M. Künzer, A. Zvonareva Abgabe bis Di 19.07.2022

Schulmathematik, SoSe 22

Blatt 6

Aufgabe 21 Sei $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Eine Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ heißt eine *Approximation* von α von Ordnung t, falls $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^t}$ ist, wobei $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Es heißt α *approximierbar* von Ordnung t, falls sie unendlich viele verschiedene Approximationen von Ordnung t hat.

Sei nun α algebraisch. Wir wählen ein $P(X) \in \mathbb{Z}[X] \smallsetminus \{0\}$ von Grad d mit $P(\alpha) = 0$. Sei $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ein Intervall, das außer α keine weiteren Nullstellen von $P(X)$ enthält, für ein geeignetes $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $M \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt mit $|P'(x)| \leqslant M$ für $x \in I$.

(1) Sei $t \geqslant 1$. Zeigen Sie: Es gibt nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q}$ von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \notin I$. Hinweis: Begrenzen Sie den Wert von q.

(2) Zeigen Sie: $|P(\frac{p}{q})| \geqslant \frac{1}{q^d}$ für $\frac{p}{q} \in I$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Folgern Sie mit dem Mittelwertsatz, angewandt auf $P(x)$: $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{q^d M}$.

(3) Sei $t > d$. Zeigen Sie mit (2), dass es nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q}$ von α von Ordnung t gibt mit $\frac{p}{q} \in I$.

(4) Sei $t > d$. Folgern Sie aus (1) und (3): Es ist α nicht approximierbar von Ordnung t.

Aufgabe 22 Sei $\alpha = [x_1, x_2, x_3, \dots]$ ein unendlicher Kettenbruch, wobei $x_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ for $k \geqslant 1$. Wir verwenden die Standardbezeichnungen p_n, q_n.

(1) Zeigen Sie: Es ist $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{q_n^2}$ für $n \geqslant 2$.

(2) Folgern Sie aus (1): Jede irrationale Zahl ist von Ordnung 2 approximierbar.

Aufgabe 23 Betrachten wir den Kettenbruch $\alpha = [x_1, x_2, x_3, \dots] = [10^{1!}, 10^{2!}, 10^{3!}, \dots]$. Wir verwenden Standardbezeichnungen p_n, q_n.

(1) Zeigen Sie: $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{10^{(n+1)!}}$ für $n \geqslant 2$.

(2) Zeigen Sie: $\frac{q_k}{q_{k-1}} \leqslant x_k + 1$ für $k \geqslant 2$.

Folgern Sie: $q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{q_2}{q_1} \leqslant 10^{n! \cdot 2}$ für $n \geqslant 2$.

(3) Folgern Sie aus (1) und (2): Für jedes $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ gilt: Es ist $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{q_n^t}$ für $n \geqslant 2t - 1$.

(4) Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 21: α ist transzendent.

Aufgabe 24 Stellen Sie die folgenden symmetrischen Polynome in $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen dar.

(1) $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

(2) $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 3X_1X_2X_3$

(3) $(X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3)$

(4) $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 - 2X_1^2X_2^2 - 2X_2^2X_3^2 - 2X_3^2X_1^2$