M. Künzer, A. Zvonareva Abgabe bis Di 21.06.2022

Schulmathematik, SoSe 22

Blatt 4

Aufgabe 13 Bestimmen Sie die Werte der folgenden Kettenbrüche.

(1) $[\,\overline{3}\,]$

(2) $[\,\overline{1,4,2}\,]$

(3) $[\,\overline{1,1,2,2}\,]$

Aufgabe 14

(1) Entwickeln Sie $\frac{1}{1+x}$ für $x \in (-1,+1)$ in eine Potenzreihe vermittels der geometrischen Reihe. Integrieren Sie dies zu einer Potenzreihenentwicklung der Form

$$\ln(x+1) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

für $x \in (-1,+1)$, wobei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \geqslant 0$.

Begründen Sie mit dem Abelschen Grenzwertsatz: Diese Gleichheit gilt auch für $x = +1$.

(2) Bestimmen Sie mit dem Satz von Euler eine verallgemeinerte Kettenbruchentwicklung für $\ln(x+1)$, die für $x \in (-1,+1]$ konvergiert.

(3) Bestimmen Sie insbesondere eine verallgemeinerte Kettenbruchentwicklung für $\ln(2)$.

Aufgabe 15 (Pellsche Gleichung)

(1) Sei $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ kein Quadrat einer ganzen Zahl.

Seien $x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ mit $\sqrt{d} = [x_1, \overline{x_2, x_3}]$ gegeben.

Seien p_j und q_j für $j \geqslant -1$ bezüglich dieses Kettenbruchs gebildet.

Aus $\sqrt{d} = [x_1, x_2, x_3, [\overline{x_2, x_3}]]$ folgern Sie: $\sqrt{d} = \frac{[\overline{x_2,x_3}]p_3 + p_2}{[\overline{x_2,x_3}]q_3 + q_2}$.

Verwenden Sie $[\overline{x_2, x_3}] = (\sqrt{d} - x_1)^{-1}$, um $\sqrt{d} = \frac{p_3 + p_2(\sqrt{d} - x_1)}{q_3 + q_2(\sqrt{d} - x_1)}$ zu erhalten.

Schließen Sie mit Koeffizientenvergleich bei $\sqrt{d}$ und bei 1 auf $p_2^2 - dq_2^2 = 1$.

Mit anderen Worten, $(x,y) = (p_2, q_2)$ löst die Pellsche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$.

(2) Berechnen Sie $[2, \overline{2,4}]$. Verwenden Sie dies, um $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 - 6y^2 = 1$ zu finden.

Aufgabe 16 Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_z(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

(1) $z = 3 + \sqrt{5}$

(2) $z = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}$