Schulmathematik, SoSe 22

Blatt 3

Aufgabe 9

(1) Sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(0)$ und $f(1)$ ungerade. Zeigen Sie: $f(X)$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{Z}$.

(2) Sei $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ nichtkonstant.
Man zeige: Es gibt $x, y \in \mathbb{C}$ mit $f(x,y) = 0$.

(3) Sei $f(X) \in \mathbb{C}[X]$, $f(X)$ nicht Nullpolynom. Zeigen Sie: $f(X)$ hat eine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $f(X)$ und $f'(X)$ eine gemeinsame Nullstelle haben.

Aufgabe 10 (Sturmsche Regel) Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen in $\mathbb{C}$, $f(X)$ nichtkonstant. Die Sturmsche Kette von $f(X)$ ist die folgende endliche Folge von Polynomen

$$p_0(X), p_1(X), \ldots, p_k(X),$$

wobei der Grad dieser Polynome streng monoton abnimmt und $p_k(X) \neq 0$ konstant ist:

$$\begin{array}{lcll} p_0(X) & := & f(X) & \\ p_1(X) & := & f'(X) & \\ p_i(X) & := & -r(p_{i-2}, p_{i-1})(X), & \text{wobei } r(p_{i-2}, p_{i-1})(X) \text{ den Rest bei der} \\ & & & \text{Polynomdivision von } p_{i-2}(X) \text{ durch } p_{i-1}(X) \text{ bezeichnet.} \end{array}$$

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\sigma(c)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $p_0(c), p_1(c), \ldots, p_k(c)$.

(1) Zeigen Sie: Die Kette $p_0(X), p_1(X), \ldots, p_k(X)$ existiert mit den angegebenen Eigenschaften.

(2) Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $p_i(X)$ mit $0 < i < k$, so ist $p_{i-1}(a) \neq 0$, $p_{i+1}(a) \neq 0$, und die Vorzeichen von $p_{i-1}(a)$ und $p_{i+1}(a)$ sind verschieden.

(3) Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $p_i(a) \neq 0, p_i(b) \neq 0$ für $0 \leq i \leq k$. Zeigen Sie: $f(X) = p_0(X)$ hat $\sigma(a) - \sigma(b)$ verschiedene Nullstellen in (a,b).

(4) Begründen Sie, dass wir die Anzahl der reellen Nullstellen von $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ damit bestimmen können.

Aufgabe 11 Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen des Polynoms

$$f(X) = 2X^5 - 10X^3 + 10X - 3 \in \mathbb{R}[X]$$

unter Verwendung der Sturmschen Regel.

Aufgabe 12

(1) Bestimmen Sie experimentell den Beginn der Kettenbruchentwicklung von $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$.
Stellen Sie eine Vermutung zu dieser Kettenbruchentwicklung auf.

(2) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{11}$.

(3) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{27}$.