

Schulmathematik, SoSe 22

Blatt 7

Aufgabe 27 Beweisen Sie die Unmöglichkeit der Kubatur der Kugel.

D.h. zeigen Sie: Es kann mit Zirkel und Lineal keine Strecke von Länge a konstruiert werden, für welche ein Würfel mit einer Kantenlänge a dasselbe Volumen hat wie eine Kugel von Radius 1.

Aufgabe 28

(1) Benutzen Sie die Heronsche Formel, um den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seiten von Länge 17, 17 und 16 zu bestimmen.

(2) Wir betrachten im \mathbb{R}^3 das Oktaeder mit den Ecken $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Skizzieren Sie dieses Oktaeder.

Berechnen Sie sein Volumen zum einen mittels der Volumenformel für Pyramiden: Das Volumen einer Pyramide ist das Produkt aus dem Flächeninhalt der Grundseite und der Höhe, geteilt durch 3.

Berechnen Sie sein Volumen zum anderen mit der Cayley-Menger-Determinante, angewandt auf ein Tetraeder, welches drei Eckpunkte mit dem Oktaeder gemeinsam hat und den Mittelpunkt des Oktaeders als vierte Ecke.

Vergleichen Sie die Resultate.

Aufgabe 29 Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heiße *konstruierbar*, wenn der Punkt $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

(1) Es sind a und b genau dann konstruierbar, wenn der Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

(2) Sind a und b konstruierbar und ist $b \neq 0$, dann sind auch ab und $\frac{1}{b}$ konstruierbar. Verwenden Sie hierzu Strahlensatz-Konstruktionen.

(3) Ist a konstruierbar, dann auch \sqrt{a} .

(4) Sind a und b konstruierbar, dann ist $a + bi$ in einer multiquadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} enthalten.

Aufgabe 30 Sei P_n ein regelmiges n -Eck, das in einem Kreis von Radius 1 eingeschrieben ist. Kann P_n mit Zirkel und Lineal konstruiert werden? Führen Sie eine Konstruktion durch oder beweisen Sie, dass diese unmöglich ist.

(1) $n = 8$

(2) $n = 11$