M. Künzer, A. Zvonareva Abgabe bis Di 05.07.2022

Schulmathematik, SoSe 22

Blatt 5

Aufgabe 17 (Lemma von Gauß)
Sei $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \smallsetminus \{0\}$. Es heißt $f(X)$ *primitiv*, falls $\mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) = 1$ ist. Es heißt $f(X)$ *irreduzibel*, wenn $f(X) \notin \{-1, +1\}$, wenn aber in einer Zerlegung $f(X) = g(X) \cdot h(X)$ mit $g(X),\, h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ entweder $g(X) \in \{-1, +1\}$ oder $h(X) \in \{-1, +1\}$ ist. Kurz, wenn man $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ nur trivial in Faktoren zerlegen kann.

(1) Seien $g(X) = \sum_{j=0}^{\ell} b_j X^j,\ h(X) = \sum_{k=0}^{m} c_k X^k \ \in\ \mathbb{Z}[X] \smallsetminus \{0\}$ primitiv.

Betrachten Sie eine Primzahl p. Sei $\hat{j} \geqslant 0$ minimal mit p teilt nicht $b_{\hat{j}}$. Sei $\hat{k} \geqslant 0$ minimal mit p teilt nicht $c_{\hat{k}}$. Zeigen Sie: p teilt nicht den Koeffizienten von $X^{\hat{j}+\hat{k}}$ in $g(X) \cdot h(X)$.

Beweisen Sie damit: $g(X) \cdot h(X)$ ist primitiv.

(2) Sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X] \smallsetminus \{0\}$ ein primitives Polynom von Grad $\geqslant 1$.

Beweisen Sie: Ist $f(X) = g(X) \cdot h(X)$ mit $g(X),\, h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und sind $u,\, v \in \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ mit $u \cdot g(X),\ v \cdot h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ primitiv gewählt, dann sind $f(X)$ und $u \cdot v \cdot f(X)$ primitiv. Folgern Sie: $u \cdot v \in \{-1, +1\}$.

Beweisen Sie damit: $f(X)$ ist genau dann in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel, wenn $f(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 18 (Eisensteinkriterium)
Sei $f(X) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom von Grad $n \geqslant 1$. Es ist also $a_n = 1$.

Sei p eine Primzahl. Sei p ein Teiler der Koeffizienten $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1}$. Sei p^2 kein Teiler des Koeffizienten a_0.
Beweisen Sie: Falls $g(X),\, h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ von Grad $\geqslant 1$ vorliegen mit $f(X) = g(X) \cdot h(X)$, dann teilt p alle Koeffizienten von $g(X)$ und $h(X)$, ausgenommen die Leitkoeffizienten.
Beweisen Sie: $f(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.
Folgern Sie unter Verwendung von Aufgabe 17.(2): $f(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 19

(1) Zeigen Sie: $X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 6X + 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(2) Zeigen Sie: $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(3) Sei p eine Primzahl.

Zeigen Sie mit Eisensteinkriterium: $((X+1)^p - 1)/X$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Folgern Sie: $(X^p - 1)/(X - 1)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Folgern Sie: $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_{\zeta_p}(X)$.

Aufgabe 20 Sei $t \in \mathbb{C}$ transzendent. Sei $a \in \mathbb{C}$ algebraisch.
Beweisen Sie, dass die folgenden Zahlen transzendent sind.

(1) $t + a$

(2) $t \cdot a$, falls $a \neq 0$.

(3) $f(t)$, wobei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad $\geqslant 1$.