} \otimes Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bigotimes_{I'} X_i & \xrightarrow{y'} & Y \\ \| & & \downarrow d_Y \\ \bigotimes_{I'} X_i & \xrightarrow{y''} & Y \otimes \underline{1} \end{array}$$

y, y', y'' étant les isomorphismes canoniques ; I' l'ensemble des éléments i de I tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 14.– Soient Y_1, Y_2 des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement où $I_1 \subset I_2$ et $X_i = \underline{1}$ pour $i \in I_2 - I_1$. Soit $v : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités ~~et~~ de la loi $\otimes$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{I'_1} X_i & \xrightarrow{y_1} & Y_1 \\ \| & & \downarrow v \\ \bigotimes_{I'_2} X_i & \xrightarrow{y_2} & Y_2 \end{array}$$

est commutatif ; y_1, y_2 étant les isomorphismes canoniques ; I'_1 l'ensemble des $i \in I_1$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 15.– Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, ... $(X_i)_{i\in I_n}$ respectivement et tels que

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow[\sim]{y_j} Y_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

I étant l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$, ce qui veut dire que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même pour $j = 1, 2, \dots, n$; et y_j l'isomorphisme canonique. Soient $r_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ et $r_{n1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "r_{12}"] & Y_2 \arrow[dr, "r_{23}"] & \\
Y_n \arrow[ur, "r_{n1}"] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\cdot \arrow[u] & & & \cdot \arrow[dl] \\
 & \cdot \arrow[ul] & \cdot \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

<u>Exemples</u>. — 1) le polygone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & (X\otimes\underline{1})\otimes(\underline{1}\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "id\otimes g^{-1}_{Y\otimes Z}"] & \\
((X\otimes\underline{1})\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "(d_X\otimes id)\otimes id"'] & & (X\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "a^{-1}"] \\
(X\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dr, "d_X\otimes id"'] & & X\otimes(\underline{1}\otimes(Y\otimes Z)). \\
 & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "id\otimes g_{Y\otimes Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

2) Reprenons l'exemple 5) du (§1, n°2). Se donner une contrainte d'associativité a et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ dans ce cas revient à se donner respectivement un 3-cocycle f de M à valeurs dans le M-module N (§2, n°1, Ex.) et un couple (l, r) de fonctions $M \to N$ vérifiant $l(1) = r(1)$ (§2, n°3, Ex.), les relations entre a et f, (g,d) et (l, r) étant :

$$a_{s_1, s_2, s_3} = (s_1 s_2 s_3, f(s_1, s_2, s_3))$$
$$g_s = (s, \ell(s))$$
$$d_s = (s, r(s))$$

Nous supposons ici, pour simplifier le problème, que f est un 3-cocycle normalisé, i.e. $f(1, s_2, s_3) = f(s_1, 1, s_3) = f(s_1, s_2, 1) = 0$. Ecrivons les conditions de compatibilité (15′) et (17′) (Prop. 8), nous obtenons

$$(26) \qquad \begin{aligned} \ell(s) &= \ell(1) \\ r(s) &= s\,\ell(1) \end{aligned}$$

compte tenu de la normalisation de f et de la relation $\ell(1) = r(1)$. Donc ici une contrainte d'unité est bien déterminée par un élément $\ell(1) = u \in N$, i.e bien déterminée par la donnée d'un morphisme $(1, u)$. Prenons un autre morphisme $(1, u')$ qui donne d'après (26) un autre couple (ℓ', r') de fonctions $M \to N$

$$\ell'(s) = u'$$
$$r'(s) = s u'$$

Il existe manifestement un isomorphisme $\lambda = (1, u'-u)$ entre les unités correspondant à (ℓ, r) et (ℓ', r'). (§2, n°3, Déf. 10). On peut se demander ici s'il y a toujours un morphisme entre deux unités d'une $\otimes$-catégorie. Pour répondre à cette question, reprenons l'exemple dans (§2, n°3). Dans ce cas, la donnée d'une unité revient à celle d'un couple (ℓ, r) de fonctions $M \to N$ vérifiant $\ell(1) = r(1)$; celle d'un morphisme entre les unités correspondant à (ℓ, r), (ℓ', r') revient à donner un élément $v \in N$ vérifiant

$$\ell'(s) = \ell(s) + v$$
$$r'(s) = r(s) + s v$$

pour tout $s \in M$, ce qui n'a pas lieu en général pour (ℓ, r), (ℓ', r') arbitraires. Nous allons montrer ci-dessous qu'il existe toujours un morphisme entre deux unités d'une $\otimes$-catégorie associative. Précisons qu'il s'agit des unités compatibles avec la contrainte d'associativité.

<u>Proposition 16</u>.– Soient $(a, (\underline{1}, g, d))$ et $(a, (\underline{1}', g', d'))$ deux contraintes AU pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Alors il existe un morphisme unique λ qui est un isomorphisme de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g', d')$.

<u>Démonstration</u>.– S'il existe un morphisme $\lambda : (\underline{1}, g, d) \longrightarrow (\underline{1}', g', d')$, λ est bien unique et est un isomorphisme (§2, n° 3, Déf. 10). Montrons donc l'existence de λ. Pour cela considérons les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd} & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[d, "g'_{\underline{1}} g^{-1}_{\underline{1}}"] \\ \underline{1} \arrow[ur, "g_{\underline{1}}"] \arrow[r, "g'_{\underline{1}}"'] & \underline{1}'\otimes\underline{1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[d, "d'_{\underline{1}} d^{-1}_{\underline{1}}"] \\ \underline{1} \arrow[ur, "d_{\underline{1}}"] \arrow[r, "d'_{\underline{1}}"'] & \underline{1}\otimes\underline{1}' \end{tikzcd}$$

Puisque $\underline{1}$ est régulier, alors il existe deux isomorphismes

$$\lambda, \lambda' : \underline{1} \longrightarrow \underline{1}'$$

tels que

(27) $$\lambda \otimes id_{\underline{1}} = g'_{\underline{1}} g^{-1}_{\underline{1}} \quad ; \quad id_{\underline{1}} \otimes \lambda' = d'_{\underline{1}} d^{-1}_{\underline{1}} .$$

Montrons $\lambda = \lambda'$. Dans ce but, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[dl, "id\otimes g_{\underline{1}}"'] \arrow[dr, "id\otimes g'_{\underline{1}}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & \\ \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[rr, "id\otimes(\lambda\otimes id)"] \arrow[d, "a"'] & (\mathrm{II}) & \underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"] \\ (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \arrow[rr, "(id\otimes\lambda')\otimes id"] & (\mathrm{III}) & (\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes\underline{1} \\ & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[ul, "d_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[ur, "d'_{\underline{1}}\otimes id"'] & \end{tikzcd}$$

dont la commutativité de (I), (III) résulte de (27) ; celle du contour extérieur vient de la condition de la compatibilité (16). D'où la commutativité de (II), ce qui donne $(id\otimes\lambda)\otimes id = (id\otimes\lambda')\otimes id$ en vertu de la fonctorialité de a, et par conséquent $\lambda = \lambda'$ puisque $\underline{1}$ est régulier. Il nous reste à prouver que λ est un morphisme de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g, d)$. Il suffit de montrer que pour tout objet X de $\underline{C}$, le triangle

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}\otimes X \arrow[d, "\lambda\otimes id"] \\
X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[r, "g'_X"'] & \underline{1}'\otimes X
\end{tikzcd}$$

est commutatif, la preuve de l'assertion analogue pour d_X, d'_X étant semblable. Ce triangle est la région (I) (à facteur $\underline{1}$ près) du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes(\lambda\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X \arrow[d, "((id\otimes\lambda)\otimes id)"] & \\
\underline{1}\otimes X \arrow[ur, "id\otimes g_X"] \arrow[dr, "id\otimes g'_X"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & {} & {} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[ul, "d_{\underline{1}}\otimes id"'] \arrow[dl, "d'_{\underline{1}}\otimes id"] \\
 & \underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes X) \arrow[r, "a"] & (\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes X &
\end{tikzcd}$$

dont la région (II) est commutative par naturalité de a, (III) par (27) et l'égalité $\lambda = \lambda'$, et enfin le circuit extérieur par la condition de compatibilité (16). D'où la commutativité de (I).

Les formules suivantes nous seront utiles au chapitre II.

<u>Proposition 17</u>. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AU et soit $(a, (\underline{1}, g, d))$ sa contrainte AU. On a les formules suivantes (§2, n° 3, Prop. 8) où $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$

(28) $$\gamma_{X\otimes Y}(u) = \gamma_X(u)\otimes id_Y$$

(29) $$\delta_{X\otimes Y}(u) = id_X \otimes \delta_Y(u)$$

(30) $$\delta_X(u)\otimes id_Y = id_X\otimes\gamma_Y(u)$$

<u>Démonstration</u>. — Considérons les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "\gamma_{X\otimes Y}(u)"] \arrow[d, "g_{X\otimes Y}"'] \arrow[ddd, bend right=70, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & X\otimes Y \arrow[d, "g_{X\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=70, "id"] \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "u\otimes(id\otimes id)"] \arrow[d, "a"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"', xshift=-4em] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})", xshift=4em] \\
(\underline{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\underline{1}\otimes X)\otimes Y \\
X\otimes Y \arrow[r, "\gamma_X(u)\otimes id"] \arrow[u, "g_X\otimes id"] & X\otimes Y \arrow[u, "g_X\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "\delta_{X\otimes Y}(u)"] \arrow[d, "d_{X\otimes Y}"'] \arrow[ddd, bend right=70, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X\otimes Y \arrow[d, "d_{X\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=70, "id"] \\
(X\otimes Y)\otimes \underline{1} \arrow[r, "(id_X\otimes id_Y)\otimes u"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & (X\otimes Y)\otimes \underline{1} \\
X\otimes (Y\otimes \underline{1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_X\otimes (id_Y\otimes u)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X\otimes (Y\otimes \underline{1}) \arrow[u, "a"'] \\
X\otimes Y \arrow[u, "id_X\otimes d_Y"] \arrow[r, "id_X\otimes \delta_Y(u)"] & X\otimes Y \arrow[u, "id_X\otimes d_Y"']
\end{tikzcd}
\qquad (\mathrm{IX}) \quad (\mathrm{X})
$$

$$
\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "id_X\otimes \gamma_Y(u)"] \arrow[d, "id_X\otimes g_Y"'] \arrow[ddd, bend right=70, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XI})"] & X\otimes Y \arrow[d, "id_X\otimes g_Y"] \arrow[ddd, bend left=70, "id"] \\
X\otimes (\underline{1}\otimes Y) \arrow[r, "id_X\otimes (u\otimes id_Y)"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & X\otimes (\underline{1}\otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(X\otimes \underline{1})\otimes Y \arrow[r, "(id_X\otimes u)\otimes id_Y"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XIII})"] & (X\otimes \underline{1})\otimes Y \\
X\otimes Y \arrow[u, "d_X\otimes id_Y"] \arrow[r, "\delta_X(u)\otimes id_Y"] & X\otimes Y \arrow[u, "d_X\otimes id_Y"']
\end{tikzcd}
\qquad (\mathrm{XIV}) \quad (\mathrm{XV})
$$

dont la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII), (XI), (XIII) vient de la définition de γ et δ (§2, n°3, Prop. 8) ; celle de (II), (VII), (XII) résulte de la naturalité de a ; et enfin celle de (IV), (V), (IX), (X), (XIV), (XV) découle des conditions de compatibilité (15), (16), (17). D'où la commutativité des trois circuits extérieurs, ce qui nous donne les formules considérées.

3. Commutativité et unité

Définition 7.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte de commutativité c et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ sont dites compatibles, si pour tout objet X de $\underline{C}$, le triangle

$$
(31) \qquad
\begin{tikzcd}
 & \underline{1}\otimes X \arrow[dd, "c_{\underline{1},X}"] \\
X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[dr, "d_X"'] & \\
 & X\otimes \underline{1}
\end{tikzcd}
$$

est commutatif. On a en particulier

$$(32) \qquad c_{\underline{1},\underline{1}} = id_{\underline{1}\otimes \underline{1}}$$

Un couple $(c, (\underline{1}, g, d))$ comme ci-dessus est appelé une *contrainte mixte de commutativité-unité*, ou plus simplement une *contrainte CU* pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte CU est appelée une *$\otimes$-catégorie CU*.

Proposition 18.— Dans une $\otimes$-catégorie CU $\underline{C}$, les homomorphismes γ_X et δ_X (32, n°3, Prop. 8) sont égaux pour tout objet X de $\underline{C}$.

Démonstration.— Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\gamma_X(u)"] \arrow[d, "g_X"'] \arrow[ddd, bend right=60, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & X \arrow[d, "g_X"] \arrow[ddd, bend left=60, "id"] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "u\otimes id_X"] \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"] \\
X\otimes \underline{1} \arrow[r, "id_X\otimes u"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{IV})"] & X\otimes \underline{1} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & {} \\
X \arrow[u, "d_X"] \arrow[r, "\delta_X(u)"] & X \arrow[u, "d_X"']
\end{tikzcd}$$

où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de γ_X et δ_X ; celle de (II) résulte de la naturalité de c ; et enfin celle de (IV), (V) résulte de la condition de compatibilité (31). On obtient $\gamma_X(u) = \delta_X(u)$ pour tout $u \in End(\underline{1})$, donc

$$(33) \qquad \gamma_X = \delta_X$$

pour tout $X \in ob\, \underline{C}$.

4. Associativité, commutativité et unité

Définition 8.— Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité a, une contrainte de commutativité c et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ pour $\underline{C}$ sont *compatibles*, si elles sont compatibles deux à deux, au sens défini dans (n°1, Déf. 1), (n°2, Déf. 5), et (n° 3, Déf. 7).

Un triple $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ comme ci-dessus est appelé une <u>contrainte mixte d'associativité - commutativité - unité</u>, ou plus simplement une <u>contrainte ACU</u> pour la $\otimes$- catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$- catégorie munie d'une contrainte ACU est appelée une <u>$\otimes$- catégorie ACU</u>. Elle est dite <u>stricte</u> si c l'est (§2, n° 2, Déf. 8).

On va démontrer ci-dessous que les conditions de compatibilité dans la définition 8 sont surabondantes.

<u>Proposition 11.</u>- Soient a, c, $(\underline{1}, g, d)$ des contraintes d'associativité, commutativité, unité pour une $\otimes$- catégorie $\underline{C}$. Si a est compatible avec c et avec $(\underline{1}, g, d)$ séparément, alors c est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$.

<u>Démonstration</u>.- Le triangle de compatibilité entre c et $(\underline{1}, g, d)$ (Diag. (31)) se retrouve en la région (IV) (à facteur régulier $\underline{1}$ près) du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "g_{\underline{1}\otimes X}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[d, "a"] \arrow[ddddd, bend left=70, "id_{\underline{1}}\otimes c_{\underline{1},X}"] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "g_{\underline{1}}\otimes id_X"] \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X \arrow[d, "c"] \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "id_X\otimes g_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VI})"] & {} \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "d_X\otimes id_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (X\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "g_X\otimes id_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\underline{1}\otimes X)\otimes\underline{1} \arrow[u, "c_{\underline{1},X}\otimes id_{\underline{1}}"'] \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "g_{X\otimes\underline{1}}"] & \underline{1}\otimes(X\otimes\underline{1}) \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III), (V) résulte des conditions de compatibilité (15), (16), (17) du n° 2 ; celle de (II) résulte de la naturalité de c ; celle de (VI) résulte de l'axiome de l'hexagone ; et enfin celle du contour extérieur résulte de la naturalité de g. D'où la commutativité de (IV).

Soit $\underline{C}$ une $\otimes$- catégorie munie d'une contrainte ACU $(a, c, (\underline{1}, g, d))$.

Considérons une famille d'objets $(X_i)_{i \in J}$ de $\underline{C}$, indexée par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$. Les ensembles $I \subset J$ considérés sont supposés finis et peuvent être vides. Comme $\underline{C}$ est à la fois AC et AU, nous allons procéder comme dans les nos 1 et 2. De façon précise, nous définissons le produit canonique $\bigotimes_I X_i$ d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ relativement à l'ordre canonique de la manière suivante :

1° $\bigotimes_I X_i = \underline{1}$ si $I = \emptyset$

2° $\bigotimes_I X_i = X_\beta$ si $I = \{\beta\}$

3° $\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I'} X_i) \otimes X_\beta$ si I a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I.

Nous définissons les produits de $(X_i)_{i \in I}$ comme dans (n°1, Déf. 3).

Enfin pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles (qui peuvent être vides) de I tels que $I = I_1 \amalg I_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les X_i, $i \in I$,

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1, I_2}} (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)$$

de la manière suivante :

1° Si $I_1 = \emptyset$, alors

$$\Psi_{I_1, I_2} = g_{\bigotimes_I X_i}$$

2° Si $I_2 = \emptyset$, alors

$$\Psi_{I_1, I_2} = d_{\bigotimes_I X_i}$$

3° Si $I_1 \neq \emptyset$ et $I_2 \neq \emptyset$, alors Ψ_{I_1, I_2} est défini comme dans (n°1, Déf. 4).

<u>Proposition 20</u>.– Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \amalg I_2$, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– 1° I_1 et I_2 sont tous différents de l'ensemble vide. La démonstration est analogue à celle dans (n°1, Prop. 1).

2° I_1 ou I_2 est l'ensemble vide. La commutativité du diagramme considéré résulte de la compatibilité entre c et $(\underline{1}, g, d)$ compte tenu de la définition de Ψ_{I_1, I_2} ci-dessus.

<u>Proposition 21</u>.– Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– 1° I_1, I_2, I_3 sont différents de vide. Dans ce cas la démonstration est la même que celle dans (n°1, Prop. 2).

2° L'un des trois ensembles I_1, I_2, I_3 est l'ensemble vide. Alors la démonstration est analogue à celle dans (n°2, Prop. 9 (2°, 3°, 4°)).

<u>Proposition 22</u>.– Pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[rr, equal] \arrow[d, equal] & & \bigotimes\limits_I X_i \arrow[d, "g_{\otimes_I X_i}"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Psi_{\emptyset, I}"] & (\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_I X_i) = & \underline{1} \otimes (\bigotimes\limits_I X_i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[rr, equal] \arrow[d, equal] & & \bigotimes\limits_I X_i \arrow[d, "d_{\otimes_I X_i}"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I, \emptyset}"] & (\bigotimes\limits_I X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i) = & (\bigotimes\limits_I X_i) \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– Résultat immédiat de la définition de $\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i$, $\Psi_{\emptyset, I}$, $\Psi_{I, \emptyset}$.

<u>Proposition 23</u>.– Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ est isomorphe au produit canonique relativement à l'ordre canonique $\bigotimes\limits_{I'} X_i$ par un isomorphisme

$$y : \bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les X_i, $i \in I'$, I' étant l'ensemble des $i \in I$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$.

<u>Démonstration</u>. – 1° Pour $I = \{\beta\}$, on a $I' = I$ pour $X_\beta \neq \underline{1}$ et $I' = \emptyset$ pour $X_\beta = \underline{1}$. Dans les deux cas on pose

$$y = id_{X_\beta} .$$

2° Pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$, on définit y comme le composé des isomorphismes

$$\bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1', I_2'}} (\bigotimes_{I_1'} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2'} X_i) \xrightarrow{z \otimes t} Z \otimes T = Y$$

z et t étant les isomorphismes par hypothèse de récurrence.

3° Pour $I = \emptyset$, on a $Y = \underline{1}$ et $\bigotimes_{I'} X_i = \underline{1}$. Dans ce cas on pose

$$y = id_{\underline{1}} .$$

L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé <u>l'isomorphisme canonique</u>.

Moyennant les propositions 20, 21, 22 et 23, nous avons les propositions suivantes dont la démonstration est comme celle dans (§2, n°1).

<u>Proposition 24</u>. – Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$; et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$, $(X_i)_{i \in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

b et b' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments $i \in I$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$.

<u>Proposition 25</u>. Soient I_1, I_2 des sous-ensembles non vides de I

tels que $I = I_1 \amalg I_2$; et soient Y, Z des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \otimes Z \arrow[d, "c"] \\ \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "f'"] & Z \otimes Y \end{tikzcd}$$

est commutatif ; f et f' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

<u>Proposition 26</u>.- Soit Y un produit d'une famille non vide $(X_i)_{i\in I}$: les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "g_Y"] \\ \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "g'"] & \underline{1} \otimes Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "d_Y"] \\ \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "g''"] & Y \otimes \underline{1} \end{tikzcd}$$

g, g', g'' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments i de I tels que $X_i \neq \underline{1}$.

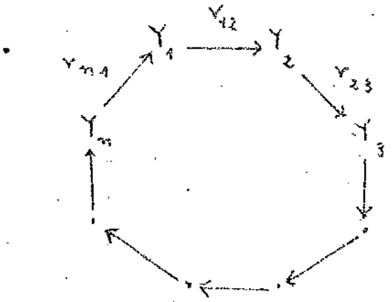
<u>Proposition 27</u>.- Soient Y_1 Y_2 des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement et telles que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même ensemble I pour $j = 1, 2$. Soit $\gamma : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de a, a^{-1}, c, c^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "\gamma"] \\ \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "g_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

est commutatif ; g_1, g_2 étant les isomorphismes canoniques.

<u>Proposition 28</u>.- Soient $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, ... $(X_i)_{i\in I_n}$ respectivement et telles que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même pour $j = 1, 2, \dots, n$. Soient $\gamma_{i,i+1}$ $Y_i \to Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ et $\gamma_{n1} : Y_n \to Y_1$ des iso-

morphismes construits au moyen de $a, a^{-1}, c, c^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant est commutatif.



Exemple. — Le polygone suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1}\otimes X)\otimes((Y\otimes Z)\otimes\underline{1}) \arrow[rr, "id\otimes d_{Y\otimes Z}"] \arrow[d, "c"'] & & (\underline{1}\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "a"] \\
((Y\otimes Z)\otimes\underline{1})\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[d, "d^{-1}_{Y\otimes Z}\otimes g^{-1}_X"'] & & ((\underline{1}\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "(g^{-1}_X\otimes id)\otimes id"] \\
(Y\otimes Z)\otimes X \arrow[dr, "c"'] & & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[dl, "a^{-1}"] \\
& X\otimes(Y\otimes Z) &
\end{tikzcd}$$

5. Objets inversibles

Dans ce n°, $\underline{C}$ désigne une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU $(a, (\underline{1}, g, d))$.

Définition 9. — Soit X un objet de $\underline{C}$. On dit que X est inversible s'il existe des objets X', X'' de $\underline{C}$ tels que $X'\otimes X \simeq \underline{1}$, $X\otimes X'' \simeq \underline{1}$.

Proposition 29. — Si $X'\otimes X \xrightarrow[\sim]{x'} \underline{1}$, $X\otimes X'' \xrightarrow[\sim]{x''} \underline{1}$; alors $X'\simeq X''$.

Démonstration. — En effet, on a

$$X' \xrightarrow[\sim]{d_{X'}} X'\otimes\underline{1} \xleftarrow[\sim]{id\otimes x''} X'\otimes(X\otimes X'') \xrightarrow[\sim]{a} (X'\otimes X)\otimes X'' \xrightarrow[\sim]{x'\otimes id} \underline{1}\otimes X'' \xleftarrow[\sim]{g_{X''}} X''.$$

Corollaire. — X est inversible si et seulement s'il existe X' tel que $X'\otimes X \simeq \underline{1}$ et $X\otimes X' \simeq \underline{1}$.

Démonstration. — S'il existe X' tel que $X'\otimes X \simeq \underline{1}$, $X\otimes X' \simeq \underline{1}$, on a bien X inversible d'après la définition 9. Inversement, supposons X inversible, c'est à dire il existe X', X'' tels que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X'' \simeq \underline{1}$. Or la proposition 29 nous donne $X' \simeq X''$, d'où $X \otimes X'' \simeq X \otimes X' \simeq \underline{1}$. Il résulte du corollaire que X' est aussi inversible.

<u>Proposition 30</u>.— X est inversible si et seulement si X est régulier ([illegible])

<u>Démonstration</u>.— Si X est inversible, en vertu du corollaire de la proposition 29, il existe X' tel que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X' \simeq \underline{1}$. Alors les foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$

$$\begin{array}{llll} F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C} & & G: \underline{C} \longrightarrow \underline{C} \\ \quad Y \longmapsto Y \otimes X & & \quad Y \longmapsto Y \otimes X' \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} F': \underline{C} \longrightarrow \underline{C} & & G': \underline{C} \longrightarrow \underline{C} \\ \quad Y \longmapsto X \otimes Y & & \quad Y \longmapsto X' \otimes Y \end{array}$$

vérifient les relations

$$GF \simeq id_{\underline{C}}, \quad FG \simeq id_{\underline{C}}$$

$$G'F' \simeq id_{\underline{C}}, \quad F'G' \simeq id_{\underline{C}}.$$

Donc F et F' sont des équivalences, et par conséquent X est régulier.

Inversement, supposons que X soit régulier ; d'où F, F' sont des équivalences. On en déduit l'existence de X', X'' tels que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X'' \simeq \underline{1}$, donc X est inversible.

<u>Proposition 31</u>.— Soient X un objet inversible et X^{-1} tel que $X^{-1} \otimes X \xrightarrow[\sim]{t_X} \underline{1}$, $X \otimes X^{-1} \xrightarrow[\sim]{t'_X} \underline{1}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

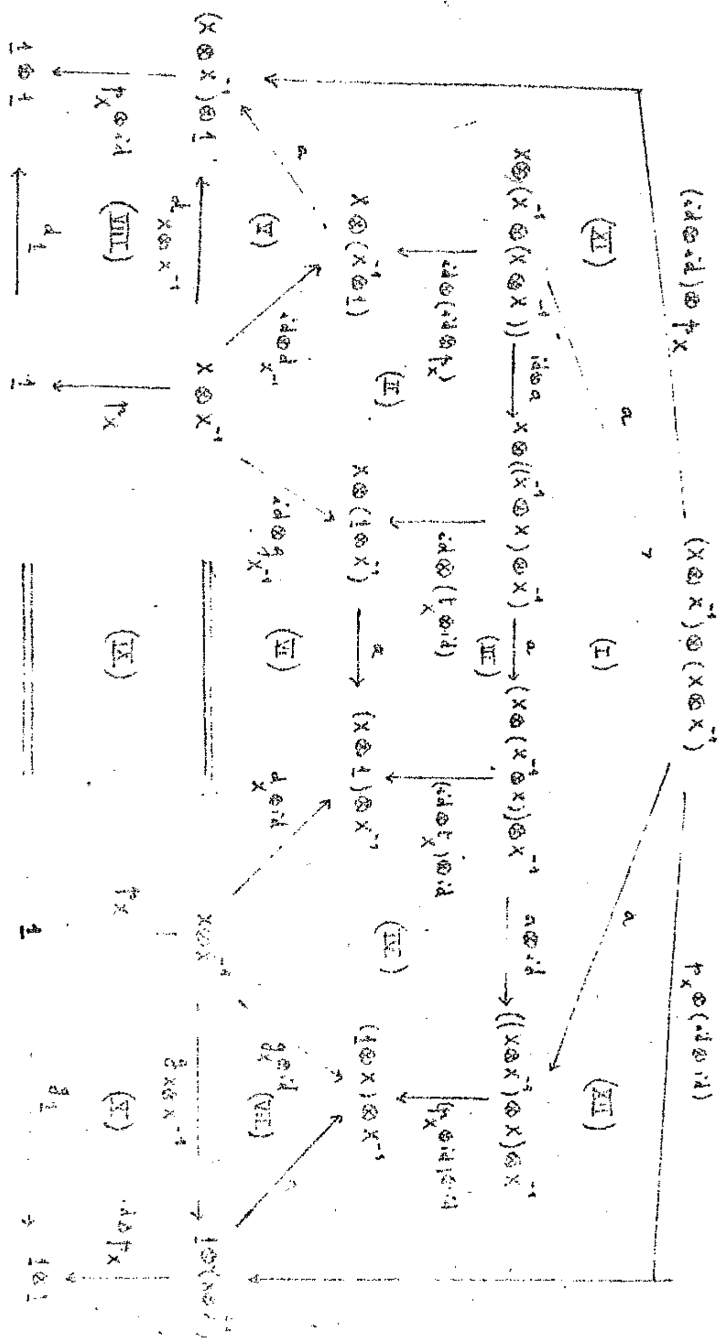
a) Le pentagone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "id \otimes t'_X"'] & & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X \otimes id"] \\ X^{-1} \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X^{-1} \\ & X^{-1} \arrow[ul, "d_{X^{-1}}"] \arrow[ur, "g_{X^{-1}}"'] & \end{tikzcd} \tag{34}$$

b) Le pentagone suivant est commutatif

$$(35)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small]
X\otimes(X^{-1}\otimes X) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "id\otimes t_X"'] & & (X\otimes X^{-1})\otimes X \arrow[d, "f_X\otimes id"] \\
X\otimes \underline{1} & & \underline{1}\otimes X \\
& X \arrow[ul, "d_X"] \arrow[ur, "g_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration.- les diagrammes (34) et (35) se retrouvent en les régions (II) et (III) (à facteur régulier près) du diagramme suivant



dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de l'axiome du pentagone ; celle des régions (III), (XI), (XII) résulte de la fonctorialité de a ; celle des régions (V), (VI), (VII) résulte de la compatibilité entre a et $(\underline{1}, g, d)$; celle de la région (VIII) résulte de la fonctorialité de d ; celle de (IX) est évidente ; celle de (X) résulte de la fonctorialité de g ; et celle du circuit extérieur vient de la relation $d_{\underline{1}} = g_{\underline{1}}$ (§2, n°3, Déf. 9, Rel. (6)). D'où la commutativité de (II) est équivalente à celle de (IV), ce qui démontre la proposition.

Il résulte de la proposition que, pour l'isomorphisme t_X : $X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ donné, il existe un et seulement un isomorphisme p_X : $X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ rendant commutatifs les diagrammes (34) et (35) ; ce qui nous donne la définition suivante

<u>Définition 10</u>.— Un inverse pour un objet X inversible de $\underline{C}$ est un triple (X^{-1}, t_X, p_X) avec

$$t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \ , \ p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$$

rendant commutatifs les diagrammes (34), (35).

<u>Proposition 32</u>.— Soient (X^{-1}, t_X, p_X), (X', t'_X, p'_X) deux inverses pour un objet inversible X et k l'isomorphisme déterminé par le diagramme commutatif

$$(36) \qquad \begin{tikzcd} X^{-1} \otimes X \arrow[rr, "k \otimes id"] \arrow[dr, "t_X"'] & & X' \otimes X \arrow[dl, "t'_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

Alors le diagramme suivant est commutatif (et inversement)

$$(37) \qquad \begin{tikzcd} X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "id \otimes k"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X \otimes X' \arrow[dl, "p'_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

Démonstration.— Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
X\otimes(X^{-1}\otimes X) \arrow[r, "a"] \arrow[rrrr, bend left, "id\otimes(k\otimes id)"] \arrow[dd, "id\otimes t_X"'] \arrow[rrrr, phantom, bend left=15, "(\mathrm{I})"] & (X\otimes X^{-1})\otimes X \arrow[rr, "(id\otimes k)\otimes id"] \arrow[ddl, phantom, "(\mathrm{II})"] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & (X\otimes X')\otimes X & X\otimes(X'\otimes X) \arrow[l, "a"'] \arrow[dd, "id\otimes t'_X"] \arrow[ddl, phantom, "(\mathrm{III})"] \\
 & & \underline{1}\otimes X \arrow[ul, "p_X\otimes id"] \arrow[ur, "p'_X\otimes id"'] & & \\
X\otimes\underline{1} & & X \arrow[ll, "d_X"'] \arrow[rr, "d_X"] \arrow[u, "g_X"'] & & X\otimes 1
\end{tikzcd}
$$

dont la région (II) est le diagramme (37) (à facteur régulier près). Ici la la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de a ; celle de (II), (III) vient de la définition 10 ; et celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse. D'où la commutativité de (II) et par suite celle de (37).

Considérons maintenant une famille finie d'objets $(X_i)_{i\in I}$. Supposons $I = I_1 \amalg \{j,k\} \amalg I_2$ avec $i_1 < j < k < i_2$ pour tout $i_1 \in I_1$, tout $i_2 \in I_2$ (I est supposé totalement ordonné), et de plus $X_j = X^{-1}$, $X_k = X$ (resp. $X_j = X$, $X_k = X^{-1}$). Définissons une "<u>contraction</u>" r (resp. s) : $\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{I_1\amalg I_2} X_i$ par le diagramme commutatif suivant

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j,k\},I_2}"] \arrow[d, "r\ (\text{resp. } s)"'] & (\bigotimes_{I_1\amalg\{j,k\}} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1,\{j,k\}}\otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{\{j,k\}} X_i))\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "(id\otimes t_X)\otimes id\ (\text{resp. } (id\otimes p_X)\otimes id)"] \\
(\bigotimes_{I_1\amalg I_2} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1,\emptyset}\otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{\emptyset} X_i))\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i)
\end{tikzcd}
$$

les isomorphismes ϕ étant les isomorphismes définis dans (n°2, Déf. 6). Il peut arriver qu'on a en outre $I_2 = \{l\} \amalg I'_2$ avec $l < i_2$ pour tout $i_2 \in I'_2$ et $X_l = X^{-1}$ (resp. $X_l = X$), alors on vérifie aisément en vertu des ~~la proposition~~ diagrammes commutatifs (34) et (35) que l'isomorphisme r (resp. s) est égal à l'isomorphisme r' (resp. s') défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j,k,l\},I_2'}"] \arrow[d, "r' \ (\text{resp. } s')"'] & (\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j,k,l\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I_2'} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j\},\{k,l\}}\otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{\{k,l\}} X_i))\otimes(\bigotimes\limits_{I_2'} X_i) \arrow[d, "(id\otimes p_X)\otimes id \ (\text{resp. } (id\otimes t_X)\otimes id)"] \\
\bigotimes\limits_{I_1\amalg I_2} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j\},I_2'}"] & (\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I_2'} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j\},\emptyset}\otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i))\otimes(\bigotimes\limits_{I_2'} X_i)
\end{tikzcd}$$

les contractions r et s nous donnent aussitôt la proposition suivante

<u>Proposition 33</u>.– Tout diagramme dans $\underline{C}$ construit à l'aide de a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}, t, t^{-1}, p, p^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$ est commutatif.

La proposition 33 nous permet d'énoncer la proposition suivante.

<u>Proposition 34</u>.– Si (X^{-1}, t_X, p_X) et (Y^{-1}, t_Y, p_Y) sont des inverses pour X et Y inversibles respectivement, (X, p_X, t_X) est un inverse pour X^{-1} et $(Y^{-1}\otimes X^{-1}, t_{X\otimes Y}, p_{X\otimes Y})$ est un inverse pour $X\otimes Y$, où $t_{X\otimes Y}$, $p_{X\otimes Y}$ sont définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
((Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes X)\otimes Y & (Y^{-1}\otimes(X^{-1}\otimes X))\otimes Y \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[r, "(id\otimes t_X)\otimes id"] & (Y^{-1}\otimes 1)\otimes Y \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "t_{X\otimes Y}"] & 1 & Y^{-1}\otimes Y \arrow[l, "t_Y"'] \arrow[u, "d_{Y^{-1}}\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((X\otimes Y)\otimes Y^{-1})\otimes X^{-1} & (X\otimes(Y\otimes Y^{-1}))\otimes X^{-1} \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[r, "(id\otimes p_Y)\otimes id"] & (X\otimes 1)\otimes X^{-1} \\
(X\otimes Y)\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "p_{X\otimes Y}"] & 1 & X\otimes X^{-1} \arrow[l, "p_X"'] \arrow[u, "d_X\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– La première assertion résulte aussitôt de la définition 10 ; quant à la deuxième, elle est une conséquence immédiate de la proposition 33.

<u>Proposition 35</u>.– Soient (X^{-1}, t_X, p_X), (Y^{-1}, t_Y, p_Y), (Z^{-1}, t_Z, p_Z) des inverses pour X, Y, Z respectivement, et $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, $h : Y \xrightarrow{\sim} Z$ des isomorphismes. On a les propriétés suivantes :

(i) Il existe un et un seul isomorphisme $\alpha(f)\ X^{-1} \xrightarrow{\sim} Y^{-1}$ rendant commutatif le diagramme

(38)
$$\begin{tikzcd}
X^{-1}\otimes X \arrow[r, "t_X"] \arrow[dr, "id\otimes f"'] & \underline{1} & Y^{-1}\otimes Y \arrow[l, "t_Y"'] \\
& X^{-1}\otimes Y \arrow[ur, "\alpha(f)\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

(ii) Le diagramme suivant est commutatif :

(39)
$$\begin{tikzcd}
X\otimes X^{-1} \arrow[r, "p_X"] \arrow[dr, "f\otimes id"'] & \underline{1} & Y\otimes Y^{-1} \arrow[l, "p_Y"'] \\
& Y\otimes X^{-1} \arrow[ur, "id\otimes\alpha(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

(iii) $\alpha(id) = id$ et $\alpha(hf) = \alpha(h)\alpha(f)$.

<u>Démonstration</u>.— (i) Conséquence immédiate de ce que Y est régulier.

(ii) Considérons le diagramme suivant dont la région (IX) est le diagramme (39) (à facteur régulier près). Dans ce diagramme la com-

$$\begin{tikzcd}
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes Y^{-1} \arrow[r, "t_Y\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \underline{1}\otimes Y^{-1} \arrow[drr, phantom, "\mathrm{III}"] & & Y^{-1} \arrow[ll, "g_{Y^{-1}}"'] \arrow[r, "d_{Y^{-1}}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & Y^{-1}\otimes\underline{1} \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & Y^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[l, "id\otimes p_Y"'] \arrow[lllll, bend right, "a"', "\mathrm{I}"] \\
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[u, "id\otimes\alpha(f)"] \arrow[r, "t_Y\otimes id"] \arrow[d, equal] & \underline{1}\otimes X^{-1} \arrow[u, "id\otimes\alpha(f)"'] & & X^{-1} \arrow[ll, "g_{X^{-1}}"'] \arrow[r, "d_{X^{-1}}"] \arrow[u, "\alpha(f)"'] \arrow[d, phantom, "\mathrm{VI}"] & X^{-1}\otimes\underline{1} \arrow[u, "\alpha(f)\otimes id"'] & X^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[l, "id\otimes p_Y"'] \arrow[u, "\alpha(f)\otimes id"'] \arrow[d, equal] \\
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[r, "t_Y\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & \underline{1}\otimes X^{-1} & (X^{-1}\otimes X)\otimes X^{-1} \arrow[l, "t_X\otimes id"'] \arrow[dll, "(id\otimes f)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VIII}"] & X^{-1}\otimes(X\otimes X^{-1}) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes p_X"] \arrow[drr, "id\otimes(f\otimes id)"] & X^{-1}\otimes\underline{1} \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IX}"] & X^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[l, "id\otimes p_Y"'] \\
(X^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[u, "(\alpha(f)\otimes id)\otimes id"] & & & & & X^{-1}\otimes(Y\otimes X^{-1}) \arrow[u, "id\otimes(id\otimes\alpha(f))"'] \arrow[lllll, "a"]
\end{tikzcd}$$

mutativité des régions (I), (VI) résulte de la proposition 33 ; celle de (II) (V) est évidente ; celle de (III), (IV) est le résultat de la fonctorialité de g et d ; celle de (VII) est donné par la définition de $\alpha(f)$; et enfin celle de (VIII) et du circuit extérieur vient de la fonctorialité de a. D'où la commutativité de (IX) et par suite celle de (39). Ce résultat nous donne

$$\alpha(\alpha(f)) = f$$

en considérant (X, p_X, t_Y), (Y, p_Y, t_Y) comme des inverses de X^{-1}, Y^{-1} respectivement (Prop. 34).

(iii) En faisant $Y = X$ et $f = id_X$ dans le diagramme (38), on a aussitôt $\alpha(id_X) = id_{X^{-1}}$. Pour démontrer $\alpha(hf) = \alpha(h)\alpha(f)$, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Z^{-1}\otimes Z \arrow[dd, "t_Z"'] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{I})"] & X^{-1}\otimes Z \arrow[l, "\alpha(hf)\otimes id"'] \arrow[rr, equal] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "(\mathrm{II})"] & & X^{-1}\otimes Z \arrow[d, "\alpha(f)\otimes id"] \\
 & X^{-1}\otimes Y \arrow[u, "id\otimes h"] \arrow[r, "\alpha(f)\otimes id"] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{III})"] & Y^{-1}\otimes Y \arrow[r, "id\otimes h"] \arrow[d, "t_Y"] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{IV})"] & Y^{-1}\otimes Z \arrow[d, "\alpha(h)\otimes id"] \\
\underline{1} & X^{-1}\otimes X \arrow[l, "t_X"'] \arrow[u, "id\otimes f"] \arrow[r, "t_X"] & \underline{1} & Z^{-1}\otimes Z \arrow[l, "t_Z"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III), (IV) résulte de la définition de α ; celle de (II) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur, ce qui démontre l'assertion, compte tenu du fait que Z est régulier.

<u>Exemple</u>. — Reprenons l'exemple dans (§3, n°2). Nous supposons de plus que M est abélien et agit trivialement sur N. Donnons-nous une contrainte de commutativité (§2, n°2, Exemple)

$$c_{s_1, s_2} = (s_1 s_2, k(s_1, s_2))$$

compatible avec la contrainte d'associativité, $k(s_1, s_2)$ étant supposé normalisé. Ecrivons l'axiome de l'hexagone pour $X = Z = s$, $Y = s^{-1}$,

$$f(s, s^{-1}, s) + k(1, s) + f(s, s, s^{-1}) - k(s^{-1}, s) - f(s, s, s^{-1}) - k(s, s) = 0 .$$

Nous obtenons, compte tenu de la normalisation de k,

$$-f(s, s^{-1}, s) = -k(s^{-1}, s) - k(s, s)$$

ou, en vertu de l'antisymétrie de k

$$-f(s, s^{-1}, s) = k(s, s^{-1}) + k(s, s)$$

qui nous donne d'après la définition de p_s (Déf. 10)

$$p_s = c(s, s^{-1}) + c(s, s) + t_s .$$

On en conclut que dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, on n'a pas en général la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "c_{X,X^{-1}}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X^{-1} \otimes X \arrow[dl, "t_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

On peut démontrer qu'elle a lieu si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU stricte (Chap. II, §2, n° 1, Prop. 3). Dans ce cas on a aussitôt la proposition suivante

<u>Proposition 36</u>. — Tout diagramme dans une $\otimes$-catégorie ACU stricte, construit à l'aide de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}, c, c^{-1}, t, t^{-1}, p, p^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ est commutatif.

<u>Proposition 37</u>. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU. Si (X^{-1}, t_X, p_X) et (Y^{-1}, t_Y, p_Y) sont des inverses pour X, Y inversibles, $(X^{-1} \otimes Y^{-1}, t'_{X\otimes Y}, p'_{X\otimes Y})$ est un inverse pour $X \otimes Y$, $t'_{X\otimes Y}$ et $p'_{X\otimes Y}$ sont les isomorphismes ~~vous~~ définis par les triangles commutatifs

(40)
$$\begin{tikzcd} (X^{-1} \otimes Y^{-1}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[rr, "c \otimes id"] \arrow[dr, "t'_{X\otimes Y}"'] & & (Y^{-1} \otimes X^{-1}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "t_{X\otimes Y}"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (X \otimes Y) \otimes (X^{-1} \otimes Y^{-1}) \arrow[rr, "id \otimes c"] \arrow[dr, "p'_{X\otimes Y}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Y^{-1} \otimes X^{-1}) \arrow[dl, "p_{X\otimes Y}"] \\ & \underline{1}. & \end{tikzcd}$$

$t_{X\otimes Y}$ et $p_{X\otimes Y}$ étant donnés par la proposition 34.

<u>Démonstration</u>. — Considérons le diagramme ci-dessous dont la commutativité de la région (I) résulte de la naturalité de a ; celle de (II) résulte de la proposition 34 ; celle de (III) et (IV) résulte de la naturalité de d, g respectivement ; enfin celle de (V) et (VI) résulte de la commutativité des triangles (40) et de la relation $c_{Y^{-1}\otimes X^{-1}} \circ c_{X^{-1}\otimes Y^{-1}} = id_{X^{-1}\otimes Y^{-1}}$

$$\begin{tikzcd}
(X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes((X\otimes Y)\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1})) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "c\otimes(id\otimes c)"] \arrow[dddd, bend right=60, "id\otimes p'_{X\otimes Y}"'] \arrow[ddddrr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & & ((X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes(X\otimes Y))\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1}) \arrow[d, "(c\otimes id)\otimes c"] \arrow[dddd, bend left=60, "t'_{X\otimes Y}\otimes id"] \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes((X\otimes Y)\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1})) \arrow[rr, "a"] \arrow[dd, "id\otimes p_{X\otimes Y}"] \arrow[ddrr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & & ((Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes Y))\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[dd, "t_{X\otimes Y}\otimes id"] \\
& & \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes 1 \arrow[d, "c\otimes id"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(V)}\quad\mathrm{(III)}"] & Y^{-1}\otimes X^{-1} \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"] & 1\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[d, "id\otimes c"] \arrow[l, phantom, "\mathrm{(IV)}\quad\mathrm{(VI)}"'] \\
(X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes 1 & X^{-1}\otimes Y^{-1} \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "g"] & 1\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1})
\end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité du circuit extérieur, d'où la proposition.

§4. $\otimes$-Foncteurs

1. Définition des $\otimes$-foncteurs

<u>Définition 1.</u> – Un <u>$\otimes$-foncteur</u> d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$ est un couple $(F, \breve{F})$ d'un foncteur $F : \underline{C} \to \underline{C}'$ et d'un isomorphisme fonctoriel

$$\breve{F}_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X\otimes Y)$$

On dit que $(F, \breve{F})$ est un $\otimes$-foncteur <u>strict</u>, si pour tous $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, on a

$$F(X\otimes Y) = FX \otimes FY$$

$$\breve{F}_{X,Y} = id_{F(X\otimes Y)}$$

Si $(F,\breve{F})$, $(G,\breve{G})$ sont des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$, un <u>$\otimes$-morphisme</u> de $(F,\breve{F})$ dans $(G,\breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda : F \to G$ rendant commutatif, pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, le carré

$$\begin{tikzcd}
FX\otimes FY \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "\lambda_X\otimes\lambda_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X\otimes Y}"] \\
GX\otimes GY \arrow[r, "\breve{G}_{X,Y}"] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}$$

Si de plus λ est un isomorphisme de foncteurs on dit qu'on a un <u>$\otimes$-isomorphisme</u>.
En outre, si $(H, \check{H})$ est un autre $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\mu : G \to H$
un $\otimes$-morphisme de $(G, \check{G})$ dans $(H, \check{H})$, on vérifie aussitôt que
$\mu \circ \lambda$ est aussi un $\otimes$-morphisme qu'on appelle le <u>$\otimes$-morphis-</u>
<u>me composé</u> des $\otimes$-morphismes λ et μ. On obtient ainsi une
catégorie <u>Hom</u>$^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs de
$\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et les morphismes les $\otimes$-morphismes.

<u>Définition 2</u>. — Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ et
$(F', \check{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}''$ respecti-
vement. Nous définissons le <u>$\otimes$-foncteur composé</u> de $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$
comme le couple $(F'', \check{F}'')$, noté $(F', \check{F}') \circ (F, \check{F})$ ou $(F'F, \check{F'F})$, où

$$F'' = F' \circ F$$
$$\check{F}'' = (F' * \check{F}) \circ (\check{F}' * (F, F))$$

c'est à dire que pour des objets X, Y de $\underline{C}$, $\check{F}''_{X,Y}$ est défini par le
triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
F'FX \otimes F'FY \arrow[rr, "\check{F}'_{FX,FY}"] \arrow[dr, "\check{F}''_{X,Y}"'] & & F'(FX \otimes FY) \arrow[dl, "F'(\check{F}_{X,Y})"] \\
& F'F(X \otimes Y) &
\end{tikzcd}$$

En outre, si $(G, \check{G}) : \underline{C} \to \underline{C}'$, $(G', \check{G}') : \underline{C}' \to \underline{C}''$ sont aussi des $\otimes$-foncteurs,
$\lambda : F \to G$, $\lambda' : F' \to G'$ des $\otimes$-morphismes, on vérifie immédiatement
que $F' * \lambda$ et $\lambda' * G$ sont des $\otimes$-morphismes, d'où $\lambda' * \lambda : F'F \to G'G$
est aussi un $\otimes$-morphisme. On dispose donc d'une 2-catégorie
$\otimes$-<u>Cat</u>, ayant comme objets les $\otimes$-catégories, et comme catégories de
morphismes les catégories <u>Hom</u>$^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$.

<u>2. Compatibilité avec des contraintes</u>

<u>Définition 3</u>. — Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des con-
traintes d'associativité a et a' respectivement. On dit qu'un $\otimes$-fonc-
teur $(F, \check{F}) : \underline{C} \to \underline{C}'$ est <u>compatible</u> avec a, a', si pour tous $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$,

le diagramme

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} FX\otimes(FY\otimes FZ) \arrow[r, "id\otimes \breve{F}_{Y,Z}"] \arrow[d, "a'"'] & FX\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y\otimes Z}"] & F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[d, "Fa"] \\ (FX\otimes FY)\otimes FZ \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}\otimes id"] & F(X\otimes Y)\otimes FZ \arrow[r, "\breve{F}_{X\otimes Y,Z}"] & F((X\otimes Y)\otimes Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On dit alors que $(F, \breve{F})$ est un ${\otimes}$-foncteur associatif. La sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs associatifs est notée $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, A}(\underline{C}, \underline{C}')$.

<u>Proposition 1</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité a, a', a'' respectivement ; $(F ; \breve{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$, $(F', \breve{F}') : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs associatifs. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, \breve{F'F})$ est aussi associatif.

<u>Démonstration</u>.– Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] F'(FX\otimes(FY\otimes FZ)) \arrow[rrrr, bend left, "id"] \arrow[rrrr, phantom, bend left=15, "(\mathrm{I})"] \arrow[ddd, "F'a'"'] & F'FX\otimes F'(FY\otimes FZ) \arrow[l, "\breve{F}'"'] \arrow[r, "id\otimes F'(\breve{F})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'FX\otimes F'F(Y\otimes Z) \arrow[r, "\breve{F}'"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'(FX\otimes F(Y\otimes Z)) \arrow[d, "F'(\breve{F})"] & F'(FX\otimes(FY\otimes FZ)) \arrow[l, "F'(id\otimes\breve{F})"'] \arrow[ddd, "F'a'"] \\ \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & F'FX\otimes(F'FY\otimes F'FZ) \arrow[u, "id\otimes\breve{F}'"] \arrow[r, "id\otimes\breve{F'F}"] \arrow[d, "a''"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'FX\otimes F'F(Y\otimes Z) \arrow[r, "\breve{F'F}"] & F'F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[d, "F'Fa"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IX})"] & \\ & (F'FX\otimes F'FY)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F'F}\otimes id"] \arrow[d, "\breve{F}'\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & F'F(X\otimes Y)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F'F}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F'F((X\otimes Y)\otimes Z) & \\ F'((FX\otimes FY)\otimes FZ) \arrow[rrrr, bend right, "id"'] \arrow[rrrr, phantom, bend right=15, "(\mathrm{VII})"] & F'(FX\otimes FY)\otimes F'FZ \arrow[l, "\breve{F}'"'] \arrow[r, "F'(\breve{F})\otimes id"] & F'F(X\otimes Y)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F}'"] & F'(F(X\otimes Y)\otimes FZ) \arrow[u, "F'(\breve{F})"'] & F'((FX\otimes FY)\otimes FZ) \arrow[l, "F'(\breve{F}\otimes id)"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (VII) résulte de la fonctorialité de $\breve{F}'$; celle de (II), (III), (V), (VI) vient de la définition de $\breve{F'F}$ (Déf. 2) ; celle de (VIII), (IX) est le résultat de la compatibilité de $(F, \breve{F})$ et $(F', \breve{F}')$ est évidente avec les contraintes d'associativité ; enfin celle du circuit extérieur. D'où la commutativité de (IV) qui exprime que $(F'F, \breve{F'F})$ est compatible avec a et a''.

<u>Remarque 1)</u>.– Avec la définition 3, on peut dire que deux contraintes d'associativité a, a' sur $\underline{C}$ sont cohomologues (§2, n°1, Déf. 3).

si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F}) : (\underline{C}, a) \longrightarrow (\underline{C}, a')$ compatible avec a, a' et tel que $F = id_{\underline{C}}$.

<u>Définition 4</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes de commutativité c et c' respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F}) : \underline{C} \to \underline{C}'$ est <u>compatible</u> avec c, c', si pour tous $X, Y \in Ob\,\underline{C}$, le diagramme

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \xrightarrow{\breve{F}_{X,Y}} & F(X\otimes Y) \\ {\scriptstyle c'_{FX,FY}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(c_{X,Y})} \\ FY \otimes FX & \xrightarrow{\breve{F}_{Y,X}} & F(Y\otimes X) \end{array}$$

est commutatif. On dit alors que $(F,\breve{F})$ est un <u>$\otimes$-foncteur commutatif</u>. La sous-catégorie pleine de $\underline{Hom}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs commutatifs est notée $\underline{Hom}^{\otimes,c}(\underline{C},\underline{C}')$.

On vérifie aussitôt la proposition suivante

<u>Proposition 2</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes de ~~associativité~~ commutativité c, c', c'' respectivement ; $(F,\breve{F}) : \underline{C} \to \underline{C}'$ $(F',\breve{F}') : \underline{C}' \to \underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs commutatifs. Alors le foncteur composé $(F'F, \breve{F'F})$ est aussi commutatif.

<u>Remarque 2)</u>.– Dans le langage de la définition 4, on dit que deux contraintes de commutativité c, c' sur $\underline{C}$ sont cohomologues (§2, n° 2, Déf. 7) si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F}) : (\underline{C}, c) \to (\underline{C}, c')$ compatible avec c, c' et tel que $F = id_{\underline{C}}$.

<u>Définition 5</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F}) : \underline{C} \to \underline{C}'$ est <u>compatible</u> avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ s'il existe un isomorphisme $\hat{F} : \underline{1}' \to F(\underline{1})$ rendant commutatifs les diagrammes

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(g_X)} & F(\underline{1}\otimes X) \\ {\scriptstyle g'_{FX}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \breve{F}_{\underline{1},X}} \\ \underline{1}'\otimes FX & \xrightarrow{\hat{F}\otimes id} & F\underline{1}\otimes FX \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(d_X)} & F(X\otimes \underline{1}) \\ {\scriptstyle d'_{FX}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \breve{F}_{X,\underline{1}}} \\ FX\otimes\underline{1}' & \xrightarrow{id\otimes\hat{F}} & FX\otimes F\underline{1} \end{array}$$

On dit alors que $(F, \breve{F})$ est un <u>$\otimes$-foncteur unifère</u>.

<u>Remarque 3)</u>. – L'isomorphisme $\hat{F}$ est unique. En effet, en vertu de l'existence de $\hat{F}$, on a $F(\underline{1})$ régulier puisqu'il est isomorphe à $\underline{1}'$ qui est régulier. Donc dans (3), si on remplace X par $\underline{1}$, on a l'unicité de $\hat{F}$ du fait que $F(\underline{1})$ est régulier.

<u>Proposition 3</u>. – Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$, $(\underline{1}'', g'', d'')$ respectivement ; $(F, \breve{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$, $(F', \breve{F}') : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs unifères. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, \breve{F'F})$ est aussi unifère.

<u>Démonstration</u>. – Soient $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\hat{F}' : \underline{1}'' \xrightarrow{\sim} F'(\underline{1}')$ venant de la compatibilité de $(F, \breve{F})$, $(F', \breve{F}')$ avec les unités (Déf. 5). Définissons un isomorphisme, noté $\widehat{F'F}$, entre $\underline{1}''$ et $F'F(\underline{1})$ par le triangle commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}'' \arrow[dl, "\hat{F}'"'] \arrow[dr, "\widehat{F'F}"] & \\
F'\underline{1}' \arrow[rr, "F'(\hat{F})"'] & & F'F\underline{1}
\end{tikzcd}$$

Montrons qu'on a la commutativité des carrés

$$\begin{tikzcd}
F'FX \arrow[r, "F'F(g_X)"] \arrow[d, "g''_{F'FX}"'] & F'F(\underline{1}\otimes X) \\
\underline{1}''\otimes F'FX \arrow[r, "\widehat{F'F}\otimes id"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[u, "\breve{F'F}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F'FX \arrow[r, "F'F(d_X)"] \arrow[d, "d''_{F'FX}"'] & F'F(X\otimes\underline{1}) \\
F'FX\otimes\underline{1}'' \arrow[r, "id\otimes\widehat{F'F}"] & F'FX\otimes F'F\underline{1} \arrow[u, "\breve{F'F}"']
\end{tikzcd}$$

Nous démontrons seulement la commutativité de l'un des carrés ; la démonstration pour l'autre étant analogue. Pour cela considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & F'FX \arrow[r, "F'Fg_X"] \arrow[dl, "F'(g'_{FX})"'] \arrow[d, "g''_{F'FX}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'F(\underline{1}\otimes X) & \\
F'(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[rrr, bend right=70, "F'(\hat{F}\otimes id_{FX})"'] & \underline{1}''\otimes F'FX \arrow[r, "\widehat{F'F}\otimes id"] \arrow[d, "\hat{F}'\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[u, "\breve{F'F}"'] \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[ul, "F'(\breve{F})"'] \\
 & F'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[ul, "\breve{F}'"] \arrow[r, "F'(\hat{F})\otimes id"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[ur, "\breve{F}'"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & {}
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (II) vient de la définition de $\widehat{F'F}$; celle de (III) et du contour extérieur est le résultat de la compatibilité de $(F,\check{F})$, $(F',\check{F}')$ avec les unités ; celle de (IV) de la définition de $\check{\overline{F'F}}$, enfin celle de (V) de la fonctorialité de $\check{F}'$. D'où la commutativité de (I).

<u>Définition 6</u>.- Soient $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ avec $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\hat{G} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$. On dit qu'un $\otimes$-morphisme $\lambda : F \to G$ est <u>unifère</u> si le triangle

(4)
$$\begin{tikzcd}
 & F\underline{1} \arrow[dd, "\lambda_{\underline{1}}"] \\
\underline{1}' \arrow[ur, "\hat{F}"] \arrow[dr, "\hat{G}"'] & \\
 & G\underline{1}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. D'où si λ est un $\otimes$-morphisme unifère, $\lambda_{\underline{1}}$ est un isomorphisme. La réciproque est aussi vraie.

<u>Proposition 4</u>.- Soient $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ avec $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\hat{G} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$ les isomorphismes de compatibilité. Un $\otimes$-morphisme $\lambda : F \to G$ tel que $\lambda_{\underline{1}}$ soit un isomorphisme est unifère.

<u>Démonstration</u>.- Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}'\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\lambda_{\underline{1}}\otimes\lambda_{\underline{1}}"] \arrow[d, "\check{F}"] & G\underline{1}\otimes G\underline{1} & \underline{1}'\otimes G\underline{1} \arrow[l, "\hat{G}\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\lambda_{\underline{1}}^{-1}"] & \underline{1}'\otimes F\underline{1} \\
F\underline{1} \arrow[u, "g'_{F\underline{1}}"] \arrow[r, "F(d)"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[rrrr, bend right, "id"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "\lambda_{\underline{1}\otimes\underline{1}}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & G(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[u, "\check{G}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & G\underline{1} \arrow[l, "G(d)"] \arrow[u, "g'_{G\underline{1}}"'] \arrow[r, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F\underline{1} \arrow[u, "g'_{F\underline{1}}"'] \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III) résulte de la compatibilité de $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ avec les unités ; celle de (II) vient du fait que λ est un un $\otimes$-morphisme (n° 1, Déf. 1) ; celle de (IV) découle de la naturalité de g' et celle de (V) de la naturalité de λ. D'où la commutativité du circuit extérieur qui nous donne

$$\hat{G}^{-1}\lambda_{\underline{1}}\hat{F}\otimes id_{F\underline{1}} = id_{\underline{1}'}\otimes id_{F\underline{1}}$$

ou du fait que $F\underline{1}$ est régulier

$$\hat{G}^{-1}\lambda_{\underline{1}}\hat{F} = id_{\underline{1}},$$

c'est à dire le diagramme (4) commutatif.

<u>Corollaire</u>. — Soient $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\lambda : F \to G$ un $\otimes$-isomorphisme. Alors λ est unifère.

<u>Démonstration</u>. — En effet λ_X est un isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, en particulier pour $X = \underline{1}$.

La sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs unifères, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères, est noté $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, \underline{1}}(\underline{C}, \underline{C}')$ (le $\otimes$-morphisme composé de deux $\otimes$-morphismes unifères est un $\otimes$-morphisme unifère)

Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories ; $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$; et $\alpha : F \xrightarrow{\sim} G$ un $\otimes$-isomorphisme. On a les propriétés suivantes

<u>Proposition 5</u>. — $(F,\check{F})$ est compatible avec les contraintes d'associativité a, a' données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(G,\check{G})$ l'est.

<u>Démonstration</u>. — Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
GX\otimes(GY\otimes GZ) \arrow[rr, "id\otimes\check{G}"] \arrow[ddd, "a'"'] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & GX\otimes G(Y\otimes Z) \arrow[rr, "\check{G}"] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & G(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[ddd, "Ga"] \\
\arrow[d, phantom, "(\mathrm{VI})"] & FX\otimes(FY\otimes FZ) \arrow[ul, "\alpha_X\otimes(\alpha_Y\otimes\alpha_Z)"'] \arrow[r, "id\otimes\check{F}"] \arrow[d, "a'"] & FX\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[u, "\alpha_X\otimes\alpha_{Y\otimes Z}"] \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[ur, "\alpha_{X\otimes(Y\otimes Z)}"'] \arrow[d, "Fa"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \\
 & (FX\otimes FY)\otimes FZ \arrow[r, "\check{F}\otimes id"] \arrow[dl, "(\alpha_X\otimes\alpha_Y)\otimes\alpha_Z"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(X\otimes Y)\otimes FZ \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[d, "\alpha_{X\otimes Y}\otimes\alpha_Z"] & F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dr, "\alpha_{(X\otimes Y)\otimes Z}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\
(GX\otimes GY)\otimes GZ \arrow[rr, "\check{G}\otimes id"'] & & G(X\otimes Y)\otimes GZ \arrow[rr, "\check{G}"'] & & G((X\otimes Y)\otimes Z)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (II), (IV), (V) vient de ce que α est un $\otimes$-morphisme ; celle de VI résulte de la naturalité de a' et celle de (VII) de la naturalité de α. D'où la région (III) est commutative si et seulement si le circuit extérieur l'est, ce qui démontre.

la proposition.

Proposition 6.– $(F, \breve{F})$ est compatible avec les contraintes de commutativité c, c' donnés respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(G, \breve{G})$ l'est.

Démonstration.– Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
GX \otimes GY \arrow[rrr, "\breve{G}"] \arrow[ddd, "c'_{GX,GY}"'] & & & G(X \otimes Y) \arrow[ddd, "G(c_{X,Y})"] \\
& FX \otimes FY \arrow[ul, "\alpha_X \otimes \alpha_Y"'] \arrow[r, "\breve{F}"] \arrow[d, "c'_{FX,FY}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(X \otimes Y) \arrow[ur, "\alpha_{X \otimes Y}"] \arrow[d, "F(c_{X,Y})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\
& FY \otimes FX \arrow[r, "\breve{F}"] \arrow[dl, "\alpha_Y \otimes \alpha_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(Y \otimes X) \arrow[dr, "\alpha_{Y \otimes X}"] & \\
GY \otimes GX \arrow[rrr, "\breve{G}"] & & & G(Y \otimes X)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III) vient du fait de ce que α est un $\otimes$-morphisme et celle des régions (IV), (V) de la naturalité de c' et α respectivement. D'où l'équivalence de la commutativité de la région (II) et du circuit extérieur.

Proposition 7.– $(F, \breve{F})$ est compatible avec les unités $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(G, \breve{G})$ l'est.

Démonstration.– En raison de la symétrie du problème, nous allons démontrer que si $(F, \breve{F})$ est unifère, $(G, \breve{G})$ l'est. Puisque $(F, \breve{F})$ est unifère, il existe un isomorphisme $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$ tel que les diagrammes (3) soient commutatifs. Définissons $\hat{G} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$ par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}' \arrow[r, "\hat{F}"] \arrow[dr, "\hat{G}"'] & F\underline{1} \arrow[d, "\alpha"] \\
& G\underline{1}
\end{tikzcd}$$

et considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
GX \arrow[rrr, "Gg_X"] \arrow[ddd, "g'_{GX}"'] & & & G(\underline{1}\otimes X) \\
& FX \arrow[ul, "\alpha_X"'] \arrow[r, "Fg_X"] \arrow[d, "g'_{FX}"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "(\mathrm{I})"] & F(\underline{1}\otimes X) \arrow[ur, "\alpha_{\underline{1}\otimes X}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"'] & \\
\arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"'] \arrow[dl, "id\otimes\alpha_X"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "(\mathrm{III})"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[dr, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_X"] & (\mathrm{V}) \\
\underline{1}'\otimes GX \arrow[rrr, "\hat{G}\otimes id"'] & & & G\underline{1}\otimes GX \arrow[uuu, "\check{G}"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la naturalité de α ; celle de (II) vient de l'hypothèse que $(F, \check{F})$ soit unifère ; celle de (III) de la définition de $\hat{G}$; celle de (IV) de la naturalité de g' ; enfin celle de (V) du fait que α est un $\otimes$-morphisme. D'où la commutativité du circuit extérieur. On a ainsi démontré la commutativité de l'un des diagrammes (3), la démonstration pour celle de l'autre étant analogue.

<u>Définition 7</u>.- Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories AU et $(F, \check{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. On dit que F est <u>compatible</u> avec les contraintes AU, ou encore qu'il est un <u>$\otimes$-foncteur AU</u> s'il est un $\otimes$-foncteur associatif, unifère. On note $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, AU}(\underline{C}, \underline{C}')$ la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs AU, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères.

On définit de façon analogue quand on a affaire à des contraintes mixtes AC, CU, ACU.

<u>Proposition 8</u>.- Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories AU munies des contraintes mixtes d'associativité-unité $(a, (\underline{1}, g, d))$, $(a', (\underline{1}', g', d'))$ respectivement. Soit $(F, \check{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur associatif. Alors $(F, \check{F})$ est unifère si et seulement si $F(\underline{1})$ est régulier.

<u>Démonstration</u>.- Supposons $(F, \check{F})$ ~~unifère~~ unifère. Alors il existe $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$, donc $F\underline{1}$ est régulier. Inversement, si $F\underline{1}$ est régulier, on peut définir un isomorphisme $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$ par le diagramme commutatif suivant

$$(5)\qquad \begin{tikzcd} F\underline{1} \arrow[r, "Fg_{\underline{1}}"] \arrow[d, "g'_{F\underline{1}}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \\ \underline{1}'\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

Il nous faut maintenant démontrer que $\hat{F}$ rend commutatifs les diagrammes (3). Pour cela, prouvons d'abord que le diagramme suivant est commutatif

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} F\underline{1} \arrow[r, "Fd_{\underline{1}}"] \arrow[d, "d'_{F\underline{1}}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \\ F\underline{1}\otimes\underline{1}' \arrow[r, "id\otimes\hat{F}"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

Or le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(id\otimes g_{\underline{1}})"] \arrow[dddddddddd, bend right=60, "id"'] \arrow[dddddddddd, phantom, bend right=30, "(\mathrm{VI})"] & F(\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1})) \arrow[dddddddddd, bend left=60, "Fa"] \arrow[dddddddddd, phantom, bend left=30, "(\mathrm{VII})"] \\ \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & \\ F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[r, "id\otimes Fg_{\underline{1}}"] \arrow[uu, "\check{F}"] & F\underline{1}\otimes F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[uu, "\check{F}"'] \\ \arrow[r, phantom, "(\mathrm{II})"] & \\ F\underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes F\underline{1}) \arrow[r, "id\otimes(\hat{F}\otimes id)"] \arrow[uu, "id\otimes g'_{F\underline{1}}"] \arrow[dd, "a'"'] & F\underline{1}\otimes(F\underline{1}\otimes F\underline{1}) \arrow[uu, "id\otimes\check{F}"'] \arrow[dd, "a'"] \\ \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] & \\ (F\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes F\underline{1} \arrow[r, "(id\otimes\hat{F})\otimes id"] & (F\underline{1}\otimes F\underline{1})\otimes F\underline{1} \arrow[dd, "\check{F}\otimes id"] \\ \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \\ F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[r, "Fd_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[uu, "d'_{F\underline{1}}\otimes id"] \arrow[dd, "\check{F}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes F\underline{1} \arrow[dd, "\check{F}"] \\ \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\ F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(d_{\underline{1}}\otimes id)"] & F((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1}) \end{tikzcd}$$

a les régions (I), (V) commutatives en vertu de la fonctorialité de $\check{F}$; la région (II) par la définition de $\hat{F}$; la région (III) en vertu de la fonctorialité de a' ; la région (VI) et le circuit extérieur en vertu de la compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité ; enfin la région (VII) en vertu de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec les contraintes d'associativité. On en conclut la commutativité de (IV), donc celle de (6).

Venons maintenant au diagramme

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fg_X"] \arrow[d, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1}\otimes X) \\ \underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

Pour démontrer sa commutativité, considérons le diagramme suivant où le diagramme qui nous intéresse se retrouve en la région (V), à facteur régulier près,

$$\begin{tikzcd}
(F\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes FX \arrow[rr, "(id\otimes\hat{F})\otimes id"] & & (F\underline{1}\otimes F\underline{1})\otimes FX \arrow[d, "\check{F}\otimes id"] \\
F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "d'_{F\underline{1}}\otimes id"] \arrow[d, "\check{F}"'] \arrow[rr, "Fd_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[rru, phantom, "(\mathrm{I})"] & & F(\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes FX \arrow[d, "\check{F}"] \\
F(\underline{1}\otimes X) \arrow[rr, "F(d_{\underline{1}}\otimes id)"] \arrow[rru, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[d, equal] & & F((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X) \\
F(\underline{1}\otimes X) \arrow[rr, "F(id\otimes g_X)"] \arrow[rru, phantom, "(\mathrm{III})"] & & F(\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X)) \arrow[u, "Fa"'] \\
F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[rr, "id\otimes Fg_X"] \arrow[rru, phantom, "(\mathrm{IV})"] \arrow[d, "id\otimes g'_{FX}"'] & & F\underline{1}\otimes F(\underline{1}\otimes X) \arrow[u, "\check{F}"'] \\
F\underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[rr, "id\otimes(\hat{F}\otimes id)"] \arrow[rru, phantom, "(\mathrm{V})"] \arrow[uuuuu, bend left=60, "a'", "(\mathrm{VI})"'] & & F\underline{1}\otimes(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[u, "id\otimes\check{F}"'] \arrow[uuuuu, bend right=60, "a'"', "(\mathrm{VII})"]
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) résulte de celle de (6) ; celle de (II), (IV) de la fonctorialité de $\check{F}$; celle de (III), (VI) de la compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité ; celle de (VII) de la compatibilité de $(F,\check{F})$ avec a, a' ; enfin celle du circuit extérieur de la naturalité de a'. On en déduit la commutativité de (V). La démonstration de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "Fd_X"] \arrow[d, "d'_{FX}"'] & F(X\otimes\underline{1}) \\
FX\otimes\underline{1}' \arrow[r, "id\otimes\hat{F}"] & FX\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

est analogue en se servant de la commutativité de (5).

Dans ce qui suit de ce n°, $\underline{C}$, $\underline{C}'$ désignent des $\otimes$-catégories ACU et $(F,\check{F})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Nous reprenons les notions de produit canonique $\underset{I}{\otimes} X_i$, d'isomorphisme $\Psi_{I_1, I_2} : \underset{I}{\otimes} X_i \simeq (\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i)$, d'isomorphisme canonique $y : \underset{I'}{\otimes} X_i \simeq Y$ .... développés dans (§3, n°4).

<u>Définition 8</u>.– Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$ (rappelons-nous que I est toujours supposé fini). Définissons un isomorphisme fonctoriel

$$f_I : \bigotimes_I FX_i \xrightarrow{\sim} F(\bigotimes_I X_i)$$

de la manière suivante

1° $I = \emptyset$, alors

(7) $$f_I = \hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$$

2° $I = \{\beta\}$, alors

(8) $$f_I = id_{FX_\beta}$$

3° I a $p>1$ éléments, alors f_I est défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I par le diagramme commutatif suivant

(9)
$$\begin{tikzcd}
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I'}\otimes id"] \arrow[d, equal] & F(\bigotimes_{I'} X_i)\otimes FX_\beta \arrow[d, "\check{F}"] \\
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] & F((\bigotimes_{I'} X_i)\otimes X_\beta)
\end{tikzcd}$$

β étant le plus grand élément de I et I' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I.

<u>Proposition 9</u>.– Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$ et I_1, I_2 des sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \amalg I_2$. Le diagramme suivant est commutatif

(10)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F(\bigotimes_I X_i) \arrow[r, "F(\psi_{I_1,I_2})"] & F((\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i)) \\
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "\psi'_{I_1,I_2}"] & (\bigotimes_{I_1} FX_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1}\otimes f_{I_2}"] & F(\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes F(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[u, "\check{F}"]
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– 1° $I_1 = \emptyset$, alors (10) est le circuit extérieur du diagramme suivant dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de g' ; celle de (II) vient de ce que $(F, \check{F})$ est unifère ; et celle de (III) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur.

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\bigotimes_I X_i) \arrow[rr, "F(g_{\bigotimes_I X_i})"] \arrow[rd, "g'_{F(\bigotimes_I X_i)}"'] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & F(1 \otimes (\bigotimes_I X_i)) \\
 & & 1' \otimes F(\bigotimes_I X_i) \arrow[rd, "\hat{F} \otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & \\
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "g'_{\bigotimes_I FX_i}"'] & 1' \otimes (\bigotimes_I FX_i) \arrow[ur, "id \otimes f_I"] \arrow[rr, "\hat{F} \otimes f_I"'] & & F1 \otimes F(\bigotimes_I X_i) \arrow[uu, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

2° $I_2 = \emptyset$. Démonstration analogue.

3° I_1, I_2 sont différents de l'ensemble vide. D'abord considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\bigotimes_I X_i) \arrow[rr, "F(\psi_{I_2,I_1})"] \arrow[d, equal] \arrow[rrd, phantom, "(\mathrm{II})"] & & F((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \arrow[d, equal] \\
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] \arrow[rrd, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(\bigotimes_I X_i) \arrow[r, "F(\psi_{I_1,I_2})"] & F((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[r, "Fc"] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \\
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "\psi'_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\bigotimes_{I_1} FX_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1} \otimes f_{I_2}"] \arrow[d, "c'"] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F(\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes F(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "c'"] \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, "c'"] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F(\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes F(\bigotimes_{I_1} X_i) \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, equal] \\
\bigotimes_I FX_i \arrow[r, "\psi'_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} FX_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} FX_i) \arrow[r, "f_{I_2} \otimes f_{I_1}"] & F(\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes F(\bigotimes_{I_1} X_i) \arrow[r, equal] & F(\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes F(\bigotimes_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (VII) est évidente ; celle de (II), (V) résulte de (§3, n° 4, Prop. 20) ; celle de (IV) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec c, c' ; celle de (VI) de la fonctorialité de c'. D'où la région (III) est commutative si et seulement si le circuit extérieur du diagramme l'est.

Revenons à la démonstration de la commutativité du diagramme (10). D'après ce que nous ~~venons~~ ~~de~~ ~~démontrer~~ venons de démontrer, nous pouvons toujours supposer le plus grand élément β de I appartenant à I_2. Pour $I_2 = \{\beta\}$, le diagramme (10) devient

$$\begin{tikzcd}
(\bigotimes_{I_1} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[rr, "f_I"] \arrow[d, equal] & & F((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, equal] & F((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes X_\beta) \\
(\bigotimes_{I_1} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_1} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[rr, "f_{I_1} \otimes id"] & & F(\bigotimes_I X_i) \otimes FX_\beta \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif par définition de f_I (Déf. 7., Diag. (9)) ; en particulier (10) est commutatif pour I se composant de deux éléments. Démontrons la commutativité de (10) dans le cas général par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Supposons la commutativité de (10) pour les ensembles I ayant $p-1 \geq 2$ éléments ; nous allons la démontrer pour les ensembles I ayant p éléments. Pour cela considérons le diagramme suivant (I' et I'_2 désignent respectivement les ensembles des éléments $< \beta$ de I et I_2)

$$
\begin{tikzcd}
(\bigotimes\limits_{I'} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I'} \otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\bigotimes\limits_{I'} X_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "F(\Psi_{I_1, I'_2}) \otimes id"] \arrow[d, "\check{F}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I'_2} X_i)) \otimes FX_\beta \arrow[d, "\check{F}"'] \\
(\bigotimes\limits_{I'} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\bigotimes\limits_{I'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, "F(\Psi_{I_1, I'_2} \otimes id)"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I'_2} X_i)) \otimes X_\beta) \\
(\bigotimes\limits_{I'} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\bigotimes\limits_{I'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, "F(\Psi_{I_1, I_2})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \otimes X_\beta)) \arrow[u, "Fa"'] \\
(\bigotimes\limits_{I'} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "\Psi'_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1} \otimes f_{I_2}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes F((\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[u, "\check{F}"'] \\
(\bigotimes\limits_{I'} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "\Psi'_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I'_2} FX_i) \otimes FX_\beta) \arrow[r, "f_{I_1} \otimes (f_{I'_2} \otimes id)"] \arrow[d, "a'"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (F(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \otimes FX_\beta) \arrow[u, "id \otimes \check{F}"'] \arrow[d, "a'"'] \\
(\bigotimes\limits_{I'} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "\Psi'_{I_1, I'_2} \otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I'_2} FX_i)) \otimes FX_\beta \arrow[r, "(f_{I_1} \otimes f_{I'_2}) \otimes id"] & (F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes F(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i)) \otimes FX_\beta \arrow[uuuuu, bend right=60, "\check{F} \otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I), (V) résulte de la définition de f_I ; celle de (II) de la naturalité de $\check{F}$; celle de (III), (VI) de la définition de Ψ (§ 3, n° 4, Déf. 4, Diag. (4)) ; celle de (VII) de la naturalité de a' ; celle de (VIII) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec a, a' ; enfin celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de (IV).

<u>Corollaire</u>. – Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$, I_1 et I_2 des sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \amalg I_2$, I'_1 et I'_2 les sous-ensembles respectivement de I_1 et I_2 des éléments i tels que $X_i \neq \underline{1}$, et $I' = I'_1 \amalg I'_2$.

Soient Y, Z des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$ et $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement. On a la commutativité du diagramme suivant

$$(11)\qquad \begin{tikzcd} \bigotimes_{I'} FX_i \arrow[r, "\psi'_{I'_1, I'_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I'_1} FX_i)\otimes(\bigotimes_{I'_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I'_1}\otimes f_{I'_2}"] & F(\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes F(\bigotimes_{I'_2} X_i) \arrow[r, "Fy\otimes Fz"] & FY\otimes FZ \arrow[d, "\check{F}"] \\ \bigotimes_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] & F(\bigotimes_{I'} X_i) \arrow[r, "F(\psi_{I'_1, I'_2})"] & F((\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I'_2} X_i)) \arrow[r, "F(y\otimes z)"] & F(Y\otimes Z) \end{tikzcd}$$

y, z étant les isomorphismes canoniques définis dans (§3, n°4, Prop. 23).

Démonstration. – Il suffit d'appliquer la proposition 9 et la fonctorialité de $\check{F}$.

Proposition 10. – Soit Y un produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ et soit I' l'ensemble des éléments $i\in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$, les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$(12)\qquad \begin{tikzcd} \bigotimes_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] \arrow[d, equal] & F(\bigotimes_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy"] & FY \arrow[d, "F(g_Y)"] \\ \bigotimes_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] & F(\bigotimes_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy'"] & F(\underline{1}\otimes Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bigotimes_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] \arrow[d, equal] & F(\bigotimes_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy"] & FY \arrow[d, "F(d_Y)"] \\ \bigotimes_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] & F(\bigotimes_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy''"] & F(Y\otimes \underline{1}) \end{tikzcd}$$

Démonstration. – La proposition résulte de (§3, n°4, Prop. 26).

Proposition 11. – Tout diagramme dans $\underline{C}'$ construit à l'aide de a', a'^{-1}, c', c'^{-1}, g', g'^{-1}, d', d'^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}, Fg, Fg^{-1}, Fd, Fd^{-1}, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, $\hat{F}$, $\hat{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.

Démonstration. – D'abord en vertu de la commutativité des diagrammes (1), (2), (3), on peut remplacer Fa, Fc, $\hat{F}$ par a', c', $\check{F}$, Fg^*, g', Fd, d'. Ensuite, au moyen des diagrammes commutatifs (11), (12), on arrive à un diagramme dans $\underline{C}'$ qui ne contient que a', a'^{-1}, c', c'^{-1}, g', g'^{-1}, d', d'^{-1} et des identités. Or ce diagramme est commutatif en vertu de (§3, n°4, Prop. 28), on en déduit par suite la commutativité du diagramme considéré.

Exemple. – Le diagramme suivant est commutatif.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & ((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes(F1\otimes F(A\otimes B)) \arrow[dl, "id\otimes\check{F}"'] \arrow[dr, "id\otimes(\hat{F}^{-1}\otimes id)"] & \\
((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes F(1\otimes(A\otimes B)) \arrow[d, "id\otimes Fa"] & & ((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes(1'\otimes F(A\otimes B)) \arrow[d, "a'"'] \\
((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes F((1\otimes A)\otimes B) \arrow[d, "id\otimes F(g_A\otimes id)"] & & (((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes 1')\otimes F(A\otimes B) \arrow[d, "((d'^{-1}_A\otimes id)\otimes id)\otimes id"'] \\
((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes F(A\otimes B) \arrow[d, "a'^{-1}\otimes\check{F}^{-1}"] & & ((A'\otimes B')\otimes 1')\otimes F(A\otimes B) \arrow[d, "d'^{-1}_{A'\otimes B'}\otimes Fc"'] \\
(A'\otimes(1'\otimes B'))\otimes(FA\otimes FB) \arrow[d, "a'"] & & (A'\otimes B')\otimes F(B\otimes A) \arrow[d, "id\otimes\check{F}^{-1}"'] \\
((A'\otimes(1'\otimes B'))\otimes FA)\otimes FB \arrow[d, "c'\otimes id"] & & (A'\otimes B')\otimes(FB\otimes FA) \arrow[d, "a'"'] \\
(FA\otimes(A'\otimes(1'\otimes B')))\otimes FB \arrow[dr, "(id\otimes(id\otimes g'^{-1}_{B'}))\otimes id"] & & ((A'\otimes B')\otimes FB)\otimes FA \arrow[d, "c'"'] \\
 & (FA\otimes(A'\otimes B'))\otimes FB & FA\otimes((A'\otimes B')\otimes FB) \arrow[l, "a'"']
\end{tikzcd}
$$

On a des propositions analogues à la proposition 11 quand on a affaire à des contraintes d'associativité, commutativité, unité, ou des contraintes mixtes AC, AU, CU. Bornons-nous au cas AC, nous avons la proposition :

Proposition 12.- Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories AC et $(F, \check{F})$ un $\otimes$-foncteur AC de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Tout diagramme dans $\underline{C}'$ construit à l'aide de a', a'^{-1}, c', c'^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.

§5. $\otimes$-Equivalences

1. Définition des $\otimes$-équivalences

Définition 1.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. On dit que $(F, \check{F})$ est une $\otimes$-équivalence si et seulement si F est une équivalence.

Proposition 1.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ une $\otimes$-équivalence de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Soit $F' : \underline{C}' \to \underline{C}$ un foncteur quasi-inverse de F, i.e

$$F'F \xrightarrow[\sim]{\alpha} id_{\underline{C}} \ , \quad FF' \xrightarrow[\sim]{\alpha'} id_{\underline{C}'}$$

α et α' vérifiant les relations

$$(1) \qquad \begin{aligned} F * \alpha &= \alpha' * F \\ F' * \alpha' &= \alpha * F' \end{aligned}$$

Alors il existe un isomorphisme fonctoriel et un seul

$$\check{F}'_{X',Y'} : F'X' \otimes F'Y' \xrightarrow{\sim} F'(X' \otimes Y')$$

tel que $(F', \check{F}')$ soit un $\otimes$-foncteur et α, α' des $\otimes$-morphismes.

Démonstration.– Supposons que $\check{F}'$ existe. Considérons le $\otimes$-foncteur composé $(FF', \check{FF'}) = (F, \check{F}) \circ (F', \check{F}')$. D'après (§4, n°1, Déf. 2), $\check{FF'}_{X',Y'}$ est défini par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
FF'X' \otimes FF'Y' \arrow[rr, "\check{F}_{F'X', F'Y'}"] \arrow[dr, "\check{FF'}_{X',Y'}"'] & & F(F'X' \otimes F'Y') \arrow[dl, "F(\check{F}'_{X',Y'})"] \\
& FF'(X' \otimes Y') &
\end{tikzcd}$$

En exprimant que α' est un $\otimes$-morphisme, $\check{F}'$ doit être tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(2) \qquad \begin{tikzcd}
F(F'X' \otimes F'Y') \arrow[r, "F(\check{F}')"] & FF'(X' \otimes Y') \arrow[d, "\alpha'_{X' \otimes Y'}"] \\
FF'X' \otimes FF'Y' \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[r, "\alpha'_{X'} \otimes \alpha'_{Y'}"'] & X' \otimes Y'
\end{tikzcd}$$

D'où l'unicité de $\check{F}'$ puisque F est pleinement fidèle. Prenons $\check{F}'$ défini par le diagramme commutatif (2). $\check{F}'$ est bien fonctoriel en X', Y', et α' un $\otimes$-morphisme. Il nous reste à démontrer que α est un $\otimes$-morphisme. Or cela résulte de la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ respectivement tels que

$$F'F \overset{\alpha}{\underset{\sim}{\to}} id_{\underline{C}}\ , \quad FF' \overset{\alpha'}{\underset{\sim}{\to}} id_{\underline{C}'}$$

avec α, α' vérifiant les relations (1). Alors α est un $\otimes$-morphisme si et seulement si α' l'est.

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si α' est un $\otimes$-morphisme, alors α est aussi un $\otimes$-morphisme, c'est à dire on doit avoir le diagramme suivant commutatif

$$(3)\qquad \begin{tikzcd} F'(FX\otimes FY) \arrow[r, "F'(\check{F})"] & F'F(X\otimes Y) \arrow[d, "\alpha_{X\otimes Y}"] \\ F'FX\otimes F'FY \arrow[u, "\check{F}'"] \arrow[r, "\alpha_X\otimes\alpha_Y"] & X\otimes Y \end{tikzcd}$$

Considérons donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} FX\otimes FY \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(X\otimes Y) \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & FF'F(X\otimes Y) \arrow[l, "F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)"'] \arrow[r, "\alpha'_{F(X\otimes Y)}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(X\otimes Y) \\ FF'FX\otimes FF'FY \arrow[u, "F\alpha_X\otimes F\alpha_Y"] \arrow[r, "\check{F}"] & F(F'FX\otimes F'FY) \arrow[u, "F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)"] \arrow[r, "F(\check{F}')"] & FF'(FX\otimes FY) \arrow[u, "FF'(\check{F})"] \arrow[r, "\alpha'_{FX\otimes FY}"] & FX\otimes FY \arrow[u, "\check{F}"] \end{tikzcd}$$

dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $\check{F}$; celle de (III) de la fonctorialité de α'; enfin celle du circuit extérieur se déduit des relations (1) et de la commutativité du diagramme (2). D'où la commutativité de (II) qui est l'image par F de (3). Or F est pleinement fidèle, ce qui donne la commutativité de (3).

En vertu de la définition 1 et la proposition 1, on peut énoncer la proposition :

<u>Proposition 3</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ un $\otimes$-fonc-

teurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. $(F, \breve{F})$ est une $\otimes$-équivalence si et seulement si $(F, \breve{F})$ peut être mis dans un quadruple

$$\big((F,\breve{F}),\ (F',\breve{F}'),\ \alpha,\ \alpha'\big)$$

tel que $(F', \breve{F}')$ soit un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$, $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} id_{\underline{C}}$, $\alpha' : FF' \xrightarrow{\sim} id_{\underline{C}'}$ des $\otimes$-isomorphismes vérifiant (1). $((F,\breve{F}), (F',\breve{F}'), \alpha, \alpha')$ est appelé <u>quadruple de $\otimes$-équivalence</u> entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$.

Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories et $((F,\breve{F}), (F',\breve{F}'), \alpha, \alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. On a les propositions suivantes:

<u>Proposition 4.</u> — $(F, \breve{F})$ est compatible avec les contraintes d'associativité a, a' données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(F', \breve{F}')$ l'est.

<u>Démonstration.</u> — En raison de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si $(F', \breve{F}')$ est compatible avec a, a', alors il en est de même de $(F, \breve{F})$, i.e le diagramme (1) dans (§4, n°2) est commutatif. Or ce diagramme se retrouve en la région (II) (à image par F' près) du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F'FX \otimes (F'FY \otimes F'FZ) \arrow[r, "id \otimes \breve{F}'"] \arrow[d, "id \otimes \breve{F}'F"'] \arrow[dddddd, bend right=60, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'FX \otimes F'(FY \otimes FZ) \arrow[r, "\breve{F}'"] \arrow[d, "id \otimes F'(\breve{F})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'(FX \otimes (FY \otimes FZ)) \arrow[dddddd, bend left=60, "F'a'"] \\
F'FX \otimes F'F(Y \otimes Z) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\breve{F}'F"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'FX \otimes F'F(Y \otimes Z) \arrow[d, "\breve{F}'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'FX \otimes F(FY \otimes FZ) \arrow[l, "id \otimes F'(\breve{F})"'] \arrow[u, "\breve{F}'"'] \arrow[d, "\breve{F}'"] \\
F'F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "F'Fa"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{X})"] & F'(FX \otimes F(Y \otimes Z)) \arrow[l, "F'(\breve{F})"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & F'(FX \otimes (FY \otimes FZ)) \arrow[l, "F'(id \otimes \breve{F})"'] \arrow[d, "F'a'"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{XI})"] & {} \\
F'F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F'(F(X \otimes Y) \otimes FZ) \arrow[l, "F'(\breve{F})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F'((FX \otimes FY) \otimes FZ) \arrow[l, "F'(\breve{F} \otimes id)"'] \arrow[d, "F'(\breve{F} \otimes id)"] \\
F'F(X \otimes Y) \otimes F'FZ \arrow[u, "\breve{F}'F"] \arrow[r, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & F'F(X \otimes Y) \otimes F'FZ \arrow[u, "\breve{F}'"'] \arrow[r, "\breve{F}'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & F'(F(X \otimes Y) \otimes FZ) \\
(F'FX \otimes F'FY) \otimes F'FZ \arrow[u, "\breve{F}'F \otimes id"] \arrow[r, "\breve{F}' \otimes id"] & F'(FX \otimes FY) \otimes F'FZ \arrow[u, "F'(\breve{F}) \otimes id"'] \arrow[r, "\breve{F}'"] & F'((FX \otimes FY) \otimes FZ) \arrow[u, "F'(\breve{F} \otimes id)"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) résulte de la définition de $\breve{F'F}$; celle de (II), (VII), (XI) est évidente ; celle de (IV), (IX) vient de la fonctorialité de $\breve{F}'$; celle de (X) s'obtient en appliquant (§4, n°2, Prop.5) au $\otimes$-foncteur $(F'F, \breve{F'F})$ isomorphe au $\otimes$-foncteur $(id_{\underline{C}}, id)$ compatible avec les contraintes d'associativité égales à a, par le $\otimes$-isomorphisme α ; enfin celle du circuit extérieur résulte de l'hypothèse. On en déduit la commutativité de la région (V), d'où celle de (1) dans (§4, n°2) puisque F' est pleinement fidèle.

<u>Proposition 5.</u>– $(F, \breve{F})$ est compatible avec les contraintes de commutativité c, c' données respectivement sur $\underline{C}, \underline{C}'$ si et seulement si $(F', \breve{F}')$ l'est.

<u>Démonstration.</u>– De la même manière que dans la proposition 4, nous considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F'FX \otimes F'FY \arrow[r, equal] \arrow[d, "\breve{F}'"'] \arrow[ddd, bend right=60, "c"'] \arrow[ddd, phantom, bend right=30, "(\mathrm{IV})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'FX \otimes F'FY \arrow[d, "\breve{F'F}"] \arrow[ddd, bend left=60, "c"] \arrow[ddd, phantom, bend left=30, "(\mathrm{V})"] \\
F'(FX \otimes FY) \arrow[r, "F'(\breve{F})"] \arrow[d, "F'c'"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'F(X \otimes Y) \arrow[d, "F'Fc"] \\
F'(FY \otimes FX) \arrow[r, "F'(\breve{F})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'F(Y \otimes X) \\
F'FY \otimes F'FX \arrow[r, equal] \arrow[u, "\breve{F}'"] & F'FY \otimes F'FX \arrow[u, "\breve{F'F}"']
\end{tikzcd}$$

où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $\breve{F'F}$; celle de (V) de l'application de (§4, n°2, Prop. 6) au $\otimes$-isomorphisme $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} id_{\underline{C}}$; d'où la proposition.

<u>Proposition 6.</u>– $(F, \breve{F})$ est compatible avec les unités $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ données respectivement sur $\underline{C}, \underline{C}'$ si et seulement si $(F', \breve{F}')$ l'est.

<u>Démonstration.</u>– Toujours par raison de symétrie, nous démontrons seulement que si $(F', \breve{F}')$ est compatible avec les unités considérées, il en est de même de $(F, \breve{F})$. D'abord nous définissons $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$

(4)
$$\begin{tikzcd}
\underline{1}' \arrow[r, "\hat{F}"] & F\underline{1} \arrow[d, equal] \\
FF'\underline{1}' \arrow[u, "\alpha'_{\underline{1}'}"] & F\underline{1} \arrow[l, "F(\hat{F}')"']
\end{tikzcd}$$

Nous devons maintenant démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "g'_{FX}"] \arrow[d, "F(g_X)"'] & \underline{1}'\otimes FX \arrow[d, "\hat{F}\otimes id"] \\
F(\underline{1}\otimes X) & F\underline{1}\otimes FX \arrow[l, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underline{1}\otimes X & F'F(\underline{1}\otimes X) \arrow[l, "\alpha'_{\underline{1}\otimes X}"'] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[l, "F'(\check{F})"'] \arrow[r, equal] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[d, "F'(F(\hat{F}')\otimes id)"] \arrow[r, equal] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[u, "g_X"] \arrow[d, "g_X"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{I}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & F'FX \arrow[l, "\alpha'_X"'] \arrow[u, "F'F(g_X)"'] \arrow[r, "F'(g'_{FX})"] \arrow[d, "g_{F'FX}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{II}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & F'(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[u, "F'(\hat{F}\otimes id)"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & F'(FF'\underline{1}'\otimes FX) \arrow[l, "F'(\alpha'_{\underline{1}'}\otimes id)"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{IV}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VIII}"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[l, "F'(F(\hat{F}')\otimes id)"'] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IX}"] & \underline{1}\otimes F'FX \arrow[l, "id\otimes\alpha'_X"'] \arrow[r, "\hat{F}'\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\alpha_X"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{X}"] & F'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{XI}"] & F'FF'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[l, "F(\alpha'_{\underline{1}'})\otimes id"'] \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[d, "\alpha_{F'\underline{1}'}\otimes\alpha_X"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{XII}"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[l, "F'F(\hat{F}')\otimes id"'] \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[d, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_X"] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[r, equal] & \underline{1}\otimes X \arrow[r, equal] & \underline{1}\otimes X \arrow[u, "\hat{F}'\otimes\alpha_X^{-1}"'] \arrow[r, "\hat{F}'\otimes id"] & F'\underline{1}'\otimes X & \underline{1}\otimes X \arrow[l, "\hat{F}'\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

où nous avons immédiatement la commutativité des régions (IX), (IX), (X). Pour les autres régions, la commutativité de (I), (XII) découle de la naturalité de α ; celle de (III) résulte de la définition de $\hat{F}$ (Diag. (4)) ; celle de (V) de la naturalité de g ; celle de (VI) de l'hypothèse ; celle de (VII), (VIII) de la naturalité de $\check{F}'$; celle de (XI) de l'égalité $F'\alpha'_{\underline{1}'} = \alpha_{F'\underline{1}'}$ (For. (1)) ; enfin celle du circuit extérieur vient du fait que α est un $\otimes$-morphisme (Diag. (3)). D'où la commutativité de la région (II) qui est l'image par F' du diagramme dont nous voulons démontrer la commutativité. On a la proposition en tenant compte du fait que F' est pleinement fidèle, la démonstration pour d_X, d'_{FX} étant analogue.

<u>Définition 2</u>.– Soit $(F,\check{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur avec F pleinement fidèle d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$ munie d'une contrainte d'associativité a' (resp. commutativité c'). Le diagramme commutatif (1) du (§4, n°2) (resp. le diagramme commutatif (2) du (§4, n°2)) montre qu'il existe sur $\underline{C}$ une et une seule contrainte d'associativité (resp. commutativité) compatible avec $(F,\check{F})$ et a' (resp. c'). On l'appelle contrainte d'associativité (resp. commutativité) <u>induite</u> par $(F,\check{F})$, et on la note F^*a' (resp. F^*c').

<u>Proposition 7</u>.– Soient $(F,\check{F}), (G,\check{G}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ des $\otimes$-foncteurs avec F, G pleinement fidèles, et soit $\alpha : F \xrightarrow{\sim} G$ un $\otimes$-isomorphisme. Soit a' (resp. c') une contrainte d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}'$. Alors $F^*a' = G^*a'$ (resp. $F^*c' = G^*c'$).

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la définition 2, on a $(F,\check{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité F^*a', a' (resp. avec les contraintes de commutativité F^*c', c'). Or $(G,\check{G})$ est aussi compatible avec les contraintes d'associativités F^*a', a' (resp. avec les contraintes de commutativité F^*c', c') (§4, n°2, Prop. 5 (resp. Prop. 6)). D'où $F^*a' = G^*a'$ (resp. $F^*c' = G^*c'$) en vertu de l'unicité de G^*a' (resp. G^*c').

Proposition 8.— Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\check{F}),(F',\check{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. Les applications

$$a' \longmapsto F^*(a') \quad (\text{resp. } c' \longmapsto F^*(c'))$$
$$a \longmapsto F'^*(a) \quad (\text{resp. } c \longmapsto F'^*(c))$$

entre l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}$ et l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}'$ sont inverses l'une de l'autre.

Démonstration.— Posons $a = F^*(a')$ (resp. $c = F^*(c')$), on a $(F,\check{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité (resp. commutativité) a, a' (resp. c, c'), d'où $(F',\check{F}')$ aussi (Prop. 4). Par conséquent $F'^*(a) = a'$ (resp. $F'^*(c) = c'$). Inversement, posons $a' = F'^*(a)$ (resp. $c' = F'^*(c)$). On a $(F',\check{F}')$ compatible avec les contraintes d'associativité (resp. commutativité) a, a' (resp. c, c') ; il en est de même donc de $(F,\check{F})$. D'où $a = F^*(a')$ (resp. $c = F^*(c')$).

Proposition 9.— Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\check{F}),(F',\check{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. Soit $(\underline{1}, g, d)$ une unité pour $\underline{C}$. Alors $(\underline{1}' = F\underline{1}, g', d')$ avec g', d' définis par les diagrammes commutatifs

$$(5)\qquad \begin{tikzcd} FF'X' \arrow[r, "F(g_{F'X'})"] \arrow[d, "\alpha'_{X'}"'] & F(\underline{1}\otimes F'X') & F\underline{1}\otimes FF'X' \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "id\otimes\alpha'_{X'}"] \\ X' \arrow[rr, "g'_{X'}"] & & F\underline{1}\otimes X' \end{tikzcd}$$

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} FF'X' \arrow[r, "F(d_{F'X'})"] \arrow[d, "\alpha'_{X'}"'] & F(F'X'\otimes\underline{1}) & FF'X'\otimes F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "\alpha'_{X'}\otimes id"] \\ X' \arrow[rr, "d'_{X'}"] & & X'\otimes F\underline{1} \end{tikzcd}$$

est une unité pour $\underline{C}'$, et $(F,\check{F})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$.

Démonstration.— Nous allons d'abord démontrer $g'_{\underline{1}} = d'_{\underline{1}}$. Pour cela, considérons d'abord le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[d, "d_{\underline{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'F\underline{1} \arrow[l, "\alpha_{\underline{1}}"'] \arrow[r, "g_{F'F\underline{1}}"] \arrow[d, "d_{F'F\underline{1}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes F'F\underline{1} \arrow[d, "id\otimes\alpha_{\underline{1}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'F\underline{1} \arrow[l, "g_{F'F\underline{1}}"'] \arrow[d, "\alpha_{\underline{1}}"] \\ \underline{1}\otimes\underline{1} & F'F\underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[l, "\alpha_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[r, "\alpha_{\underline{1}}\otimes id"'] \arrow[ur, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_{\underline{1}}^{-1}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})", shift left=2] & \underline{1}\otimes\underline{1} & \underline{1} \arrow[l, "g_{\underline{1}}"] \end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la naturalité de d, g respectivement ; celle de (III) est évidente ; enfin celle du circuit extérieur découle de la relation $d_{\underline{1}} = g_{\underline{1}}$. D'où la commutativité de (II).

Ensuite considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
FF'F\underline{1} \arrow[r, "F(g_{F'F\underline{1}})"] \arrow[d, "F(d_{F'F\underline{1}})"'] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "(\mathrm{I})"] & F(\underline{1}\otimes F'F\underline{1}) & F\underline{1}\otimes FF'F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "id\otimes\alpha'_{F\underline{1}}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "(\mathrm{III})"] \\
F(F'F\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[ur, "F(\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_{\underline{1}}^{-1})"] & FF'F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[r, "\alpha'_{F\underline{1}}\otimes id"'] \arrow[ur, "F\alpha_{\underline{1}}\otimes F\alpha_{\underline{1}}^{-1}"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{II})"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1}
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) est établie ci-dessus ; celle de (II) résulte de la fonctorialité de $\check{F}$ et celle de (III) des relations (4). On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui, d'après la définition de g', d' par les diagrammes commutatifs (5) et (6), nous donne $g'_{\underline{1}} = d'_{\underline{1}}$.

Démontrons maintenant que $(F, \check{F})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$. Nous démontrons seulement la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(g_X)"] \arrow[d, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1}\otimes X) \\
\underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

où $\hat{F} = id_{F\underline{1}}$, la démonstration pour d_X, d'_{FX} étant semblables. Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& FX \arrow[rr, "F(g_X)"] \arrow[d, "\alpha'^{-1}_{FX}"'] \arrow[ddddd, bend right=70, "g'_{FX}"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & F(\underline{1}\otimes X) \arrow[d, "F(id\otimes\alpha_X^{-1})"] & \\
& FF'FX \arrow[rr, "F(g_{F'FX})"] \arrow[d, "F(g_{F'FX})"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{II})"] & & F(\underline{1}\otimes F'FX) \arrow[d, equal] & \\
(\mathrm{V}) & F(\underline{1}\otimes F'FX) \arrow[rr, equal] & & F(\underline{1}\otimes F'FX) & (\mathrm{VI}) \\
& F\underline{1}\otimes FF'FX \arrow[rr, equal] \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[d, "id\otimes\alpha'_{FX}"'] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & & F\underline{1}\otimes FF'FX \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, "id\otimes F\alpha_X"] & \\
& F\underline{1}\otimes FX \arrow[rr, equal] & & F\underline{1}\otimes FX \arrow[uuuu, bend right=70, "\check{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité de la région (I) résulte des relations (1) et de la naturalité de g ; celle de (II), (III) est évidente ; celle de (IV) découle de (1) ; celle de (V) de la définition de g' par le diagramme commutatif (5) ; celle de (VI) de la fonctorialité de $\check{F}$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui est celle voulue.

2. Transport de structures.

Définition 3.– Soient $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ une équivalence de catégories et $F' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un quasi-inverse de F. On a $F'F \xrightarrow[\sim]{\alpha} id_{\underline{C}}$, $FF' \xrightarrow[\sim]{\alpha'} id_{\underline{C}'}$, avec α, α' vérifiant les relations (1) du n°1. Supposons que $\underline{C}$ soit munie d'une structure $\otimes$. Définissons une loi $\otimes$ sur $\underline{C}'$ en posant

$$(7)\qquad \begin{aligned} X' \otimes Y' &= F(F'X' \otimes F'Y') \\ u' \otimes v' &= F(F'u' \otimes F'v') \end{aligned}$$

pour $X', Y' \in Ob\,\underline{C}'$ et $u', v' \in Fl\,\underline{C}'$. On dit que la loi $\otimes$ définie par les formules (7) est obtenue par transport de la loi $\otimes$ dans $\underline{C}$ au moyen de (F, F', α, α').

Proposition 10.– Les hypothèses étant celles de la définition 3 et la loi $\otimes$ sur $\underline{C}'$ celle par transport au moyen de (F, F', α, α'), il existe des isomorphismes fonctoriels

$$FX \otimes FY \xrightarrow{\ \check{F}\ } F(X \otimes Y)$$

$$F'X' \otimes F'Y' \xrightarrow{\ \check{F}'\ } F'(X' \otimes Y')$$

tels que α, α' soient des $\otimes$-morphismes.

Démonstration.– Supposons qu'il existe $\check{F}$ et $\check{F}'$ tels que α, α' soient des $\otimes$-morphismes. Nous devons donc avoir la commutativité du diagramme (2) (n°1) qui exprime que α' est un $\otimes$-morphisme. En vertie de (7) nous avons $F'(X'\otimes Y') = F'F(F'X'\otimes F'Y')$. Pour cette raison, posons

$$\check{F}'_{X',Y'} = \alpha^{-1}_{F'X'\otimes F'Y'} : F'X'\otimes F'Y' \longrightarrow F'(X'\otimes Y')$$

ce qui donne, compte tenu des relations (1) et (7)

$$F(\check{F}'_{X',Y'}) = F(\alpha^{-1}_{F'X'\otimes F'Y'}) = \alpha'^{-1}_{F(F'X'\otimes F'Y')} = \alpha'^{-1}_{X'\otimes Y'}$$

Par suite, pour avoir le diagramme (2) commutatif, nous devons poser

$$\check{F}_{F'X',F'Y'} = \alpha'_{X'} \otimes \alpha'_{Y'}$$

ou

$$\check{F}_{F'X',F'Y'} = F(F'\alpha'_{X'} \otimes F\alpha'_{Y'})$$

compte tenu de (7). Il nous reste à définir $\check{F}_{X,Y}$, pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} FF'FX \otimes FF'FY & \xrightarrow{F\alpha_X \otimes F\alpha_Y} & FX \otimes FY \\ \check{F}_{F'FX,F'FY} \downarrow & & \downarrow \check{F}_{X,Y} \\ F(F'FX \otimes F'FY) & \xrightarrow{F(\alpha_X \otimes \alpha_Y)} & F(X\otimes Y) \end{array}$$

ce qui donne

$$\check{F}_{X,Y} = F(\alpha_X \otimes \alpha_Y)(\alpha'_{FX} \otimes \alpha'_{FY})(F\alpha^{-1}_X \otimes F\alpha^{-1}_Y)$$

ou, compte tenu de (1)

$$\check{F}_{X,Y} = F(\alpha_X \otimes \alpha_Y)$$

Donc, en appliquant la proposition 2, on peut conclure qu'avec

(8) $$\check{F}_{X,Y} = F(\alpha_X \otimes \alpha_Y), \quad \check{F}'_{X',Y'} = \alpha^{-1}_{F'X'\otimes F'Y'}$$

α, α' sont des $\otimes$-morphismes, ce qui achève la démonstration.