Schulmathematik

vom höheren Standpunkt

Matthias Künzer

Universität Stuttgart

Sommersemester 2021/22

25. August 2022

Inhalt

Kapitel 1

Polynome

1.1 Das Polynom $X^m - z$

Sei $z \in \mathbb{C}$. Sei $m \geqslant 1$.

Definition. Es heißt $w \in \mathbb{C}$ eine *m-te Wurzel* von z, falls $w^m = z$ ist.

Wir wollen die Menge

$$\{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w^m = z \,\}$$

der m-ten Wurzeln von z bestimmen. Mit anderen Worten, wir wollen die Nullstellen des Polynoms

$$X^m - z$$

bestimmen.

Erinnerung. Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp(t\mathrm{i}) \;=\; \mathrm{e}^{t\mathrm{i}} \;=\; \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\;.$$

• Zunächst betrachten wir dazu den Spezialfall $X^m - 1$.

Definition. Sei $\zeta_m := \exp(\frac{2\pi\mathrm{i}}{m})$ die *erste m-te Einheitswurzel.*

Bemerkung. Es ist

$$\{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w^m = 1 \,\} \;=\; \{\, \zeta_m^k \,:\, 0 \leqslant k \leqslant m-1 \,\} \;=\; \{\zeta_m^0, \ldots, \zeta_m^{m-1}\}\;.$$

Dies ist also die Menge der Nullstellen des Polynoms

$$X^m - 1\;.$$

Die Elemente dieser Menge liegen in der Zahlenebene auf dem Einheitskreis. Es ist $\zeta_m^0 = 1$ in dieser Menge enthalten. Die Elemente dieser Menge sind die Ecken eines regelmäßigen m-Ecks.

Beweis. Zunächst ist $(\zeta_m^k)^m = (\zeta_m^m)^k = 1^k = 1$ für $0 \leqslant k \leqslant m-1$.

Da die Elemente ζ_m^k für $0 \leqslant k \leqslant m-1$ paarweise verschieden sind, folgt, daß

$$(X - \zeta_m^0) \cdot \ldots \cdot (X - \zeta_m^{m-1}) \quad \text{ein Teiler von} \quad X^m - 1 \quad \text{ist.}$$

Ein Gradvergleich gibt $(X - \zeta_m^0) \cdot \ldots \cdot (X - \zeta_m^{m-1}) = X^m - 1$. Es folgt

$$\{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w^m = 1 \,\} \;=\; \{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w \text{ ist eine Nullstelle von } X^m - 1 \,\} \;=\; \{\zeta_m^0, \ldots, \zeta_m^{m-1}\}\,.$$

Die geometrische Behauptung ergibt sich schließlich aus $\zeta_m^k = \exp(\frac{2\pi \mathrm{i} k}{m})$, denn deswegen schließt die Strecke von 0 nach ζ_m^k mit der positiven reellen Achse den Winkel $\frac{2\pi k}{m}$ ein. ▫

• Nun zum Fall $X^m - z$. Sei $z \neq 0$.

Bemerkung. Es gibt genau ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und genau ein $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ mit $z = r \cdot \exp(\varphi \mathrm{i})$.

Hierbei ist $r = |z|$ und φ der Winkel, den die Strecke von 0 nach z mit der positiven reellen Achse einschließt.

Bemerkung. Sei $w_0 := \sqrt[m]{r} \cdot \exp(\frac{\varphi \mathrm{i}}{m}) \in \mathbb{C}$. Dann ist w_0 eine m-te Wurzel von z.

Beweis. Es ist $w_0^m = (\sqrt[m]{r})^m \cdot (\exp(\frac{\varphi \mathrm{i}}{m}))^m = r \cdot \mathrm{e}^{\frac{\varphi \mathrm{i}}{m} \cdot m} = r \cdot \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}} = r \cdot \exp(\varphi \mathrm{i}) = z$.

Lemma. Wie oben schreiben wir $z = r \cdot \exp(\varphi \mathrm{i})$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Sei $w_0 := \sqrt[m]{r} \cdot \exp(\frac{\varphi \mathrm{i}}{m}) \in \mathbb{C}$.

Es ist

$$\{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w^m = z \,\} \;=\; \{\, w_0 \cdot \zeta_m^k \,:\, 0 \leqslant k \leqslant m-1 \,\}$$

die Menge der m-ten Wurzeln von z.

Beweis.

Ad $(\supseteq)$. Es ist $(w_0 \cdot \zeta_m^k)^m = w_0^m \cdot \zeta_m^{mk} = z \cdot 1 = z$.

Ad $(\subseteq)$. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $w^m = 1$ gegeben. Dann ist $(w w_0^{-1})^m = w^m \cdot (w_0^m)^{-1} = z \cdot z^{-1} = 1$ und also $w \cdot w_0^{-1} = \zeta_m^k$ für ein $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Somit ist $w = w_0 \cdot \zeta_m^k$, wie behauptet. ▫

• Schließlich noch der Fall $X^m - 0$.

Bemerkung. Es ist

$$\{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w^m = 0 \,\} \;=\; \{0\}\,.$$

1.2 Diskriminanten

Definition. Sei $n \geqslant 1$. Sei $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 X^0 \in \mathbb{C}[X]$ ein normiertes Polynom.

(1) Sei
$$f(X) \;=\; (X - z_1) \cdot (X - z_2) \cdot \ldots \cdot (X - z_n)\;,$$
wobei $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $f(X)$ sind.

Sei dann
$$\Delta(f(X)) \;:=\; \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (z_j - z_k)^2$$
die *Diskrimininante* von $f(X)$.

Die Diskriminante hängt nicht von der gewählten Reihenfolge der Nullstellen von $f(X)$ ab, und damit in der Tat nur von $f(X)$.

(2) Es heißt $z \in \mathbb{C}$ eine *Nullstelle* von $f(X)$, falls $f(z) = 0$ ist, d.h. falls es $g(X) \in \mathbb{C}[X]$ gibt mit $f(X) = g(X) \cdot (X - z)$.

Es heißt $z \in \mathbb{C}$ eine *mehrfache* Nullstelle von $f(X)$, falls es $g(X) \in \mathbb{C}[X]$ gibt mit $f(X) = g(X) \cdot (X - z)^2$.

Bemerkung. Es hat $f(X)$ genau dann eine mehrfache Nullstelle, wenn $\Delta(f(X)) = 0$ ist.

Beispiel.

(1) Sei $f(X) = (X^2 - 1) = (X - 1)(X + 1)$. Dann ist $\Delta(f(X)) = (1 - (-1))^2 = 4$.

(2) Sei $f(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$. Dann ist $\Delta(f(X)) = (1-2)^2 \cdot (1-3)^2 \cdot (2-3)^2 = 4$.

(3) Sei $f(X) = (X - 3\mathrm{i})(X + 2)(X - 1)^3$. Dann ist $\Delta(f(X)) = 0$, da $f(X)$ die mehrfache Nullstelle $z = 1$ hat.

(4) Sei $f(X) = X^3 - 1 = (X - 1)(X - \zeta_3)(X - \zeta_3)^2$. Unter Beachtung von $1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 0$ und $\zeta_3^3 = 1$ wird

$$\begin{aligned}
\Delta(X^3 - 1) &= (1 - \zeta_3)^2 \cdot (1 - \zeta_3^2)^2 \cdot (\zeta_3 - \zeta_3^2)^2 \\
&= (1 - 2\zeta_3 + \zeta_3^2) \cdot (1 - 2\zeta_3^2 + \zeta_3) \cdot (\zeta_3^2 - 2 + \zeta_3) \\
&= (-3\zeta_3) \cdot (3 + 3\zeta_3) \cdot (-3) \\
&= 27(\zeta_3)(1 + \zeta_3) \\
&= -27\;.
\end{aligned}$$

1.3 Polynome zweiten Grades

Wir betrachten das normierte Polynom zweiten Grades $X^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$.

Sei $X^2 + bX + c = (X - z_1) \cdot (X - z_2)$, wobei $z_1,\ z_2\ \in\ \mathbb{C}$.

Bemerkung. Es ist

$$\begin{array}{rcr} z_1 + z_2 & = & -b \\ z_1 \cdot z_2 & = & c \end{array}$$

Lemma. Wir erhalten die Diskriminante

$$\Delta(X^2 + bX + c) \ = \ b^2 - 4c.$$

Beweis. Zunächst ist

$$b^2 \ = \ (z_1 + z_2)^2 \ = \ z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 \ .$$

Es wird

$$\begin{array}{rcl} \Delta(X^2 + bX + c) & = & (z_1 - z_2)^2 \\ & = & z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2 \\ & = & (z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2) - 4z_1 z_2 \\ & = & b^2 - 4c \ . \end{array}$$

□

Lemma. Sei $w_0 \in \mathbb{C}$ eine 2-te Wurzel von $b^2 - 4c$.

Es ist

$$\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z^2 + bz + c = 0 \,\} \ = \ \left\{ \frac{1}{2}(-b + w_0),\ \frac{1}{2}(-b - w_0) \right\} \ .$$

Ist speziell $b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$ und $b^2 - 4c \geqslant 0$, dann können wir $w_0 = \sqrt{b^2 - 4c}$ nehmen und erhalten

$$\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z^2 + bz + c = 0 \,\} \ = \ \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c}),\ \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c}) \right\} \ .$$

Ist speziell $b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$ und $b^2 - 4c < 0$, dann können wir $w_0 = \mathrm{i}\sqrt{4c - b^2}$ nehmen und erhalten

$$\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z^2 + bz + c = 0 \,\} \ = \ \left\{ \frac{1}{2}(-b + \mathrm{i}\sqrt{4c - b^2}),\ \frac{1}{2}(-b - \mathrm{i}\sqrt{4c - b^2}) \right\} \ .$$

Beweis. Es ist $z^2 + bz + c = (z + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c$.

Also ist genau dann $z^2 + bz + c = 0$, wenn $(z + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$, d.h. wenn $(2z + b)^2 = b^2 - 4c$, d.h. wenn $2z + b$ eine 2-te Wurzel von $b^2 - 4c$ ist.

Da w_0 eine 2-te Wurzel von $b^2 - 4c$ ist und da $\zeta_2 = -1$ ist, ist dies nach dem Lemma in §1.1 genau dann der Fall, wenn

$$2z + b \ \in \ \{\, w_0 \cdot \zeta_2^k \,:\, 0 \leqslant k \leqslant 1 \,\} \ = \ \{\, w_0 \,,\, -w_0 \,\} \,,$$

d.h. wenn

$$z \ \in \ \left\{ \frac{1}{2}(-b + w_0)\,,\, \frac{1}{2}(-b - w_0) \right\} \,.$$

Bemerkung. Unter Verwendung der Nullstellen z_1 und z_2 erhalten wir nun abermals

$$\Delta(f(X)) \ = \ (z_1 - z_2)^2 \ = \ \left(\frac{1}{2}(-b + w_0) - \frac{1}{2}(-b - w_0)\right)^2 \ = \ w_0^2 \ = \ b^2 - 4c \,.$$

1.4 Polynome dritten Grades

Wir betrachten das normierte Polynom dritten Grades $X^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$.

Sei $X^3 + bX^2 + cX + d = (X - z_1) \cdot (X - z_2) \cdot (X - z_3)$, wobei $z_1,\ z_2,\ z_3 \ \in \ \mathbb{C}$.

Bemerkung. Es ist

$$\begin{array}{rcr} z_1 + z_2 + z_3 & = & -b \\ z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 & = & c \\ z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 & = & -d \end{array}$$

Lemma. Wir erhalten die Diskriminante

$$\Delta(X^3 + bX^2 + cX + d) \ = \ b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d + 18bcd - 27d^2 \,.$$

Falls $b = 0$ ist, dann ist speziell

$$\Delta(X^3 + cX + d) \ = \ -4c^3 - 27d^2 \,.$$

Beweis. Wir rechnen wie folgt.

$$\begin{array}{rcl}
-b^3 & = & (z_1 + z_2 + z_3)^3 \\
 & = & z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1^2z_3 + 3z_2^2z_3 + 3z_2^2z_1 + 3z_3^2z_1 + 3z_3^2z_2 + 6z_1z_2z_3 \\
-bc & = & (z_1 + z_2 + z_3)(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) \\
 & = & z_1^2z_2 + z_1^2z_3 + z_2^2z_3 + z_2^2z_1 + z_3^2z_1 + z_3^2z_2 + 3z_1z_2z_3 \\
b^2c^2 & = & ((z_1 + z_2 + z_3)(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3))^2 \\
 & = & (z_1^2z_2 + z_1^2z_3 + z_2^2z_3 + z_2^2z_1 + z_3^2z_1 + z_3^2z_2 + 3z_1z_2z_3)^2 \\
 & = & z_1^4z_2^2 + z_1^4z_3^2 + z_2^4z_3^2 + z_2^4z_1^2 + z_3^4z_1^2 + z_3^4z_2^2 + 9z_1^2z_2^2z_3^2 \\
 & & + 2z_1^4z_2z_3 + 2z_2^4z_1z_3 + 2z_3^4z_1z_2 \\
 & & + 2z_1^3z_2^2z_3 + 2z_1^3z_3^2z_2 + 2z_2^3z_1^2z_3 + 2z_2^3z_3^2z_1 + 2z_3^3z_1^2z_2 + 2z_3^3z_2^2z_1 \\
 & & + 2z_1^3z_2^3 + 2z_1^3z_3^3 + 2z_2^3z_3^3 \\
 & & + 2z_1^2z_2^2z_3^2 + 2z_1^2z_2^2z_3^2 + 2z_1^2z_2^2z_3^2 \\
 & & + 6z_1^3z_2^2z_3 + 6z_1^3z_3^2z_2 + 6z_2^3z_1^2z_3 + 6z_2^3z_3^2z_1 + 6z_3^3z_1^2z_2 + 6z_3^3z_2^2z_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & = & z_1^4 z_2^2 + z_1^4 z_3^2 + z_2^4 z_3^2 + z_2^4 z_1^2 + z_3^4 z_1^2 + z_3^4 z_2^2 + 15 z_1^2 z_2^2 z_3^2 \\
 & & + 2z_1^4 z_2 z_3 + 2z_2^4 z_1 z_3 + 2z_3^4 z_1 z_2 \\
 & & + 8z_1^3 z_2^2 z_3 + 8z_1^3 z_3^2 z_2 + 8z_2^3 z_1^2 z_3 + 8z_2^3 z_3^2 z_1 + 8z_3^3 z_1^2 z_2 + 8z_3^3 z_2^2 z_1 \\
 & & + 2z_1^3 z_2^3 + 2z_1^3 z_3^3 + 2z_2^3 z_3^3 \\
c^3 & = & (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)^3 \\
 & = & z_1^3 z_2^3 + z_1^3 z_3^3 + z_2^3 z_3^3 \\
 & & + 3z_1^3 z_2^2 z_3 + 3z_1^3 z_3^2 z_2 + 3z_2^3 z_1^2 z_3 + 3z_2^3 z_3^2 z_1 + 3z_3^3 z_1^2 z_2 + 3z_3^3 z_2^2 z_1 \\
 & & + 6z_1^2 z_2^2 z_3^2
\end{array}$$

Damit wird

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(X^3 + bX^2 + cX + d) & = & ((z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3))^2 \\
 & = & (z_1^2 z_2 - z_1^2 z_3 - z_1 z_3 z_2 + z_1 z_3^2 - z_2^2 z_1 + z_2 z_1 z_3 + z_2^2 z_3 - z_2 z_3^2)^2 \\
 & = & (z_1^2 z_2 - z_2^2 z_1 + z_3^2 z_1 - z_1^2 z_3 + z_2^2 z_3 - z_3^2 z_2)^2 \\
 & = & z_1^4 z_2^2 + z_2^4 z_1^2 + z_3^4 z_1^2 + z_1^4 z_3^2 + z_2^4 z_3^2 + z_3^4 z_2^2 \\
 & & - 2z_1^3 z_2^3 - 2z_1^3 z_3^3 - 2z_2^3 z_3^3 \\
 & & + 2z_1^3 z_2^2 z_3 + 2z_1^3 z_3^2 z_2 + 2z_1^3 z_2^2 z_3 + 2z_1^3 z_3^2 z_2 + 2z_1^3 z_2^2 z_3 + 2z_1^3 z_3^2 z_2 \\
 & & - 2z_1^4 z_2 z_3 - 2z_2^4 z_1 z_3 - 2z_2^4 z_1 z_3 \\
 & & - 6z_1^2 z_2^2 z_3^2 \\
 & = & b^2 c^2 \\
 & & - 4z_1^3 z_2^3 - 4z_1^3 z_3^3 - 4z_2^3 z_3^3 \\
 & & - 6z_1^3 z_2^2 z_3 - 6z_1^3 z_3^2 z_2 - 6z_1^3 z_2^2 z_3 - 6z_1^3 z_3^2 z_2 - 6z_1^3 z_2^2 z_3 - 6z_1^3 z_3^2 z_2 \\
 & & - 4z_1^4 z_2 z_3 - 4z_2^4 z_1 z_3 - 4z_2^4 z_1 z_3 \\
 & & - 21 z_1^2 z_2^2 z_3^2 \\
 & = & b^2 c^2 - 4c^3 \\
 & & + 6z_1^3 z_2^2 z_3 + 6z_1^3 z_3^2 z_2 + 6z_1^3 z_2^2 z_3 + 6z_1^3 z_3^2 z_2 + 6z_1^3 z_2^2 z_3 + 6z_1^3 z_3^2 z_2 \\
 & & - 4z_1^4 z_2 z_3 - 4z_2^4 z_1 z_3 - 4z_2^4 z_1 z_3 \\
 & & + 3z_1^2 z_2^2 z_3^2 \\
 & = & b^2 c^2 - 4c^3 - 4(-b^3)(-d) \\
 & & + 18z_1^3 z_2^2 z_3 + 18z_1^3 z_3^2 z_2 + 18z_1^3 z_2^2 z_3 + 18z_1^3 z_3^2 z_2 + 18z_1^3 z_2^2 z_3 + 18z_1^3 z_3^2 z_2 \\
 & & + 27 z_1^2 z_2^2 z_3^2 \\
 & = & b^2 c^2 - 4c^3 - 4b^3 d + 18(-bc)(-d) \\
 & & - 27 z_1^2 z_2^2 z_3^2 \\
 & = & b^2 c^2 - 4c^3 - 4b^3 d + 18bcd - 27d^2 \; .
\end{array}$$

Bemerkung. Die Substitution $X = Y - \frac{b}{3}$ liefert

$$\begin{array}{rcl}
X^3 + bX^2 + cX + d & = & (Y - \frac{b}{3})^3 + b(Y - \frac{b}{3})^2 + c(Y - \frac{b}{3}) + d \\
 & = & Y^3 - 3Y^2 \frac{b}{3} + 3Y \frac{b^2}{9} - \frac{b^3}{27} \\
 & & + bY^2 - 2bY \frac{b}{3} + \frac{b^3}{9} \\
 & & + cY - \frac{cb}{3} + d \\
 & = & Y^3 + (-\frac{b^2}{3} + c)Y + (\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d) \; .
\end{array}$$

Beim Bestimmen der Nullstellen können wir also ohne Einschränkung annehmen, es ist

$$b \;=\; 0\;.$$

Wir können ferner ohne Einschränkung annehmen, es ist

$$c \neq 0\;.$$

Bemerkung. Sei nun von

$$X^3 + cX + d \;\in\; \mathbb{C}[X]$$

die Nullstellen zu bestimmen, wobei $c \neq 0$.

Wir kürzen die Diskriminante ab zu $\Delta := \Delta(X^3 + cX + d) = -4c^3 - 27d^2$.

Wir kürzen $\zeta := \zeta_3 = \exp(\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}$ ab.

Fall $\Delta \neq 0$.

Wir substituieren

$$X \;=\; u - \frac{c}{3u}$$

und erhalten folgendes.

$$\begin{array}{rcl} X^3 + cX + d & = & (u - \frac{c}{3u})^3 + c(u - \frac{c}{3u}) + d \\ & = & u^3 - 3u^2\frac{c}{3u} + 3u\frac{c^2}{9u^2} - \frac{c^3}{27u^3} \\ & & + \, cu - \frac{c^2}{3u} + d \\ & = & u^3 + d - \frac{c^3}{27u^3} \end{array}$$

Für jedes $u \in \mathbb{C}$ mit

$$u^6 + du^3 - \frac{c^3}{27} \;=\; 0$$

ist also

$$u - \frac{c}{3u}$$

eine Nullstelle von $X^3 + cX + d$.

Man beachte, daß dabei wegen $c \neq 0$ ohnehin $u \neq 0$ folgt, weswegen die Division durch u möglich ist.

Lösen wir

$$t^2 + dt - \frac{c^3}{27} \;=\; 0\;.$$

Sei $w \in \mathbb{C}$ eine 2-te Wurzel von $d^2 - 4(-\frac{c^3}{27}) = d^2 + \frac{4c^3}{27} = -\frac{\Delta}{27}$. Wir erhalten die Nullstellen

$$t_1 \;:=\; \frac{1}{2}(-d + w) \qquad \text{und} \qquad t_2 \;:=\; \frac{1}{2}(-d - w)\;.$$

Beide sind ungleich 0, und es ist $t_1 \neq t_2$.

Wir wählen nun eine 3-te Wurzel $u \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ von t_1.

Dann sind $u\zeta$ und $u\zeta^2$ weitere 3-te Wurzeln von t_1.

Sei
$$v \;:=\; -\frac{c}{3u}\,.$$
Wir behaupten, es ist $v^3 \overset{!}{=} t_2$ und also $u^3 \neq v^3$. Dazu rechnen wir wie folgt.
$$\begin{array}{rcl}
(t-u^3)(t-v^3) & = & (t-u^3)(t+\frac{c^3}{27u^3}) \\
& = & t^2 + (-u^3 + \frac{c^3}{27u^3})t - \frac{c^3}{27} \\
& = & t^2 + dt - \frac{c^3}{27}\,,
\end{array}$$
letzteres, da
$$\left(-u^3 + \frac{c^3}{27u^3}\right) - d \;=\; -u^{-3}\left(u^6 + du^3 - \frac{c^3}{27}\right) \;=\; -u^3\left(t_1^2 + dt_1 - \frac{c^3}{27}\right) \;=\; 0\,.$$
Da nun u, ζu und $\zeta^2 u$ 3-te Wurzeln von t_1 und damit Nullstellen von $u^6 + du^3 - \frac{c^3}{27}$ sind, sind
$$\begin{array}{rclcl}
z_1 & := & u - \frac{c}{3u} & = & u + v \\
z_2 & := & u\zeta - \frac{c}{3u\zeta} & = & u\zeta + v\zeta^2 \\
z_3 & := & u\zeta^2 - \frac{c}{3u\zeta^2} & = & u\zeta^2 + v\zeta
\end{array}$$
Nullstellen von $X^3 + cX + d$.

Um nachzuweisen, daß dies alle Nullstellen davon sind, genügt es zu zeigen, daß z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sind. Dazu rechnen wir wie folgt. Zunächst seien
$$\alpha \;:=\; 1-\zeta\,, \qquad \beta \;:=\; 1-\zeta^2\,.$$
Da $\zeta^2 + \zeta + 1 = \frac{\zeta^3-1}{\zeta-1} = 0$ ist, werden
$$\begin{array}{rclclcl}
\alpha^2 & = & (1-\zeta)^2 & = & 1-2\zeta+\zeta^2 & = & -3\zeta \\
\alpha\beta & = & (1-\zeta)(1-\zeta^2) & = & 1-\zeta-\zeta^2+\zeta^3 & = & 3 \\
\beta^2 & = & (1-\zeta^2)^2 & = & 1-2\zeta^2+\zeta^4 & = & -3\zeta^2\,.
\end{array}$$
Somit ist
$$\begin{array}{rl}
& ((z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3))^2 \\
= & ((u(1-\zeta)+v(1-\zeta^2))(u(1-\zeta^2)+v(1-\zeta))(u(\zeta-\zeta^2)+v(\zeta^2-\zeta)))^2 \\
= & ((u\alpha+v\beta)(u\beta+v\alpha)\cdot\zeta\alpha(u-v))^2 \\
= & ((u\alpha\beta+uv(\alpha^2+\beta^2)+v\beta\alpha)\cdot\zeta\alpha(u-v))^2 \\
= & ((3u^2+uv(-3\zeta-3\zeta^2)+3v^2)\cdot\zeta\alpha(u-v))^2 \\
= & (3(u^2+uv+v^2)\cdot\zeta\alpha(u-v))^2 \\
= & (3(u^3-v^3)\cdot\zeta\alpha)^2 \\
= & -27(u^3-v^3)^2 \\
\neq & 0\,.
\end{array}$$

Ergebnis im Fall $\Delta \neq 0$:

Sei $w \in \mathbb{C}$ eine 2-te Wurzel von $-\frac{\Delta}{27}$.

Sei $u \in \mathbb{C}$ eine 3-te Wurzel von $t_1 = \frac{1}{2}(-d + w)$.

Sei $v = -\frac{c}{3u}$.

Dann hat das Polynom $X^3 + cX + d$ die paarweise verschiedenen Nullstellen

$$u + v\ , \qquad u\zeta + v\zeta^2\ , \qquad u\zeta^2 + v\zeta\ .$$

Fall $\Delta = 0$.

Es ist nun $0 = \Delta = -4c^3 - 27d^2$, d.h. $-27d^2 = 4c^3$. Insbesondere ist $d \neq 0$.

Sei

$$u \ :=\ \frac{3d}{2c}\ .$$

Dann ist

$$-2u^3 \ =\ -2 \cdot \frac{27d^3}{8c^3} \ =\ -\frac{27d^2}{4c^3} \cdot d \ =\ d$$

und

$$-3u^2 \ =\ -3 \cdot \frac{9d^2}{4c^2} \ =\ -\frac{27d^2}{4c^3} \cdot c \ =\ c\ .$$

Wir berechnen

$$\begin{array}{rcl} (X+u)^2 \cdot (X-2u) & = & (X^2 + 2uX + u^2)(X - 2u) \\ & = & X^3 + 2uX^2 + u^2X - 2uX^2 - 4u^2X - 2u^3 \\ & = & X^3 - 3u^2X - 2u^3 \\ & = & X^3 + cX + d \end{array}$$

Ergebnis im Fall $\Delta = 0$:

Sei $u = \frac{3d}{2c}$. Dann hat das Polynom $X^3 + cX + d$ die Nullstellen

$$2u, \qquad -u\ .$$

Dabei ist $2u$ eine einfache Nullstelle und $-u$ eine doppelte Nullstelle.

Beispiel. Wir wollen die Nullstellen von $X^3 + X + 1$ in $\mathbb{C}$ bestimmen.

In der Schreibweise $X^3 + cX + d$ der vorigen Bemerkung ist $c = 1$ und $d = 1$. Also ist

$$\Delta \ =\ \Delta(X^3 + X + 1) \ =\ -4c^3 - 27d^2 \ =\ -31 \ \neq\ 0\ .$$

Wir wählen

$$w \ :=\ \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \ =\ \sqrt{\frac{31}{27}}\ ,$$

was eine 2-te Wurzel von $-\frac{\Delta}{27}$ ist.

Wir wählen

$$u \; := \; \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}}}\;,$$

was eine 3-te Wurzel von $t_1 = \frac{1}{2}(-d+w) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}}$ ist.

Sei ferner

$$v \; := \; -\frac{c}{3u} \; = \; -\frac{1}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}}}}\;.$$

Mit $\zeta = \zeta_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}$ erhalten wir die paarweise verschiedenen Nullstellen

$$\begin{array}{rclcl} z_1 & = & u+v & \approx & -0{,}6823 \\ z_2 & = & u\zeta+v\zeta^2 & \approx & 0{,}3412+1{,}1615\mathrm{i} \\ z_3 & = & u\zeta^2+v\zeta & \approx & 0{,}3412-1{,}1615\mathrm{i}\;. \end{array}$$

Man beachte noch $\bar{z}_2 = z_3$ wegen $\bar{\zeta} = \zeta^2$ und $\overline{\zeta^2} = \zeta$. Allgemein treten bei Polynomen in $\mathbb{R}[X]$ die Nullstellen in $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ immer in zueinander konjugiert komplexen Paaren auf.

Beispiel. Wir wollen die Nullstellen von X^3-3X-2 in $\mathbb{C}$ bestimmen.

In der Schreibweise X^3+cX+d der vorigen Bemerkung ist $c=-3$ und $d=-2$.

Die Diskriminante ergibt sich zu

$$\Delta \; = \; \Delta(X^3-3X-2) \; = \; -4c^3-27d^2 \; = \; -4(-3)^3-27(-2)^2 \; = \; 0\;.$$

Wir setzen

$$u \; := \; \frac{3d}{2c} \; = \; \frac{3\cdot(-2)}{2\cdot(-3)} \; = \; 1\;.$$

Wir erhalten die Nullstellen

$$2u = 2, \qquad\qquad -u = -1\;.$$

Dabei ist 2 eine einfache Nullstelle und -1 eine doppelte Nullstelle.

Probe: In der Tat ist

$$(X+1)^2(X-2) \; = \; (X^2+2X+1)(X-2) \; = \; X^3+2X^2+X-2X^2-4X-2 \; = \; X^3-3X-2\;.$$

1.5 Polynome vierten Grades

Sei
$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \;\in\; \mathbb{C}[X]$$
gegeben. Wir wollen davon die Nullstellen in $\mathbb{C}$ bestimmen.

Bemerkung. Substituieren wir $X = Y - \frac{b}{4}$, so erhalten wir aus
$$f(X) \;=\; X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$$
das Polynom
$$\begin{array}{rcl} f(Y - \frac{b}{4}) & = & (Y - \frac{b}{4})^4 \\ & & +b(Y - \frac{b}{4})^3 \\ & & +c(Y - \frac{b}{4})^2 \\ & & +d(Y - \frac{b}{4})^1 \\ & & +e \\ & = & (Y^4 - 4Y^3\frac{b}{4} + 6Y^2\frac{b^2}{16} - 4Y\frac{b^3}{64} + \frac{b^4}{256}) \\ & & +b(Y^3 - 3Y^2\frac{b}{4} + 3Y\frac{b^2}{16} - \frac{b^3}{64}) \\ & & +c(Y^2 - 2Y\frac{b}{4} + \frac{b^2}{16}) \\ & & +d(Y - \frac{b}{4}) \\ & & +e \\ & = & Y^4 \\ & & +Y^2(-\frac{3}{8}b^2 + c) \\ & & +Y(\frac{1}{8}b^3 - \frac{1}{2}bc + d) \\ & & +(-\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{16}b^2c - \frac{1}{4}bd + e)\;. \end{array}$$
Der Koeffizient von $f(Y - \frac{b}{4})$ bei Y^3 ist gleich 0.

Also können wir o.E. $b = 0$ annehmen.

Sei also
$$X^4 + cX^2 + dX + e \;\in\; \mathbb{C}[X]$$
gegeben. Wir wollen davon die Nullstellen in $\mathbb{C}$ bestimmen.

Da wir im Falle $d = 0$ bereits wissen, wie man eine Nullstelle bestimmen kann, sei dabei o.E. $d \neq 0$.

Bemerkung. Sei $t \in \mathbb{C}$. Es wird
$$X^4 + cX^2 + dX + e \;=\; (X^2 + t)^2 - ((2t - c)X^2 - dX + (t^2 - e))\;.$$

Wir wollen $t \in \mathbb{C}$ so bestimmen, daß $(2t-c)X^2 - dX + (t^2 - e)$ als Quadrat eines Polynoms geschrieben werden kann.

Dazu sollte $2t - c \neq 0$ sein.

Es sollte ferner die Diskriminante von $X^2 - \frac{d}{2t-c}X + \frac{t^2-e}{2t-c}$ gleich 0 sein. Es sollte also

$$0 \overset{!}{=} \Delta\left(X^2 - \frac{d}{2t-c}X + \frac{t^2-e}{2t-c}\right) = \left(\frac{d}{2t-c}\right)^2 - 4 \cdot \frac{t^2-e}{2t-c}$$

sein. Mit anderen Worten, es sollte

$$0 \overset{!}{=} d^2 - 4(t^2 - e)(2t - c) = -8t^3 + 4ct^2 + 8et + (d^2 - 4ce)$$

sein. Mit den Methoden aus §1.5 bestimme man ein solches $t \in \mathbb{C}$. Es ist dann jedenfalls $2t - c \neq 0$, da $d \neq 0$.

Ist allgemein ein Polynom $X^2 + rX + s \in \mathbb{C}[X]$ gegeben mit Diskriminante

$$\Delta(X^2 + rX + s) = r^2 - 4s = 0 ,$$

dann ist

$$\left(X + \frac{r}{2}\right)^2 = X^2 + rX + \frac{r^2}{4} = X^2 + rX + s .$$

Im vorliegenden Fall ist also

$$X^2 - \frac{d}{2t-c}X + \frac{t^2-e}{2t-c} = \left(X - \frac{d}{2(2t-c)}\right)^2 .$$

Um die Nullstellen von

$$X^4 + cX^2 + dX + e = (X^2 + t)^2 - ((2t - c)X^2 - dX + (t^2 - e)) .$$

zu bestimmen, um also

$$(X^2 + t)^2 - ((2t - c)X^2 - dX + (t^2 - e)) \overset{!}{=} 0,$$

zu lösen, d.h. um

$$(X^2 + t)^2 - (2t - c)\left(X - \frac{d}{2(2t-c)}\right)^2 \overset{!}{=} 0$$

zu lösen, wählen wir eine 2-te Wurzel w von $2t - c$ und schreiben die zu lösende Gleichung

$$\begin{aligned} X^4 + cX^2 + dX + e &= (X^2 + t)^2 - w^2\left(X - \tfrac{d}{2(2t-c)}\right)^2 \\ &= \left((X^2 + t) - w\left(X - \tfrac{d}{2(2t-c)}\right)\right) \cdot \left((X^2 + t) + w\left(X - \tfrac{d}{2(2t-c)}\right)\right) \\ &\overset{!}{=} 0 . \end{aligned}$$

Wir faktorisieren noch die beiden quadratischen Faktoren als

$$\begin{aligned} \left((X^2 + t) - w\left(X - \tfrac{d}{2(2t-c)}\right)\right) &= (X - z_1) \cdot (X - z_2) \\ \left((X^2 + t) + w\left(X - \tfrac{d}{2(2t-c)}\right)\right) &= (X - z_3) \cdot (X - z_4) , \end{aligned}$$

wobei $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4\ \in\ \mathbb{C}$ und erhalten

$$X^4 + cX^2 + dX + e \ = \ (X - z_1) \cdot (X - z_2) \cdot (X - z_3) \cdot (X - z_4)\ .$$

Also sind die Nullstellen gegeben durch z_1, z_2, z_3, z_4, wobei mehrfache Nullstellen mehrfach aufgelistet sind.

Beispiel. Wir wollen die Nullstellen in $\mathbb{C}$ des Polynoms

$$X^4 - 11X^2 + 18X - 8$$

bestimmen. Es ist also $c = -11$, $d = 18$, $e = -8$.

Für $t \in \mathbb{C}$ ist

$$(X^2 + t)^2 \ = \ 2tX^2 + t^2 + 11X^2 - 18X + 8$$

zu lösen. Damit die rechte Seite ein Quadrat wird, sollte t die Gleichung

$$0 \ = \ -8t^3 + 4ct^2 + 8et + (d^2 - 4ce) \ = \ -8t^3 - 44t^2 - 64t - 28$$

erfüllen, d.h.

$$0 \ = \ t^3 + \frac{11}{2}\, t^2 + 8t + \frac{7}{2}\ .$$

Substitution $t = s - \frac{11}{6}$ führt diese Gleichung über in

$$0 \ = \ \left(s - \frac{11}{6}\right)^3 + \frac{11}{2}\left(s - \frac{11}{6}\right)^2 + 8\left(s - \frac{11}{6}\right) + \frac{7}{2} \ = \ s^3 - \frac{25}{12}\, s + \frac{125}{108}\ .$$

Die Diskriminante dieses Polynoms ist nun

$$\Delta\!\left(s^3 - \frac{25}{12}\, s + \frac{125}{108}\right) \ = \ -4\left(-\frac{25}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{125}{108}\right)^2 \ = \ 2^2\, \frac{5^6}{2^6 \cdot 3^3} - 3^3\, \frac{5^6}{2^4 \cdot 3^6} \ = \ 0\ .$$

Somit können wir

$$\tilde{u} \ := \ \frac{3 \cdot \frac{125}{108}}{2 \cdot (-\frac{25}{12})} \ = \ -\frac{5}{6}$$

setzen. Wir erhalten die Nullstellen $2\tilde{u}$ und $-\tilde{u}$ von $s^3 - \frac{25}{12}\, s + \frac{125}{108}$. Wir wählen

$$s \ = \ -\tilde{u} \ = \ \frac{5}{6}\,,$$

was

$$t \ = \ s - \frac{11}{6} \ = \ \frac{5}{6} - \frac{11}{6} \ = \ -1$$

liefert.

Damit haben wir

$$(X^2 - 1)^2 \ = \ 2(-1)X^2 + (-1)^2 + 11X^2 - 18X + 8 \ = \ 9X^2 - 18X + 9 \ = \ 3^2(X - 1)^2$$

zu lösen. Es wird

$$\begin{aligned}(X^2-1)^2-3^2(X-1)^2 &= ((X^2-1)-3(X-1))\cdot((X^2-1)+3(X-1)) \\ &= (X^2-3X+2)\cdot(X^2+3X-4) \\ &= (X-1)\cdot(X-2)\ \cdot\ (X-1)\cdot(X+4) \\ &= (X-1)^2\cdot(X-2)\cdot(X+4)\ .\end{aligned}$$

Also sind die Nullstellen von $X^4-11X^2+18X-8$ gegeben durch 1, 2 und -4, wobei 1 eine doppelte Nullstelle ist.

Beispiel. Wir wollen eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ des Polynoms

$$X^4+2X^2+X+2$$

bestimmen. Es ist also $c=2$, $d=1$, $e=2$.

Für $t\in\mathbb{C}$ ist

$$(X^2+t)^2 \;=\; 2tX^2+t^2-2X^2-X-2$$

zu lösen. Damit die rechte Seite ein Quadrat wird, sollte t die Gleichung

$$0 \;=\; -8t^3+4ct^2+8et+(d^2-4ce) \;=\; -8t^3+8t^2+16t-15$$

erfüllen, d.h.

$$0 \;=\; t^3-t^2-2t+\frac{15}{8}\ .$$

Substitution $t=s+\frac{1}{3}$ führt diese Gleichung über in

$$0 \;=\; s^3-\frac{7}{3}\,s+\frac{245}{216}\ ,$$

mit $\tilde{c}:=-\frac{7}{3}$ und $\tilde{d}:=\frac{245}{216}$.

Die Diskriminante dieses Polynoms ist nun

$$\Delta \;=\; \Delta\left(s^3-\frac{7}{3}\,s+\frac{245}{216}\right) \;=\; -4\tilde{c}^3-27\tilde{d}^2 \;=\; \frac{1029}{64}\ .$$

Als 2-te Wurzel aus $-\frac{\Delta}{27}=-\frac{7^3}{2^6\cdot 3^2}$ wählen wir

$$\tilde{w} \;:=\; \mathrm{i}\sqrt{7}\cdot\frac{7}{24}\ .$$

Nun benötigen wir eine 3-te Wurzel $\tilde{u}$ aus

$$\tilde{t}_1 \;:=\; \frac{1}{2}(-\tilde{d}+\tilde{w}) \;=\; \frac{1}{2}\left(-\frac{245}{216}+\mathrm{i}\sqrt{7}\frac{7}{24}\right)\ .$$

Um dies ohne Rückgriff auf die Exponentialfunktion durchführen zu können, benötigen wir die Hilfe eines Rechners: Maple gibt

$$\tilde{u} \;:=\; \frac{7}{12} + \frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{7}$$

Dazu wird dann

$$\tilde{v} \;=\; -\frac{\tilde{c}}{3\tilde{u}} \;=\; \frac{7}{12} - \frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{7}\,.$$

Da wir nur eine Lösung benötigen, können wir

$$s \;:=\; \tilde{u} + \tilde{v} \;=\; \frac{7}{6}$$

wählen. Wir erhalten

$$t \;=\; s + \frac{1}{3} \;=\; \frac{3}{2}\,.$$

Also ist

$$\begin{array}{rcl} X^4 + 2X^2 + X + 2 & = & \big(X^2 + \frac{3}{2}\big)^2 - (3X^2 + \frac{9}{4} - 2X^2 - X - 2) \\ & = & \big(X^2 + \frac{3}{2}\big)^2 - (X^2 - X + \frac{1}{4}) \\ & = & \big(X^2 + \frac{3}{2}\big)^2 - \big(X - \frac{1}{2}\big)^2 \\ & \overset{!}{=} & 0 \end{array}$$

zu lösen. Dazu rechnen wir

$$\begin{array}{rl} & X^4 + 2X^2 + X + 2 \\ = & \big(X^2 + \frac{3}{2}\big)^2 - \big(X - \frac{1}{2}\big)^2 \\ = & \Big(\big(X^2 + \frac{3}{2}\big) - \big(X - \frac{1}{2}\big)\Big) \cdot \Big(\big(X^2 + \frac{3}{2}\big) + \big(X - \frac{1}{2}\big)\Big) \\ = & (X^2 - X + 2) \cdot (X^2 + X + 1) \\ = & (X - \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{7})) \cdot (X - \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{7})) \;\cdot\; (X - \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})) \cdot (X - \frac{1}{2}(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})) \end{array}$$

Somit sind die Nullstellen von $X^4 + 2X^2 + X + 2$ gegeben durch $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{7})$, $\frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{7})$, $\frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$ und $\frac{1}{2}(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.

1.6 Fundamentalsatz der Algebra

Sei

$$f(X) \;=\; a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 X^0 \;\in\; \mathbb{C}[X]$$

gegeben, wobei $n \geqslant 1$ und $a_n \neq 0$.

Wir wollen den Fundamentalsatz der Algebra herleiten, der besagt, daß $f(X)$ in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle hat. Wir folgen dabei Argands Argumenten von 1814 **[2,** §4.2**]**.

Wir machen dazu Gebrauch von folgenden Tatsachen.

- Polynome geben stetige Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.
- Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge und ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $z_0 \in K$ mit $f(z_0) \leqslant f(z)$ für $z \in K$.

  Wir schreiben dafür kurz: $f(z_0) = \min f(K)$.
- Es ist $\mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto |z|$ stetig.
- Sei $z \in \mathbb{C}$. Sei $k \geqslant 1$. Dann hat z eine k-te Wurzel $w \in \mathbb{C}$. Es gilt dann also $w^k = z$.

Schreibweise. Für $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ sei

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{B}_r(w) & := & \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z-w| < r \,\} \\ \overline{\mathrm{B}}_r(w) & := & \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z-w| \leqslant r \,\} \,. \end{array}$$

Lemma. Es gibt ein $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit

$$|f(z)| \;>\; |f(0)|$$

für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \overline{\mathrm{B}}_r(0)$.

Beweis. Sei

$$h(X) \;:=\; a_{n-1}X^1 + a_{n-2}X^2 + \ldots + a_0X^n \;\in\; \mathbb{C}[X] \,.$$

Sei $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Wir schreiben

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 z^0 \\ & = & z^n(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}) \\ & = & z^n(a_n + h(z^{-1})) \,. \end{array}$$

Da $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \to h(w)$ in 0 stetig ist, können wir ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit

$$h(\mathrm{B}_\delta(0)) \;\subseteq\; \mathrm{B}_{\frac{1}{2}|a_n|}(0) \,.$$

Wir wählen $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $r \geqslant \delta^{-1}$ und $r > \sqrt[n]{\frac{2|f(0)|}{|a_n|}}$.

Zunächst ist $\frac{1}{2}|a_n|r^n > |f(0)|$.

Für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \overline{\mathrm{B}}_r(0)$ wird $|z| > r \geqslant \delta^{-1}$, also $|z| < \delta$, somit $|h(z)| < \frac{1}{2}|a_n|$, mithin

$$\begin{array}{rcl} |f(z)| & = & |z|^n \cdot |a_n + h(z^{-1})| \\ & \geqslant & r^n|a_n + h(z^{-1})| \\ & \geqslant & r^n(|a_n| - |h(z^{-1})|) \\ & \geqslant & r^n(|a_n| - \frac{1}{2}|a_n|) \\ & = & \frac{1}{2}|a_n|r^n \\ & > & |f(0)| \,. \end{array}$$

Lemma. Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$.

Dies schreiben wir kurz

$$|f(z_0)| \;=\; \min(|f(\mathbb{C})|)\;.$$

Beweis. Wir wählen $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $|f(z)| > |f(0)|$ für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \overline{\mathrm{B}}_r(0)$; vgl. vorstehendes Lemma.

Es ist $\overline{\mathrm{B}}_r(0)$ kompakt, da in $\mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt. Also gibt es ein $z_0 \in \overline{\mathrm{B}}_r(0)$ mit $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ für $z \in \overline{\mathrm{B}}_r(0)$, kurz, mit $|f(z_0)| = \min(|f(\overline{\mathrm{B}}_r(0))|)$.

Nun ist auch $|f(z_0)| \leqslant |f(0)| \leqslant |f(z)|$ für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \overline{\mathrm{B}}_r(0)$, ersteres wegen $0 \in \overline{\mathrm{B}}_r(0)$), zweiteres wegen der Wahl von r.

Insgesamt ist also $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$. ▫

Lemma. Sei $h(X) \in \mathbb{C}[X]$ von Grad $\geqslant 1$ mit $h(0) = 1$ gegeben.

Dann gibt es ein $u \in \mathbb{C}$ mit

$$|h(u)| \;<\; 1\;.$$

Beweis. Sei $k \geqslant 1$ minimal mit der Eigenschaft, daß der Koeffizient von $h(X)$ bei X^j gleich 0 ist für $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Wir können dann

$$h(X) \;=\; 1 + bX^k + X^k \cdot g(X)$$

schreiben, wobei $b \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ und $g(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $g(0) = 0$ ist.

Wir wählen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^k = -b^{-1}$. Dann ist $b \cdot w^k = -1$.

Für $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erhalten wir folgendes.

$$\begin{array}{rcl}
|h(wt)| & = & |1 + bw^k t^k + w^k t^k \cdot g(wt)| \\
& = & |1 - t^k + (-b^{-1})t^k \cdot g(wt)| \\
& \leqslant & |1 - t^k| + |(-b^{-1})t^k \cdot g(wt)| \\
& = & |1 - t^k| + t^k|b|^{-1}|g(wt)|\;.
\end{array}$$

Da $g(X)$ eine stetige Funktion gibt, können wir ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit $|g(wt)| < \frac{1}{2}|b|$ für $0 \leqslant t < \delta$.

Wir wählen nun ein $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t < 1$ und $t < \delta$.

Wir setzen $u := wt$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
|h(u)| & = & |h(wt)| \\
& = & |1 - t^k| + t^k|b|^{-1}|g(wt)| \\
& = & 1 - t^k + t^k|b|^{-1}|g(wt)| \\
& \leqslant & 1 - t^k + t^k|b|^{-1} \cdot \frac{1}{2}|b| \\
& = & 1 - \frac{1}{2}t^k \\
& < & 1\;.
\end{array}$$

Lemma. Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ mit $f(c) \neq 0$ gibt es ein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$ mit

$$|f(c)| \; > \; |f(\tilde{c})| \; .$$

Beweis. Wir setzen

$$h(X) \; := \; \frac{f(c+X)}{f(c)} \; \in \; \mathbb{C}[X] \; .$$

Es ist $h(0) = 1$. Es ist der Grad von $h(X)$ gleich $n \geqslant 1$.

Mit vorigem Lemma können wir ein $u \in \mathbb{C}$ finden mit

$$1 > |h(u)| \; = \; \left| \frac{f(c+u)}{f(c)} \right| \; .$$

Mit $\tilde{c} := c + u$ wird also

$$|f(c)| \; > \; |f(c+u)| \; = \; |f(\tilde{c})| \; .$$

Satz (Fundamentalsatz der Algebra).

Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$.

Beweis. Annahme, nicht. Wir wählen $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|f(z_0)| = \min(|f(|\mathbb{C})|)$; vgl. zweites Lemma oben. Es ist $|f(z_0)| > 0$.

Nach vorstehendem Lemma gibt es ein $\tilde{c}$ mit $|f(z_0)| > |f(\tilde{c})|$. Dies steht aber im *Widerspruch* zur Minimalität von $|f(z_0)|$. □

Korollar. Es gibt $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f(X) \; = \; a_n \cdot \prod_{j=1}^{n} (X - z_j) \; .$$

Beweis. Dies folgt durch iterierte Division von zu Nullstellen gehörigen Polynomen von Grad 1.

Korollar. Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$. Dann gibt es $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $k + 2\ell = n$ und $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ und $b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots, b_\ell, c_\ell \in \mathbb{R}$ mit

$$f(X) \; = \; a_n \cdot \left(\prod_{j=1}^{k} (X - x_j) \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{k} (X^2 + b_j X + c_j) \right) \; .$$

Dabei ist $b_j^2 - 4c_j < 0$ für $1 \leqslant j \leqslant \ell$.

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\overline{z}$ die komplex konjugierte Zahl. Es wird

$$\begin{array}{rcl} \overline{f(z)} & = & \overline{\sum_{j=0}^n a_j z^j} \\ & = & \sum_{j=0}^n \overline{a_j z^j} \\ & = & \sum_{j=0}^n \overline{a_j}\ \overline{z}^j \\ & \overset{a_j \in \mathbb{R}}{=} & \sum_{j=0}^n a_j \overline{z}^j \\ & = & f(\overline{z})\ . \end{array}$$

Insbesondere ist

$$f(z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\overline{z}) = 0$$

Für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ wird

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})X + \overline{z \cdot \overline{z}} = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2\ .$$

Dieses Polynom hat Diskriminante $(z - \overline{z})^2 = -4\,\mathrm{Im}(z)^2 < 0$.

Wir können also schreiben

$$f(X) = a_n \cdot \prod_{j=1}^n (X - z_j)\ ,$$

wobei $k + 2\ell = n$, wobei $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{R}$, wobei $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ und wobei $\overline{z_{k+2j-1}} = z_{k+2j}$ für $1 \leqslant j \leqslant \ell$.

Wir schreiben $x_j := z_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant k$.

Wir schreiben

$$(X - z_{k+2j-1})(X - z_{k+2j}) = (X - z_{k+2j-1})(X - \overline{z_{k+2j-1}}) =: X^2 + b_j X + c_j \in \mathbb{R}[X]$$

für $1 \leqslant j \leqslant \ell$. Dies ist ein Polynom mit Diskriminante $b_j^2 - 4c_j < 0$.

Dann wird

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & a_n \cdot \left(\prod_{j=1}^k (X - z_j)\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^\ell (X - z_{k+2j-1})(X - z_{k+2j})\right) \\ & = & a_n \cdot \left(\prod_{j=1}^k (X - x_j)\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^k (X^2 + b_j X + c_j)\right)\ . \end{array}$$

□

Beispiel. Wir wollen $X^4 + bX^2 + c \in \mathbb{R}[X]$ in $\mathbb{R}[X]$ Faktoren zerlegen.

Fall $b^2 - 4c \geqslant 0$. Es hat $t^2 + bt + c - 0$ die Nullstellen

$$t_1 := \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})\ , \qquad t_1 := \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})\ .$$

Also ist

$$X^4 + bX^2 + c = (X^2 - t_1)(X^2 - t_2)\ .$$

Einen solchen quadratischen Faktor kann man noch in Faktoren in $\mathbb{R}[X]$ von Grad 1 zerlegen, falls $t_1 \geqslant 0$ bzw. $t_2 \geqslant 0$.

Fall $b^2 - 4c < 0$. Es ist $c > \frac{1}{4}b^2 \geqslant 0$. Es ist $2\sqrt{c} > |b|$. Also ist $2\sqrt{c} - b > 0$ und $2\sqrt{c} + b > 0$.

Zunächst ist für $u,\, v\, \in \mathbb{R}$

$$(X^2 + uX + v)(X^2 - uX + v) \;=\; X^4 + (2v - u^2)X^2 + v^2 \;.$$

Damit dieses Produkt gleich $X^4 + bX^2 + c$ ist, muß also $v^2 = c$ sein und $2v - u^2 = b$.

Wir können also $v = \sqrt{c}$ und $u = \sqrt{2\sqrt{c} - b}$ setzen und erhalten

$$X^4 + bX^2 + c \;=\; (X^2 + \sqrt{2\sqrt{c} - b}\; X + \sqrt{c})(X^2 - \sqrt{2\sqrt{c} - b}\; X + \sqrt{c}) \;.$$

Beide Faktoren haben negative Diskriminante $(\sqrt{2\sqrt{c} - b})^2 - 4\sqrt{c} = -2\sqrt{c} - b < 0$.

Beispiel. Es ist

$$X^4 + X^2 + 1 \;=\; (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \;.$$

Kapitel 2

Kettenbrüche

2.1 Experimente

Experiment. Es ist

$$\pi \;=\; 3{,}14159265358979323846 26\ldots$$

Im folgenden rechnen wir mit einer hinreichend hohen Genauigkeit, aber geben dennoch nur die ersten paar Nachkommastellen wieder.

Wir formen wie folgt um, wobei wir von den entstehenden Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 jeweils mit dem Rechner einen Kehrwert bilden.

$$\begin{aligned}
\pi &= 3 + 0{,}14159\ldots \\
&= 3 + \frac{1}{7{,}06251\ldots} \\
&= 3 + \frac{1}{7+0{,}06251\ldots} \\
&= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15{,}99659\ldots}} \\
&= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+0{,}99659\ldots}} \\
&= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1{,}00341\ldots}}} \\
&= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+0{,}00341\ldots}}} \\
&= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292{,}63459\ldots}}}} \\
&= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292+0{,}63459\ldots}}}}
\end{aligned}$$

Es resultieren die folgenden Näherungen, in welchen wir die erste von π abweichende

Nachkommastelle markiert haben.

$$
\begin{array}{lllll}
\pi & \approx & 3 & & \\
\pi & \approx & 3+\frac{1}{7} & = \frac{22}{7} & = 3{,}14\underline{2}8\ldots \\
\pi & \approx & 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}} & = \frac{333}{106} & = 3{,}1415\underline{0}94\ldots \\
\pi & \approx & 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}} & = \frac{355}{113} & = 3{,}151592\underline{9}20\ldots \\
\pi & \approx & 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292}}}} & = \frac{103993}{33102} & = 3{,}141592653\underline{0}11\ldots
\end{array}
$$

In der Folge der auftretenden positiven ganzen Zahlen

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ \ldots$$

ist keine Regelmäßigkeit zu erkennen.

Es ist darin auch keine Regelmäßigkeit bekannt.

Experiment. Es ist

$$\sqrt{2} \;=\; 1{,}41421356237309504880\ldots$$

Es wird

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1+0{,}414213\ldots \\
&= 1+\frac{1}{2+0{,}414213\ldots}\ .
\end{aligned}
$$

Hier fällt auf, daß $0{,}414213\ldots = \sqrt{2}-1$ ist, wobei man noch den Vorbehalt machen muß, daß man nicht alle Nachkommastellen betrachten kann.

Zu verifizieren ist also:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \;\overset{!}{=}\; 2+(\sqrt{2}-1) \;=\; 1+\sqrt{2}\ .$$

Multiplikation mit $\sqrt{2}-1$ der rechten Seite gibt nun in der Tat

$$(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \;=\; \sqrt{2}-1+(\sqrt{2})^2-\sqrt{2} \;=\; 1\ .$$

Somit können wir wie folgt fortsetzen.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1+0{,}414213\ldots \\
&= 1+\frac{1}{2+0{,}414213\ldots} \\
&= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+0{,}414213\ldots}} \\
&= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+0{,}414213\ldots}}} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Wir würden also gerne wie folgt schreiben dürfen.

$$\sqrt{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}}$$

Dazu müssen wir uns noch darum kümmern, die rechte Seite als Grenzwert zu definieren.

Experiment. Es ist

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \;=\; 2{,}71828182845904523536028 7\dots$$

Es wird

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} \;&=\; 2 + 0{,}718281\dots \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+0{,}392211\dots} \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+0{,}549646\dots}} \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+0{,}819350\dots}}} \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+0{,}220479\dots}}}} \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+0{,}535573\dots}}}}} \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+0{,}867157\dots}}}}}} \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+0{,}153193\dots}}}}}}} \\
&=\; 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{6+0{,}527707\dots}}}}}}}}
\end{aligned}$$

Vermutlich ist die Folge der auftretenden positiven ganzzahligen Summanden also gegeben durch

$$2,\; 1,\; 2,\; 1,\; 1,\; 4,\; 1,\; 1,\; 6,\; 1,\; 1,\; 8,\; 1,\; 1,\; 10,\; \dots$$

Dies wollen wir weiter unten noch bestätigen.

2.2 Begriff des Kettenbruchs

Seien $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ \in\ \mathbb{R}_{>0}$.

Definition. Sei $n \geqslant 1$. Wir wollen

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] \ = \ x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \ddots_{\;x_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}} \ .$$

definieren. Wir setzen dazu rekursiv

$$\begin{aligned} [x_n] &:= x_n \\ [x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n] &:= x_k + \tfrac{1}{[x_{k+1}, \ldots, x_n]} \quad \text{für } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \end{aligned}$$

Es wird also

$$\begin{aligned} [x_1] &= x_1 \\ [x_1, x_2] &= x_1 + \tfrac{1}{x_2} \\ [x_1, x_2, x_3] &= x_1 + \tfrac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3}} \\ [x_1, x_2, x_3, x_4] &= x_1 + \tfrac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{x_4}}} \end{aligned}$$

Usf.

Bemerkung. Sei $x_n \leqslant \tilde{x}_n$. Sei $n \geqslant 1$.

Ist n ungerade, dann ist $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] \leqslant [x_1, \ldots, x_{n-1}, \tilde{x}_n]$.

Ist n gerade, dann ist $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] \geqslant [x_1, \ldots, x_{n-1}, \tilde{x}_n]$.

Bemerkung. Für $n \geqslant 2$ ist

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] \ = \ [x_1, \ldots, x_{n-1} + \tfrac{1}{x_n}] \ .$$

Definition. Wir setzen rekursiv wie folgt.

$$\begin{aligned} p_{-1} &:= 0 \\ p_0 &:= 1 \\ p_k &:= x_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \quad \text{für } k \geqslant 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{-1} &:= 1 \\ q_0 &:= 0 \\ q_k &:= x_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \quad \text{für } k \geqslant 1 \end{aligned}$$

Also

k	-1	0	1	2	3	4	$\ldots$
p_k	0	1	x_1	$x_2x_1 + 1$	$x_3x_2x_1 + x_3 + x_1$	$x_4x_3x_2x_1 + x_4x_3 + x_4x_1 + x_2x_1 + 1$	$\ldots$
q_k	1	0	1	x_2	$x_3x_2 + 1$	$x_4x_3x_2 + x_4 + x_2$	$\ldots$

Es sind $p_k \geqslant 0$ und $q_k \geqslant 0$ stets. Für $k \geqslant 1$ ist $q_k > 0$.

Lemma. Sei $n \geqslant 1$. Es ist

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] \;=\; \frac{p_n}{q_n}\;.$$

Beweis. Induktion über $n \geqslant 1$.

Es ist

$$[x_1] \;=\; x_1 \;=\; \frac{x_1}{1} \;=\; \frac{p_1}{q_1}\;.$$

Sei $n \geqslant 2$. Sei die Aussage für $n-1$ bekannt.

Wir verwenden sie für die Zahlen x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-2}, $x_{n-1} + \frac{1}{n}$. Seien $\tilde{p}_k$ und $\tilde{q}_k$ für $1 \leqslant k \leqslant n-1$ wie in der vorigen Definition gebildet, aber ausgehend von diesen Zahlen. Dann ist $p_k = \tilde{p}_k$ und $q_k = \tilde{q}_k$ für $1 \leqslant k \leqslant n-2$.

Nach Induktionsvoraussetzung wird

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} + \frac{1}{x_n}] \;=\; \frac{\tilde{p}_{n-1}}{\tilde{q}_{n-1}}\;.$$

Nach Rekursionsformel wird also

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2, \ldots, x_n] \;&=\; [x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} + \tfrac{1}{x_n}] \\
&=\; \tfrac{\tilde{p}_{n-1}}{\tilde{q}_{n-1}} \\
&=\; \tfrac{(x_{n-1}+\frac{1}{x_n})\tilde{p}_{n-2}+\tilde{p}_{n-3}}{(x_{n-1}+\frac{1}{x_n})\tilde{q}_{n-2}+\tilde{q}_{n-3}} \\
&=\; \tfrac{(x_{n-1}+\frac{1}{x_n})p_{n-2}+p_{n-3}}{(x_{n-1}+\frac{1}{x_n})q_{n-2}+q_{n-3}} \\
&=\; \tfrac{x_n(x_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3})+p_{n-2}}{x_n(x_{n-1}q_{n-2}+q_{n-3})+q_{n-2}} \\
&=\; \tfrac{x_n p_{n-1}+p_{n-2}}{x_n q_{n-1}+q_{n-2}} \\
&=\; \tfrac{p_n}{q_n}\;.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Sei $n \geqslant 1$.

Es ist

$$\left(\begin{smallmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} x_n p_{n-1}+p_{n-2} & x_n q_{n-1}+p_{n-2} \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{smallmatrix}\right)\;.$$

Da

$$\det \left(\begin{smallmatrix} p_1 & q_1 \\ p_0 & q_0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \det \left(\begin{smallmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -1$$

und, falls $n \geqslant 2$,

$$\det \left(\begin{smallmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \det \left(\begin{smallmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \det \left(\begin{smallmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{smallmatrix}\right) \;=\; -\det \left(\begin{smallmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{smallmatrix}\right)\;,$$

folgt

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} \;=\; \det\left(\begin{smallmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{smallmatrix}\right) \;=\; (-1)^n \;.$$

Also ist

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \;=\; (-1)^n \frac{1}{q_{n-1} q_n} \;.$$

Somit ist

$$\begin{array}{rcl} [x_1, \dots, x_n] & = & \frac{p_n}{q_n} \\ & = & (-1)^n \frac{1}{q_{n-1}q_n} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\ & = & (-1)^n \frac{1}{q_{n-1}q_n} + (-1)^{n-1} \frac{1}{q_{n-2}q_{n-1}} + \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \\ & = & \dots \\ & = & \left(\sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k}\right) + \frac{p_1}{q_1} \\ & = & \left(\sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k}\right) + x_1 \end{array}$$

Ergebnis:

$$[x_1, \dots, x_n] \;=\; x_1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{q_{k-1} q_k} \;.$$

Definition. Falls für ein $k_0 \geqslant 2$ die Folge $(\frac{1}{q_{k-1}q_k})_{k \geqslant k_0}$ eine monotone Nullfolge ist, dann können wir

$$[\, x_n \,:\, n \geqslant 1 \,] \;=\; [x_1, x_2, x_3, \dots] \;:=\; \lim_{n\to\infty} [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] \;=\; x_1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{q_{k-1} q_k}$$

setzen, denn dann ist diese Reihe nach Leibniz konvergent.

Es heißt $[x_1, x_2, x_3, \dots]$ ein *(unendlicher) Kettenbruch.*

Alternativ ist dann auch

$$[x_1, x_2, x_3, \dots] \;=\; \lim_{n\to\infty} [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] \;=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \geqslant 1}} \frac{p_n}{q_n} \;.$$

Anschaulich geschrieben ist

$$[x_1, x_2, x_3, \dots] \;=\; x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \ddots}} \;.$$

Bemerkung. Ist $x_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $k \geqslant 1$, dann ist $\left(\frac{1}{q_{k-1}q_k}\right)_{k \geqslant 2}$ eine monotone Nullfolge.

Denn aus $q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2} \geqslant 1 \cdot q_{n-1}$ für $n \geqslant 1$ folgt $(q_k)_{k \geqslant 1}$ monoton wachsend.

Und daraus folgt wiederum $q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2} \geqslant 1 \cdot q_{n-2} + q_{n-2} \geqslant 2q_{n-2}$ für $n \geqslant 2$.

Damit ergibt sich schließlich $q_{n-1}q_n \geqslant q_{n-1} \cdot 2q_{n-2} = 2q_{n-2}q_{n-1}$ für $n \geqslant 2$.

Also ist diesenfalls der Kettenbruch $[\,x_n \,:\, n \geqslant 1\,] = [x_1, x_2, x_3, \ldots]$ definiert; vgl. vorstehende Definition.

Bemerkung. Jedes Element $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q}$ kann geschrieben werden als Kettenbruch

$$r \;=\; [x_1, x_2, x_3, \ldots] \;=\; [x_k \,:\, k \geqslant 1]$$

mit $x_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $k \geqslant 1$.

Dazu geht man vor wie in §2.1 und setzt rekursiv wie folgt an.

$$\begin{array}{rcll} r_1 & := & r & \\ x_k & := & \lfloor r_k \rfloor & \text{für } k \geqslant 1 \\ r_k & := & \dfrac{1}{r_{k-1} - \lfloor r_{k-1} \rfloor} & \text{für } k \geqslant 2 \end{array}$$

Für $n \geqslant 2$ mit n gerade ist dann

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] \;\geqslant\; [x_1, \ldots, x_{n-1}, r_n] \;=\; r \;=\; [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, r_{n+1}] \;\geqslant\; [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]\,.$$

Für $n \geqslant 2$ mit n ungerade ist dann

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] \;\leqslant\; [x_1, \ldots, x_{n-1}, r_n] \;=\; r \;=\; [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, r_{n+1}] \;\leqslant\; [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]\,.$$

Dank Leibniz folgt

$$r \;=\; [x_1, x_2, x_3, \ldots] \;=\; [\,x_k \,:\, k \geqslant 1\,]$$

Bemerkung. Jedes Element $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ kann kann geschrieben werden als Kettenbruch

$$r \;=\; [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$$

mit $n \geqslant 1$ und mit $x_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $1 \leqslant k \leqslant n$.

Dazu können wir $r = x_1 + \frac{a}{b}$ schreiben, mit $x_1 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ und $0 \leqslant a < b$. Falls $a \neq 0$, gibt Division mit Rest $b = ax_2 + c$ mit $x_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ und $c \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leqslant c < a$. Es wird

$$r \;=\; x_1 + \frac{1}{\frac{b}{a}} \;=\; x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{c}{a}}\,.$$

Falls $c \neq 0$, können wir dies fortsetzen. Da $a < b$ ist, können wir dies aber nur endlich oft fortsetzen.

Bemerkung. Sei $([x_2, \ldots, x_n])_{n \geqslant 2}$ konvergent.

Dann ist

$$[\,x_k \,:\, k \geqslant 1\,] \;=\; x_1 + \frac{1}{[\,x_k \,:\, k \geqslant 2\,]}\,.$$

Denn für $n \geqslant 2$ ist

$$[x_1, \ldots, x_n] \;=\; x_1 + \frac{1}{[x_2, \ldots, x_n]} \,.$$

Bilden wir auf beiden Seiten den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}$, dann folgt das Resultat.

Beispiel. Sei

$$\begin{array}{rcl} r & = & [\; x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \;,\; x_4 \;,\; x_5 \;,\; x_6 \;,\; x_7 \;,\; x_8 \;,\; x_9 \;,\; x_{10} \;,\; x_{11} \;,\; \ldots \;] \\ & = & [\; 2 \;,\; 1 \;,\; 2 \;,\; 1 \;,\; 1 \;,\; 4 \;,\; 1 \;,\; 1 \;,\; 6 \;,\; 1 \;,\; 1 \;,\; \ldots \;] \end{array}$$

In §2.1 wurde $r = \mathrm{e}$ vermutet. Dieser Vermutung wollen wir unten auch noch nachgehen.

Nun aber zuerst zur Illustration die daraus gebildeten Folgen $(p_k)_{k\geqslant -1}$ und $(q_k)_{k\geqslant -1}$.

Wir erinnern an $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$ und an $p_n = x_n p_{n-1} = p_{n-2}$ für $n \geqslant 1$.

Wir erinnern an $q_{-1} = 1$, $q_0 = 0$ und an $q_n = x_n q_{n-1} = q_{n-2}$ für $n \geqslant 1$.

Dies ergibt folgende rekursiv berechnete Werte.

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
p_k	0	1	2	3	8	11	19	87	106	193	...
q_k	1	0	1	1	3	4	7	32	39	71	...

Es ist $r = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\geqslant 1}} \dfrac{p_n}{q_n}$. Die ersten Folgenglieder ergeben sich wie folgt.

$$\begin{array}{lllll}
\frac{p_1}{q_1} & = & 2 & & \\
\frac{p_2}{q_2} & = & \frac{3}{1} & = & 2 + \frac{1}{1} \\
\frac{p_3}{q_3} & = & \frac{8}{3} & = & 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} \\
\frac{p_4}{q_4} & = & \frac{11}{4} & = & 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}} \\
\frac{p_5}{q_5} & = & \frac{19}{7} & = & 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} \\
\frac{p_6}{q_6} & = & \frac{87}{32} & = & 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}} \\
\frac{p_7}{q_7} & = & \frac{106}{39} & = & 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1}}}}}} \\
\frac{p_8}{q_8} & = & \frac{193}{71} & = & 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}
\end{array}$$

Z.B. ist

$$\begin{array}{rcl} \frac{p_8}{q_8} & = & \frac{193}{71} & = & 2{,}718\underline{3}09\ldots \\ \mathrm{e} & = & & & 2{,}718281\ldots \end{array}$$

2.3 Quadratwurzeln als periodische Kettenbrüche

Definition. Für $k \geqslant 0$ und $\ell \geqslant 1$ und $x_1, x_2, \ldots, x_{k+\ell} \in \mathbb{R}_{>0}$ schreiben wir

$$\begin{array}{rl} & [\,x_1, x_2, \ldots, x_k, \overline{x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}}\,] \\ := & [x_1, x_2, \ldots, x_k\,,\, x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}\,,\, x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}\,,\, x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}\,,\, \ldots]\,, \end{array}$$

genannt *periodischer Kettenbruch* mit Periodenlänge k.

Dieser konvergiert in der Tat. Sei dafür o.E. $k = 0$. Sei $x := \min\{x_1, \ldots, x_\ell\}$. Sei $(\tilde{q}_m)_{m\geqslant -1}$ gebildet bezüglich der konstanten Folge, die an jeder Stelle x stehen hat. Dann wird $0 \leqslant \tilde{q}_n \leqslant q_n$ für $n \geqslant -1$ dank Rekursion.

Ferner ist $\tilde{q}_1 = 1$ und $\tilde{q}_2 = x$, sowie $\tilde{q}_n = x\tilde{q}_{n-1} + \tilde{q}_{n-2} \geqslant \tilde{q}_{n-2}$ für $n \geqslant 1$.

Sei $\xi := \min\{1, x\} > 0$. Es folgt $\xi \leqslant \tilde{q}_n \leqslant q_n$ für $n \geqslant 1$.

Insgesamt folgt

$$q_{n-1}q_n \;=\; x_n q_{n-1}q_{n-1} + q_{n-2}q_{n-1} \;\geqslant\; x\xi^2 + q_{n-2}q_{n-1}$$

für $n \geqslant 2$. Damit ist $\left(\frac{1}{q_{m-1}q_m}\right)_{m\geqslant 2}$ eine monotone Nullfolge, wie für Leibniz benötigt.

Bemerkung. Sei $x_1 \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir schreiben

$$y \;:=\; [\,\overline{x_1}\,] \;=\; [x_1, x_1, x_1, \ldots] \;=\; x_1 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_1 + \ddots}}\;.$$

Dann ist

$$y \;=\; x_1 + \frac{1}{y}\,,$$

und also

$$y^2 - x_1 y - 1 \;=\; 0\,.$$

Es folgt

$$y \;=\; \frac{1}{2}(x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 4})\,.$$

Da $y > 0$, kann das negative Vorzeichen nicht sein. Es folgt

$$y \;=\; [\,\overline{x_1}\,] \;=\; \frac{1}{2}\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4}\right)\,.$$

Beispiel. Es ist

$$[\,\overline{1}\,] \;=\; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\,.$$

Beispiel. Es ist
$$[\,\overline{2}\,] \;=\; \frac{1}{2}(2+\sqrt{8}) \;=\; 1+\sqrt{2}\,.$$
Folglich ist
$$\sqrt{2} \;=\; [\,\overline{2}\,]-1 \;=\; [2,\,\overline{2}\,]-1 \;=\; [1,\,\overline{2}\,] \;=\; 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}\;\;.$$
Vgl. das zweite Experiment in §2.1.

Bemerkung. Seien $x_1,\, x_2 \,\in\, \mathbb{R}_{>0}$. Wir schreiben
$$y \;:=\; [\,\overline{x_1, x_2}\,] \;=\; [x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots\,]\;\;.$$
Es wird
$$y \;=\; x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{y}}\;.$$
Es folgt
$$\frac{1}{y - x_1} \;=\; x_2 + \frac{1}{y}\;,$$
also, nach Multiplikation mit $(y - x_1)y$,
$$y \;=\; x_2(y - x_1)y + (y - x_1)\;,$$
also
$$0 \;=\; x_2 y^2 - x_1 x_2 y - x_1\;,$$
wegen $y > 0$ also
$$y \;=\; [\,\overline{x_1, x_2}\,] \;=\; \frac{1}{2x_2}\left(x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2}\right)\;.$$

Beispiel. Es ist
$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}} \;=\; [\,\overline{1,2}\,] \;=\; \frac{1}{2\cdot 2}(1\cdot 2+\sqrt{1^2\cdot 2^2+4\cdot 1\cdot 2}) \;=\; \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\;.$$

Näherung: Es ist
$$[1,2,1,2,1,2,1,2] \;=\; \frac{153}{112} \;=\; 1{,}3660\underline{7}142\ldots\;,$$
im Vergleich zu
$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \;=\; 1{,}36602540\ldots$$

Bemerkung. Sei $\ell \geqslant 1$. Seien $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_\ell \,\in\, \mathbb{R}_{>0}$. Wir schreiben
$$y \;:=\; [\,\overline{x_1, \ldots, x_\ell}\,]\,.$$

Dann ist

$$y \;=\; [x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell + \tfrac{1}{y}\,] \;.$$

Also ist

$$y \;=\; \frac{(x_\ell + \frac{1}{y})p_{\ell-1} + p_{\ell-2}}{(x_\ell + \frac{1}{y})q_{\ell-1} + q_{\ell-2}} \;,$$

also

$$y((x_\ell + \tfrac{1}{y})q_{\ell-1} + q_{\ell-2}) \;=\; (x_\ell + \tfrac{1}{y})p_{\ell-1} + p_{\ell-2} \;,$$

also

$$yq_\ell + q_{\ell-1} \;=\; p_\ell + \tfrac{1}{y}p_{\ell-1} \;,$$

also

$$q_\ell y^2 + (q_{\ell-1} - p_\ell)y - p_{\ell-1} \;=\; 0 \;,$$

also, wegen $y > 0$,

$$y \;=\; [\,\overline{x_1, \ldots, x_\ell}\,] \;=\; \frac{1}{2q_\ell}((p_\ell - q_{\ell-1}) + \sqrt{(p_\ell - q_{\ell-1})^2 + 4q_\ell p_{\ell-1}}) \;.$$

Beispiel. Sei $\ell := 3$.

Für den Kettenbruch

$$[\,\overline{x_1, x_2, x_3}\,] \;=\; [\,\overline{1, 2, 3}\,]$$

ist $p_2 = x_2x_1 + 1 = 3$, $p_3 = x_3x_2x_1 + x_3 + x_1 = 10$, $q_2 = x_2 = 2$ und $q_3 = x_3x_2 + 1 = 7$.

Also ist

$$[\,\overline{1, 2, 3}\,] \;=\; \frac{1}{2q_3}((p_3 - q_2) + \sqrt{(p_3 - q_2)^2 + 4q_3p_2}) \;=\; \frac{1}{14}(8 + \sqrt{148}) \;=\; \frac{1}{7}(4 + \sqrt{37}) \;.$$

Mit anderen Worten, es ist

$$[\,\overline{1, 2, 3}\,] \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}} \;=\; \frac{1}{7}(4 + \sqrt{37}) \;.$$

2.4 Die Kettenbruchentwicklung von e

Wir folgen H. Cohn **[1, §2]**.

Definition. Für $n \geqslant 0$ sei

$$\begin{array}{lcl} A_n & := & \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \quad (x-1)^n \quad \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ B_n & := & \frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^n \quad \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ C_n & := & \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \quad (x-1)^{n+1}\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \;. \end{array}$$

Bemerkung. Es ist

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathrm{e} - 1 \\ B_0 &= 1 \,. \end{aligned}$$

Denn

$$A_0 \;=\; \tfrac{1}{0!} \int_0^1 x^0 (x-1)^0 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; [\mathrm{e}^x]_0^1 \;=\; \mathrm{e} - 1 \,,$$

sowie

$$B_0 \;=\; \tfrac{1}{0!} \int_0^1 x^1 (x-1)^0 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \;=\; 1 \,.$$

Bemerkung. Für $n \geqslant 0$ ist

$$C_n \;=\; B_n - A_n \,.$$

Denn

$$\begin{aligned} B_n - A_n &= \tfrac{1}{n!} \int_0^1 x^{n+1} (x-1)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{n!} \int_0^1 x^n (x-1)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{n!} \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)(x-1)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{n!} \int_0^1 x^n (x-1)^{n+1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= C_n \,. \end{aligned}$$

Bemerkung. Für $n \geqslant 1$ ist

$$A_n \;=\; -B_{n-1} - C_{n-1} \,.$$

Dazu rechnen wir

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\tfrac{1}{n!} x^n (x-1)^n \mathrm{e}^x \right) \;=\; \tfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} (x-1)^n \mathrm{e}^x + \tfrac{1}{(n-1)!} x^n (x-1)^{n-1} \mathrm{e}^x + \tfrac{1}{n!} x^n (x-1)^n \mathrm{e}^x \,.$$

Also wird

$$\begin{aligned} & A_n + B_{n-1} + C_{n-1} \\ = \;& \tfrac{1}{n!} \int_0^1 x^n (x-1)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{(n-1)!} \int_0^1 x^{(n-1)+1} (x-1)^{n-1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1} (x-1)^{(n-1)+1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ = \;& \int_0^1 \tfrac{1}{n!} x^n (x-1)^n \mathrm{e}^x + \tfrac{1}{(n-1)!} x^n (x-1)^{n-1} \mathrm{e}^x + \tfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} (x-1)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ = \;& \int_0^1 \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\tfrac{1}{n!} x^n (x-1)^n \mathrm{e}^x \right) \,\mathrm{d}x \\ = \;& \left[\tfrac{1}{n!} x^n (x-1)^n \mathrm{e}^x \right]_0^1 \\ = \;& 0 \,. \end{aligned}$$

Bemerkung. Für $n \geqslant 1$ ist

$$B_n \;=\; -2nA_n + C_{n-1} \,.$$

Dazu rechnen wir

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^{n+1}\mathrm{e}^x\right) \\
= \; & \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^{n+1}\mathrm{e}^x + \tfrac{n+1}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^{n+1}\mathrm{e}^x \\
= \; & \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^{n+1}\mathrm{e}^x + \tfrac{n+1}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^n\cdot x\cdot\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^n\cdot 1\cdot\mathrm{e}^x \\
= \; & \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^n\cdot x\cdot\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^n\cdot 1\cdot\mathrm{e}^x + \tfrac{n+1}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x \\
& + \tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^n\cdot x\cdot\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^n\cdot 1\cdot\mathrm{e}^x \\
= \; & \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^n\mathrm{e}^x + \tfrac{n+1}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x \\
& + \tfrac{1}{n!}\, x^{n+1}(x-1)^n\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x \\
= \; & \tfrac{2n}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^n\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{n!}\, x^{n+1}(x-1)^n\mathrm{e}^x\;.
\end{aligned}
$$

Also wird

$$
\begin{aligned}
& B_n + 2nA_n - C_{n-1} \\
= \; & \tfrac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \tfrac{2n}{n!}\int_0^1 x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1}(x-1)^{(n-1)+1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
= \; & \int_0^1 \tfrac{1}{n!}\, x^{n+1}(x-1)^n\mathrm{e}^x + \tfrac{2n}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
= \; & \int_0^1 \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^{n+1}\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x \\
= \; & \left[\tfrac{1}{n!}\, x^n(x-1)^n\mathrm{e}^x\right]_0^1 \\
= \; & 0\;.
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Wir fassen zusammen. Es ist

$$
\begin{array}{rcll}
A_0 & = & \mathrm{e}-1 & \\
B_0 & = & 1 & \\
A_n & = & -B_{n-1} - C_{n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \\
B_n & = & -2nA_n + C_{n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \\
C_n & = & B_n - A_n & \text{für } n \geqslant 0\;.
\end{array}
$$

Diese Gleichungen legen die Werte von A_n, B_n und C_n für $n \geqslant 0$ rekursiv fest.

Bemerkung. Es ist

$$
\begin{array}{rcl}
\lim_{n\to\infty} A_n & = & 0 \\
\lim_{n\to\infty} B_n & = & 0 \\
\lim_{n\to\infty} C_n & = & 0
\end{array}
$$

Denn seien β, $\gamma \in \{0,1\}$. Für $x \in [0,1]$ und $n \geqslant 0$ wird

$$
0 \;\leqslant\; \tfrac{1}{n!}\, x^{n+\beta}(x-1)^{n+\gamma}\mathrm{e}^x \;\leqslant\; \tfrac{1}{n!}\,\mathrm{e}^x\;.
$$

Folglich ist

$$
0 \;\leqslant\; \tfrac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+\beta}(x-1)^{n+\gamma}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; \tfrac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{n!}(\mathrm{e}-1)\;.
$$

Die beiden äußeren Terme gehen gegen 0 für $n \to \infty$. Dank Sandwich-Lemma ist also auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{n+\beta}(x-1)^{n+\gamma} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; 0 \;.$$

Für $(\beta,\gamma) = (0,0)$ folgt $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$. Für $(\beta,\gamma) = (1,0)$ folgt $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$. Für $(\beta,\gamma) = (0,1)$ folgt $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$.

Definition.

Sei rekursiv

$$\begin{array}{rcll} \tilde{p}_0 & := & 1 & \\ \tilde{p}_1 & := & 1 & \\ \tilde{p}_{3n} & := & \tilde{p}_{3n-1} + \tilde{p}_{3n-2} & \text{für } n \geqslant 1 \\ \tilde{p}_{3n+1} & := & 2n \cdot \tilde{p}_{3n} + \tilde{p}_{3n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \\ \tilde{p}_{3n+2} & := & \tilde{p}_{3n+1} + \tilde{p}_{3n} & \text{für } n \geqslant 0 \;. \end{array}$$

Sei rekursiv

$$\begin{array}{rcll} \tilde{q}_0 & := & 1 & \\ \tilde{q}_1 & := & 0 & \\ \tilde{q}_{3n} & := & \tilde{q}_{3n-1} + \tilde{q}_{3n-2} & \text{für } n \geqslant 1 \\ \tilde{q}_{3n+1} & := & 2n \cdot \tilde{q}_{3n} + \tilde{q}_{3n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \\ \tilde{q}_{3n+2} & := & \tilde{q}_{3n+1} + \tilde{q}_{3n} & \text{für } n \geqslant 0 \;. \end{array}$$

Definition. Für $n \geqslant 0$ sei

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}_n & := & \mathrm{e}\tilde{q}_{3n} - \tilde{p}_{3n} \\ \tilde{B}_n & := & -(\mathrm{e}\tilde{q}_{3n+1} - \tilde{p}_{3n+1}) \\ \tilde{C}_n & := & -(\mathrm{e}\tilde{q}_{3n+2} - \tilde{p}_{3n+2}) \;. \end{array}$$

Bemerkung. Für $n \geqslant 0$ ist

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}_n & = & A_n \\ \tilde{B}_n & = & B_n \\ \tilde{C}_n & = & C_n \end{array}$$

Dazu genügt es, folgendes zu zeigen.

$$\begin{array}{rcll} \tilde{A}_0 & \overset{!}{=} & \mathrm{e} - 1 & \\ \tilde{B}_0 & \overset{!}{=} & 1 & \\ \tilde{A}_n & \overset{!}{=} & -\tilde{B}_{n-1} - \tilde{C}_{n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \\ \tilde{B}_n & \overset{!}{=} & -2n\tilde{A}_n + \tilde{C}_{n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \\ \tilde{C}_n & \overset{!}{=} & \tilde{B}_n - \tilde{A}_n & \text{für } n \geqslant 0 \;. \end{array}$$

In der Tat wird

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{A}_0 & = & \mathrm{e}\tilde{q}_0 - \tilde{p}_0 & = & \mathrm{e} - 1 \\ \tilde{B}_0 & = & -(\mathrm{e}\tilde{q}_1 - \tilde{p}_1) & = & 1 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lllllll}
\tilde{A}_n & = & \mathrm{e}\tilde{q}_{3n} - \tilde{p}_{3n} & = & \mathrm{e}\tilde{q}_{3n-1} + \mathrm{e}\tilde{q}_{3n-2} - \tilde{p}_{3n-1} - \tilde{p}_{3n-2} & = & -\tilde{B}_{n-1} - \tilde{C}_{n-1} \quad \text{für } n \geqslant 1 \\
\tilde{B}_n & = & -\mathrm{e}\tilde{q}_{3n+1} + \tilde{p}_{3n+1} & = & -\mathrm{e} \cdot 2n \cdot \tilde{q}_{3n} - \mathrm{e}\tilde{q}_{3n-1} + 2n \cdot \tilde{p}_{3n} + \tilde{p}_{3n-1} & = & -2n\tilde{A}_n + \tilde{C}_{n-1} \quad \text{für } n \geqslant 1 \\
\tilde{C}_n & = & -\mathrm{e}\tilde{q}_{3n+2} + \tilde{p}_{3n+2} & = & -\mathrm{e}\tilde{q}_{3n+1} - \mathrm{e}\tilde{q}_{3n} + \tilde{p}_{3n+1} + \tilde{p}_{3n} & = & \tilde{B}_n - \tilde{A}_n \quad \text{für } n \geqslant 0 \,.
\end{array}$$

Bemerkung. Für $m \to \infty$ wird

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{e}\tilde{q}_m - p_m \;=\; \left\{ \begin{array}{rl} \tilde{A}_n & \text{falls } m = 3n \\ -\tilde{B}_n & \text{falls } m = 3n+1 \\ -\tilde{C}_n & \text{falls } m = 3n+2 \end{array} \right\} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} A_n & \text{falls } m = 3n \\ -B_n & \text{falls } m = 3n+1 \\ -C_n & \text{falls } m = 3n+2 \end{array} \right\} \;\to\; 0 \,.$$

Bemerkung. Es ist

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m\geqslant 2}} \frac{\tilde{p}_m}{\tilde{q}_m} \;=\; \mathrm{e} \,.$$

Denn es wird

$$\frac{\tilde{p}_m}{\tilde{q}_m} - \mathrm{e} \;=\; \frac{\tilde{p}_m - \mathrm{e}\tilde{q}_m}{\tilde{q}_m} \;\to\; 0 \,,$$

da für $m \geqslant 2$ nach Rekursion $\tilde{q}_m \geqslant \tilde{q}_2 = 1$ ist.

Bemerkung. Seien die Folgen $(p_k)_{k\geqslant -1}$ und $(q_k)_{k\geqslant -1}$ zum Kettenbruch

$$[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots]$$

gehörig.

Es ist, vgl. letztes Beispiel in §2.2,

$$\begin{array}{rcll}
p_0 & = & 1 & \\
p_1 & = & 2 & \\
p_{3n-1} & = & p_{3n-2} + p_{3n-3} & \text{für } n \geqslant 1 \\
p_{3n} & = & 2n \cdot p_{3n-1} + p_{3n-2} & \text{für } n \geqslant 1 \\
p_{3n+1} & = & p_{3n} + p_{3n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \,.
\end{array}$$

Es ist auch

$$\begin{array}{rcll}
\tilde{p}_1 & = & 1 & \\
\tilde{p}_2 & = & 2 & \\
\tilde{p}_{3n} & = & \tilde{p}_{3n-1} + \tilde{p}_{3n-2} & \text{für } n \geqslant 1 \\
\tilde{p}_{3n+1} & = & 2n \cdot \tilde{p}_{3n} + \tilde{p}_{3n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \\
\tilde{p}_{3n+2} & = & \tilde{p}_{3n+1} + \tilde{p}_{3n} & \text{für } n \geqslant 1 \,.
\end{array}$$

Also ist $p_k = \tilde{p}_{k+1}$ für $k \geqslant 1$.

Es ist, vgl. letztes Beispiel in §2.2,

$$\begin{array}{rcll}
q_0 & = & 0 & \\
q_1 & = & 1 & \\
q_{3n-1} & = & q_{3n-2} + q_{3n-3} & \text{für } n \geqslant 1 \\
q_{3n} & = & 2n \cdot q_{3n-1} + q_{3n-2} & \text{für } n \geqslant 1 \\
q_{3n+1} & = & q_{3n} + q_{3n-1} & \text{für } n \geqslant 1 \,.
\end{array}$$

Es ist auch

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1 &= 0 \\
\tilde{q}_2 &= 1 \\
\tilde{q}_{3n} &= \tilde{q}_{3n-1} + \tilde{q}_{3n-2} && \text{für } n \geqslant 1 \\
\tilde{q}_{3n+1} &= 2n \cdot \tilde{q}_{3n} + \tilde{q}_{3n-1} && \text{für } n \geqslant 1 \\
\tilde{q}_{3n+2} &= \tilde{q}_{3n+1} + \tilde{q}_{3n} && \text{für } n \geqslant 1\ .
\end{aligned}$$

Also ist $q_k = \tilde{q}_{k+1}$ für $k \geqslant 1$.

Satz (Euler). Es ist

$$\boxed{\mathrm{e} \;=\; [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots]}$$

Denn es ist

$$[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots] \;=\; \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geqslant 1}} \frac{p_n}{q_n} \;=\; \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geqslant 1}} \frac{\tilde{p}_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}} \;=\; \mathrm{e}\ .$$

2.5 Verallgemeinerte Kettenbrüche

Seien s_1, s_2, s_3, $\ldots \in \mathbb{R}$. Seien t_1, t_2, t_3, $\ldots \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

Definition. Sei

$$\left[\begin{array}{llllll} s_1\ , & s_2\ , & s_3\ , & \ldots\ , & s_n\ , & s_{n+1} \\ t_1\ , & t_2\ , & t_3\ , & \ldots\ , & t_n & \end{array}\right] \;:=\; s_1 + \cfrac{t_1}{s_2 + \cfrac{t_2}{s_3 + \cfrac{t_3}{\ddots + \cfrac{t_{n-1}}{s_n + \frac{t_n}{s_{n+1}}}}}}\ .$$

Hierbei seien auch $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ zugelassen, um Fallunterscheidungen zu vermeiden.

Rekursiv sei also für $n = 0$

$$\left[\begin{array}{l} s_1 \\ \ \end{array}\right] \;:=\; s_1\ ,$$

und für $n \geqslant 1$

$$\left[\begin{array}{lllllll} s_1\ , & s_2\ , & s_3\ , & \ldots\ , & s_{n-1}\ , & s_n\ , & s_{n+1} \\ t_1\ , & t_2\ , & t_3\ , & \ldots\ , & t_{n-1}\ , & t_n & \end{array}\right] \;:=\; s_1 + t_1 \cdot \left[\begin{array}{llllll} s_2\ , & s_3\ , & \ldots\ , & s_{n-1}\ , & s_n\ , & s_{n+1} \\ t_2\ , & t_3\ , & \ldots\ , & t_{n-1}\ , & t_n & \end{array}\right]^{-1}.$$

Bemerkung. Für $n \geqslant 1$ ist

$$\left[\begin{array}{lllllll} s_1\ , & s_2\ , & s_3\ , & \ldots\ , & s_{n-1}\ , & s_n\ , & s_{n+1} \\ t_1\ , & t_2\ , & t_3\ , & \ldots\ , & t_{n-1}\ , & t_n & \end{array}\right] \;=\; \left[\begin{array}{llllll} s_1\ , & s_2\ , & s_3\ , & \ldots\ , & s_{n-1}\ , & s_n + \frac{t_n}{s_{n+1}} \\ t_1\ , & t_2\ , & t_3\ , & \ldots\ , & t_{n-1} & \end{array}\right].$$

Bemerkung. Für $n \geqslant 1$ ist

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} s_1\,, & s_2\,, & s_3\,, & \ldots\,, & s_{n-1}\,, & s_n\,, & s_{n+1} \\ t_1\,, & t_2\,, & t_3\,, & \ldots\,, & t_{n-1}\,, & t_n & \end{bmatrix} &= s_1 + \begin{bmatrix} 0\,, & s_2\,, & s_3\,, & \ldots\,, & s_{n-1}\,, & s_n\,, & s_{n+1} \\ t_1\,, & t_2\,, & t_3\,, & \ldots\,, & t_{n-1}\,, & t_n & \end{bmatrix} \\
&= s_1 + t_1 \cdot \begin{bmatrix} s_2\,, & s_3\,, & \ldots\,, & s_{n-1}\,, & s_n\,, & s_{n+1} \\ t_2\,, & t_3\,, & \ldots\,, & t_{n-1}\,, & t_n & \end{bmatrix}^{-1} .
\end{aligned}$$

Bemerkung. Seien $s_1, s_2, \ldots s_{n+1} \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist, in der Schreibweise von §2.2,

$$[s_1, \ldots, s_n] = \begin{bmatrix} s_1\,, & s_2\,, & s_3\,, & \ldots\,, & s_n\,, & s_{n+1} \\ 1\,, & 1\,, & 1\,, & \ldots\,, & 1 & \end{bmatrix}$$

Beispiel. Wir schreiben in diesem Beispiel kurz $x^- := x^{-1}$ für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

Wir können wie folgt umrechnen.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} s_1\,, & s_2\,, & s_3\,, & s_4\,, & s_5 \\ t_1\,, & t_2\,, & t_3\,, & t_4 & \end{bmatrix} &= s_1 + \cfrac{t_1}{s_2 + \cfrac{t_2}{s_3 + \cfrac{t_3}{s_4 + \cfrac{t_4}{s_5}}}} \\
&= s_1 + \cfrac{1}{s_2 t_1^- + \cfrac{t_2 t_1^-}{s_3 + \cfrac{t_3}{s_4 + \cfrac{t_4}{s_5}}}} \\
&= s_1 + \cfrac{1}{s_2 t_1^- + \cfrac{1}{s_3 t_2^- t_1 + \cfrac{t_3 t_2^- t_1}{s_4 + \cfrac{t_4}{s_5}}}} \\
&= s_1 + \cfrac{1}{s_2 t_1^- + \cfrac{1}{s_3 t_2^- t_1 + \cfrac{1}{s_4 t_3^- t_2 t_1^- + \cfrac{t_4 t_3^- t_2 t_1^-}{s_5}}}} \\
&= s_1 + \cfrac{1}{s_2 t_1^- + \cfrac{1}{s_3 t_2^- t_1 + \cfrac{1}{s_4 t_3^- t_2 t_1^- + \cfrac{1}{s_5 t_4^- t_3 t_2^- t_1}}}} \\
&= \begin{bmatrix} s_1\,, & s_2 t_1^-\,, & s_3 t_2^- t_1\,, & s_4 t_3^- t_2 t_1^-\,, & s_5 t_4^- t_3 t_2^- t_1 \\ 1\,, & 1\,, & 1\,, & 1 & \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Lemma. Seien $n \geqslant 0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k} a_j &= a_0 + a_0 \cdot a_1 + a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + \ldots + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \\
&= \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1+a_1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ a_0\,, & -a_1\,, & -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix} \\
&= \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1}{1+a_1 - \cfrac{a_2}{1+a_2 - \cfrac{a_3}{\ddots - \cfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1} - \cfrac{a_n}{1+a_n}}}}}} .
\end{aligned}$$

Beweis. Wir führen eine Induktion für $n \geqslant 0$.

Für $n = 0$ wird

$$a_0 \;=\; \frac{a_0}{1} \;=\; \begin{bmatrix} 0\,, & 1 \\ a_0 & \end{bmatrix}.$$

Sei $n \geqslant 1$ gegeben. Sei als Induktionsvoraussetzung die Aussage für $n-1$ bekannt. Wir wollen die Aussage für n bekommen.

Vorbereitend merken wir an, daß für $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ sich

$$(*) \qquad \frac{1}{1 - \frac{a}{1+a+x}} \;=\; \frac{1+a+x}{(1+a+x)-a} \;=\; \frac{1+a+x}{1+x} \;=\; 1 + \frac{a}{1+x}$$

ergibt. Dies gilt insbesondere für $x = -1$ und $x = -(1+a)$. Es gilt auch für $x = \infty$.

Wir werden im Verlauf der folgenden Rechnung dies für $a := a_1$ und

$$x \;:=\; \begin{bmatrix} 0\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix}$$

einsetzen. Es wird

$$\begin{aligned}
& a_0 + a_0 \cdot a_1 + a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + \ldots + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \\
= \;& a_0(1 + a_1 + a_1 \cdot a_2 + \ldots + a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \\
\overset{\text{Ind.-V.}}{=} \;& a_0 \left(1 + \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ a_1\,, & -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix} \right) \\
\overset{\text{Bem.}}{=} \;& a_0 \left(1 + a_1 \begin{bmatrix} 1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix}^{-1} \right) \\
\overset{\text{Bem.}}{=} \;& a_0 \left(1 + \tfrac{a_1}{1+x} \right) \\
\overset{(*)}{=} \;& a_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{a_1}{1+a_1+x}} \right) \\
\overset{\text{Bem.}}{=} \;& a_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{a_1}{\begin{bmatrix} 1+a_1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix}}} \right) \\
\overset{\text{Bem.}}{=} \;& a_0 \left(\frac{1}{\begin{bmatrix} 1\,, & 1+a_1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ -a_1\,, & -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix}} \right) \\
\overset{\text{Bem.}}{=} \;& \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1+a_1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ a_0\,, & -a_1\,, & -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Satz (Euler). Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} a_j$ konvergiert, dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} a_j &= a_0 + a_0 \cdot a_1 + a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + \ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1+a_1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & 1+a_n \\ a_0\,, & -a_1\,, & -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n & \end{bmatrix} \\
&=: \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1+a_1\,, & 1+a_2\,, & 1+a_3\,, & \ldots\,, & 1+a_{n-1}\,, & \ldots \\ a_0\,, & -a_1\,, & -a_2\,, & -a_3\,, & -a_4\,, & \ldots\,, & -a_n\,, & \ldots \end{bmatrix} \\
&= \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1}{1+a_1 - \cfrac{a_2}{1+a_2 - \cfrac{a_3}{\ddots}}}}\;.
\end{aligned}$$

Beispiel. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots = 1 + 1 \cdot \frac{x}{1} + 1 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} + 1 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + \ldots$$

Diese Reihe konvergiert.

Sei $x \neq 0$. Mit $a_0 := 1$, $a_1 := \frac{x}{1}$, $a_2 := \frac{x}{2}$, $a_3 := \frac{x}{3}$, $\ldots$, allgemein also mit $a_k := \frac{x}{k}$ für $k \geqslant 1$, wird nach dem Satz von Euler

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1+\frac{x}{1}\,, & 1+\frac{x}{2}\,, & 1+\frac{x}{3}\,, & \ldots \\ 1\,, & -\frac{x}{1}\,, & -\frac{x}{2}\,, & -\frac{x}{3}\,, & -\frac{x}{4}\,, & \ldots \end{bmatrix} \\
&= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{x}{1}}{1+\frac{x}{1} - \cfrac{\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2} - \cfrac{\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{3} - \cfrac{\frac{x}{4}}{\ddots}}}}} \\
&= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1+x - \cfrac{x}{2+x - \cfrac{2x}{3+x - \cfrac{3x}{\ddots}}}}} \\
&= \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1+x\,, & 2+x\,, & 3+x\,, & \ldots \\ 1\,, & -x\,, & -x\,, & -2x\,, & -3x\,, & \ldots \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt mit 1, 2, 3, 4, … erweitert wurde, um die Darstellung zu vereinfachen.

Für $x = 1$ ist insbesondere

$$\begin{aligned} \mathrm{e} \;&=\; \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{4-\cfrac{3}{\ddots}}}}} \\ &=\; \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 2\,, & 3\,, & 4\,, & \dots \\ 1\,, & -1\,, & -1\,, & -2\,, & -3\,, & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel. Sei $x \in (-1, +1)$. Die geometrische Reihe gibt

$$\frac{1}{1+x^2} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \;=\; 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots$$

Integration liefert unter Berücksichtigung von $\arctan(0) = 0$

$$\arctan(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \;=\; \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 \pm \dots$$

Anders geschrieben, es ist

$$\arctan(x) \;=\; x + x \cdot (-\tfrac{1}{3}x^2) + x \cdot (-\tfrac{1}{3}x^2) \cdot (-\tfrac{3}{5}x^2) + x \cdot (-\tfrac{1}{3}x^2) \cdot (-\tfrac{3}{5}x^2) \cdot (-\tfrac{5}{7}x^2) + \dots$$

Diese Reihe konvergiert. Sie konvergiert auch noch für $x = 1$ nach Leibniz. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist die Reihe linksseitig stetig in $x = 1$. Da auch der arctan dort stetig ist, folgt, daß die Reihe für $x = 1$ gegen $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ konvergiert.

Sei $x \in (-1, 1]$ gegeben mit $x \neq 0$.

Mit $a_0 := 1$, $a_1 := -\frac{1}{3}x^2$, $a_2 := -\frac{3}{5}x^2$, $a_3 := -\frac{5}{7}x^2$, $\dots$, allgemein also mit $a_k := -\frac{2k-1}{2k+1}x^2$ für $k \geqslant 1$, wird nach dem Satz von Euler

$$\begin{aligned} \arctan(x) \;&=\; \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 1 - \frac{1}{3}x^2\,, & 1 - \frac{3}{5}x^2\,, & 1 - \frac{5}{7}x^2\,, & \dots \\ 1\,, & \frac{1}{3}x^2\,, & \frac{3}{5}x^2\,, & \frac{5}{7}x^2\,, & \frac{7}{8}x^2\,, & \dots \end{bmatrix} \\ &=\; \cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{3}x^2}{1-\frac{1}{3}x^2+\cfrac{\frac{3}{5}x^2}{1-\frac{3}{5}x^2+\cfrac{\frac{5}{7}x^2}{1-\frac{5}{7}x^2+\cfrac{\frac{7}{9}x^2}{\ddots}}}}} \\ &=\; \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2x^2}{3-x^2+\cfrac{3^2x^2}{5-3x^2+\cfrac{5^2x^2}{7-5x^2+\cfrac{7^2x^2}{\ddots}}}}} \\ &=\; \begin{bmatrix} 0\,, & 1\,, & 3 - x^2\,, & 5 - 3x^2\,, & 7 - 5x^2\,, & 9 - 7x^2\,, & \dots \\ 1\,, & 1^2x^2\,, & 3^2x^2\,, & 5^2x^2\,, & 7^2x^2\,, & 9^2x^2\,, & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt mit 3, 5, 7, 9 ... erweitert wurde, um die Darstellung zu vereinfachen.

Für $x = 1$ ist insbesondere, nach Multiplikation mit 4,

$$\boxed{\begin{aligned} \pi &= 4\arctan(1) \\ &= \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\ddots}}}}} \\ &= \left[\begin{array}{ccccccc} 0\,, & 1\,, & 2\,, & 2\,, & 2\,, & 2\,, & \dots \\ 4\,, & 1^2\,, & 3^2\,, & 5^2\,, & 7^2\,, & 9^2\,, & \dots \end{array}\right] \end{aligned}}\,.$$

Kapitel 3

Algebraische und transzendente Zahlen

3.1 Algebraische Zahlen

Definition. Sei $z \in \mathbb{C}$.

Es heißt z *algebraisch*, falls es ein Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad $\geqslant 1$ gibt mit $f(z) = 0$.

Schreiben wir ein solches Polynom $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 X^0$, wobei $n \geqslant 1$, wobei $a_k \in \mathbb{Q}$ für $k \in [0, n]$ und wobei $a_n \neq 0$, so ist also

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 z^0 \;=\; 0 \;.$$

Beispiel.

- Es ist $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ algebraisch als Nullstelle von $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
- Es ist $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ algebraisch als Nullstelle von $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
- Es ist $\sqrt{2} + 1$ algebraisch. Dazu rechnen wir wie folgt.

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{2}+1)^0 & = & 1 \\ (\sqrt{2}+1)^1 & = & 1 + \sqrt{2} \\ (\sqrt{2}+1)^2 & = & 3 + 2\sqrt{2} \end{array}$$

  An dieser Stelle erkennt man, daß

$$(\sqrt{2}+1)^2 - 2(\sqrt{2}+1)^1 - 1 \;=\; (3 + 2\sqrt{2}) - 2(1 + \sqrt{2}) - 1 \;=\; 0$$

  ist. Folglich ist $\sqrt{2} + 1$ eine Nullstelle von $X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
  Das hätte man auch so einsehen können: Für $\sqrt{2} + 1$ ist $((\sqrt{2}+1) - 1)^2 - 2 = 0$, also $(\sqrt{2}+1)^2 - 2(1 + \sqrt{2}) - 1 = 0$.

- Sei $q \in \mathbb{Q}$. Es ist q algebraisch als Nullstelle von $X - q \in \mathbb{Q}[X]$.

Beispiel. Nicht algebraisch sind z.B. e und π. Dies wissen wir aber noch nicht.

Bemerkung. Sei $z \in \mathbb{C}$ algebraisch.

(1) Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von minimalem Grad bezüglich der Eigenschaften, normiert zu sein und Nullstelle z zu haben.

Mit anderen Worten, sei $n \geqslant 1$ der Grad von $f(X)$. Zum einen ist $f(z) = 0$. Zum anderen hat jedes normierte Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$, welches Nullstelle z hat, einen Grad $\geqslant n$.

Sei $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben mit $g(z) = 0$. Wir behaupten, daß dann $f(X)$ ein Teiler von $g(X)$ ist.

Dazu setzen wir eine Polynomdivision mit Rest an: $g(X) = f(X) \cdot q(X) + r(X)$, wobei $q(X)$, $r(X) \in \mathbb{Q}[X]$, und mit $r(X) = 0$ oder $r(X)$ von kleinerem Grad als $f(X)$.

Annahme, $r(X) \neq 0$. Sei a der Leitkoeffizient von $r(X)$ und sei $\tilde{r}(X) := a^{-1} \cdot r(X)$ das zu $r(X)$ gehörige normierte Polynom. Dann ist

$$0 \;=\; g(z) \;=\; f(X) \cdot q(X) + r(z) \;=\; r(z)\ .$$

Also ist auch $\tilde{r}(z) = 0$, im *Widerspruch* zur Minimalität des Grades von $f(X)$.

Somit ist $r(X) = 0$ und also $g(X) = f(X) \cdot q(X)$. Mithin ist $f(X)$ ein Teiler von $g(X)$.

(2) Das Polynom $f(X)$ aus (1) liegt mit den beschriebenen Eigenschaften eindeutig fest.

Denn sind $f(X)$, $\tilde{f}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ Polynome mit diesen Eigenschaften, dann teilt $f(X)$ das Polynom $\tilde{f}(X)$, und umgekehrt $\tilde{f}(X)$ das Polynom $f(X)$, was wegen Normiertheit $f(X) = \tilde{f}(X)$ nach sich zieht.

Definition. Sei $z \in \mathbb{C}$ algebraisch.

Das gemäß vorstehender Bemerkung eindeutig festliegende Polynom von minimalem Grad bezüglich der Eigenschaften, normiert zu sein und Nullstelle z zu haben, heißt *Minimalpolynom* von z über $\mathbb{Q}$, geschrieben

$$\mu_z(X) \;\in\; \mathbb{Q}[X]\ .$$

Für $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gilt:

$$g(z) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_z(X) \text{ teilt } g(X)\ .$$

Hierbei folgt die Implikation $\Leftarrow$ aus $\mu_z(z) = 0$, die Implikation $\Rightarrow$ aus der vorstehenden Bemerkung.

Definition. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad $\geqslant 1$ gegeben.

Es heißt $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *irreduzibel*, falls es nicht möglich ist, $f(X) = u(X) \cdot v(X)$ zu schreiben mit $u(X)$, $v(X) \in \mathbb{Q}[X]$ beide von kleinerem Grad als $f(X)$.

Bemerkung. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad 2 oder 3 gegeben.

Dann ist $f(X)$ genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat.

Denn eine solche Nullstelle liefert eine Zerlegung von $f(X)$ in einen Faktor von Grad 1 und einen weiteren Faktor.

Umgekehrt hat in einer Zerlegung von $f(X)$ in zwei Faktoren von kleinerem Grad wenigstens ein Faktor Grad 1 und damit eine Nullstelle.

Beispiel. Es sind $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ mangels Nullstelle in $\mathbb{Q}$ irreduzibel, da sie von Grad $\in \{2, 3\}$ sind.

Es ist $(X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ nicht irreduzibel. Es hat dieses Polynom keine Nullstelle. Aber es ist auch nicht von Grad $\in \{2, 3\}$, womit ein Widerspruch vermieden wird.

Bemerkung. Sei $z \in \mathbb{C}$ algebraisch. Es ist $\mu_z(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.

Es ist $\mu_z(X)$ von Grad $\geqslant 1$.

Annahme, es ist $\mu_z(X) = u(X) \cdot v(X)$ mit $u(X)$, $v(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von kleinerem Grad als $\mu_z(X)$. Dann ist

$$0 \;=\; \mu_z(z) \;=\; u(z) \cdot v(z)\;.$$

Also ist o.E. $u(z) = 0$. Somit ist $\mu_z(X)$ ein Teiler von $u(X)$. Dies ist aber aus Gradgründen nicht möglich. *Widerspruch.*

Bemerkung. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ normiert und irreduzibel. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(X)$. Dann ist

$$f(X) \;=\; \mu_z(X)\;.$$

Denn aus $f(z) = 0$ folgt, daß $\mu_z(X)$ ein Teiler von $f(X)$ ist. Da $f(X)$ irreduzibel ist und da $\mu_z(X)$ von Grad $\geqslant 1$ ist, muß $\mu_z(X)$ vom selben Grad wie $f(X)$ sein. Da $\mu_z(X)$ ein Teiler von $f(X)$ ist und da $\mu_z(X)$ und $f(X)$ beide normiert sind, folgt $f(X) = \mu_z(X)$.

Beispiel. Es ist $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ mangels Nullstelle in $\mathbb{Q}$ irreduzibel. Es hat die Nullstellen $\sqrt[3]{2}$, $\zeta_3\sqrt[3]{2}$ und $\zeta_3^2\sqrt[3]{2}$ in $\mathbb{C}$. Also ist

$$X^3 - 2 \;=\; \mu_{\sqrt[3]{2}}(X) \;=\; \mu_{\zeta_3\sqrt[3]{2}}(X) \;=\; \mu_{\zeta_3^2\sqrt[3]{2}}(X)\;.$$

Definition. Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Teilkörper* von $\mathbb{C}$, falls die folgenden Bedingungen $(1, 2, 3, 4)$ gelten.

(1) Es ist $1 \in K$.

(2) Sind $x,\, y \in K$, dann ist auch $x - y \in K$.

(3) Sind $x,\, y \in K$, dann ist auch $x \cdot y \in K$.

(4) Für $x \in K \smallsetminus \{0\}$ ist auch $x^{-1} \in K$.

Bemerkung. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper.

(1) Es ist $0 = 1 - 1 \in K$.
Für $x \in K$ ist auch $-x = 0 - x \in K$.
Für $x,\, y \in K$ ist auch $x + y = x - (-y) \in K$.
Für $x \in K$ und $y \in K \smallsetminus \{0\}$ ist auch $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1} \in K$.
Es sind in K also alle Grundrechenarten durchführbar.

(2) Es ist $1 \in K$. Also ist $-1 \in K$. Also ist $\mathbb{Z} \subseteq K$. Also ist

$$\mathbb{Q} \subseteq K \,.$$

Situation:

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ | \\ K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Mittels in $\mathbb{C}$ durchgeführter Multiplikation von Elementen von $\mathbb{Q}$ mit Elementen von K wird K auch zu einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Beispiel. Es sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ Teilkörper von $\mathbb{C}$.

Beispiel. Es ist

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \;=\; \{\, a + b\sqrt{2} \,:\, a,\, b \in \mathbb{Q} \,\} \;\subseteq\; \mathbb{C}$$

ein Teilkörper, wie wir begründen wollen.

Es ist $1 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Sind $x = a + b\sqrt{2}$ und $y = c + d\sqrt{2}$, wobei $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{Q}$, dann sind auch

$$\begin{array}{rcll} x - y &=& (a-c) + (b-d)\sqrt{2} & \in\; \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ x \cdot y &=& (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} & \in\; \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \,. \end{array}$$

Sei $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \smallsetminus \{0\}$, wobei $a,\, b \in \mathbb{Q}$. Dann ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.

Ist $b = 0$, dann ist $a \neq 0$ und also $a^2 - 2b^2 \neq 0$.

Ist $b \neq 0$, dann ist $a^2 - 2b^2 \neq 0$, da $\frac{a^2}{b^2} \neq 2$.

Somit wird

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} \;=\; \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} \;=\; \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \;\in\; \mathbb{Q}(\sqrt{2})\;.$$

Beispiel. Es ist

$$\mathbb{Q}(\mathrm{i}) \;=\; \{\, a+b\mathrm{i} \,:\, a,\, b \,\in\, \mathbb{Q}\,\} \;\subseteq\; \mathbb{C}$$

ein Teilkörper, wie wir begründen wollen.

Es ist $1 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

Sind $x = a + b\mathrm{i}$ und $y = c + d\mathrm{i}$, wobei $a,\, b,\, c,\, d \,\in\, \mathbb{Q}$, dann sind auch

$$\begin{aligned} x - y &= (a-c) + (b-d)\mathrm{i} && \in\; \mathbb{Q}(\mathrm{i}) \\ x \cdot y &= (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i} && \in\; \mathbb{Q}(\mathrm{i})\;. \end{aligned}$$

Sei $x = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i}) \smallsetminus \{0\}$, wobei $a,\, b \,\in\, \mathbb{Q}$. Dann ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Folglich ist $a^2 + b^2 \neq 0$. Somit wird

$$\frac{1}{a+b\mathrm{i}} \;=\; \frac{a-b\mathrm{i}}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})} \;=\; \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\,\mathrm{i} \;\in\; \mathbb{Q}(\mathrm{i})\;.$$

Definition. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper.

Es heißt K ein *Zahlkörper,* falls K als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ endlichdimensional ist. Sei diesenfalls

$$[K : \mathbb{Q}] \;:=\; \dim_{\mathbb{Q}} K\;,$$

auch *Körpergrad* von K über $\mathbb{Q}$ genannt.

Beispiel.

(1) Es hat $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ die $\mathbb{Q}$-lineare Basis $(1, \sqrt{2})$. Folglich ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Zahlkörper, mit Körpergrad $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

(2) Es hat $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ die $\mathbb{Q}$-lineare Basis $(1, \mathrm{i})$. Folglich ist $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ ein Zahlkörper, mit Körpergrad $[\mathbb{Q}(\mathrm{i}) : \mathbb{Q}] = 2$.

Bemerkung. Sei $z \in \mathbb{C}$ algebraisch. Sei n der Grad von $\mu_z(X)$. Dann ist

$$\mathbb{Q}(z) \;:=\; {}_{\mathbb{Q}}\langle z^0, z^1, \dots, z^{n-1}\rangle \;\subseteq\; \mathbb{C}$$

ein Zahlkörper, welcher $(z^0, z^1, \dots, z^{n-1})$ als eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis hat. Insbesondere ist

$$n \;=\; [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]\;.$$

Beweis. Zeigen wir, daß $\mathbb{Q}(z) \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper ist.

Es ist $1 = z^0 \in \mathbb{Q}(z)$.

Seien $x = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ und $y = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j$ in $\mathbb{Q}(z)$, wobei $a_j,\, b_j \in \mathbb{Q}$ für $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Seien $f(X) := \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ und $g(X) := \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ in $\mathbb{Q}[X]$ gebildet.

Es ist $x - y = \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - b_j) z^j \in \mathbb{Q}(z)$.

Polynomdivision mit Rest gibt

$$f(X) \cdot g(X) \;=\; \mu_z(X) \cdot q(X) + r(X)\,,$$

wobei $q(X),\, r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und wobei $r(X) = 0$ oder aber $r(X)$ von Grad $\leqslant n-1$ ist. Jedenfalls ist $r(X) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j X^j$, wobei $c_j \in \mathbb{Q}$ für $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Damit wird

$$x \cdot y \;=\; f(z) \cdot g(z) \;=\; \underbrace{\mu_z(z)}_{=\,0} \cdot q(z) + r(z) \;=\; r(z) \;=\; \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j \;\in\; \mathbb{Q}(z)\,.$$

Sei schließlich $x \in \mathbb{Q}(z) \smallsetminus \{0\}$. Betrachten wir die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi_x & : & \mathbb{Q}(z) & \to & \mathbb{Q}(z) \\ & & u & \mapsto & \varphi_x(u) = x \cdot u \end{array}$$

Die Abbildung φ_x ist injektiv, da aus $0 = \varphi_x(u) = xu$ wegen $x \neq 0$ bereits $u = 0$ folgt, für $u \in \mathbb{Q}(z)$.

Da $\mathbb{Q}(z)$ ein endliches $\mathbb{Q}$-lineares Erzeugendensystem hat, ist $\mathbb{Q}(z)$ endlichdimensional über $\mathbb{Q}$. Also ist φ_x bijektiv. Somit gibt es ein $u \in \mathbb{Q}(z)$ mit $1 = \varphi_x(u) = xu$. Somit ist $x^{-1} = u \in \mathbb{Q}(z)$.

Zeigen wir nun noch, daß $(z^0, z^1, \ldots, z^{n-1})$ ein $\mathbb{Q}$-linear unabhängiges Tupel ist. Seien $\lambda_0,\, \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 \;=\; \lambda_0 z^0 + \lambda_1 z^1 + \cdots + \lambda_{n-1} z^{n-1}$$

gegeben. Sei $h(X) := \lambda_0 X^0 + \lambda_1 X^1 + \cdots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$. Dann ist $h(z) = 0$. Folglich ist $\mu_z(X)$ ein Teiler von $h(X)$. Aus Gradgründen folgt $h(X) = 0$. Mit anderen Worten, es ist $\lambda_j = 0$ für $0 \leqslant j \leqslant n-1$. ▫

Lemma. Sei $z \in \mathbb{C}$. Die folgenden Aussagen (1) und (2) sind äquivalent.

(1) Es ist z algebraisch.

(2) Es gibt einen Zahlkörper $K \subseteq \mathbb{C}$ mit $z \in K$.

Beweis.

Zu (1) $\Rightarrow$ (2). Da $z \in \mathbb{Q}(z)$, folgt dies mit vorstehender Bemerkung.

Zu (1) $\Leftarrow$ (2). Wir betrachten die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & K \\ u & \longmapsto & \varphi(u) := zu \; . \end{array}$$

Sei $\chi(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{Q}[X]$ das charakteristische Polynom von φ, wobei $a_j \in \mathbb{Q}$ für $0 \leqslant j \leqslant n$. Dank Cayley-Hamilton wird

$$0 \;=\; \chi(\varphi) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi^j$$

Dabei ist $\varphi^j(1) = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{j \text{ Faktoren}} \cdot 1 \;=\; z^j$ für $j \geqslant 0$. Also ist

$$0 \;=\; (\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi^j)(1) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j (\varphi^j(1)) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \;=\; \chi(z) \; .$$

Somit ist z algebraisch. □

Definition. Sei

$$\overline{\mathbb{Q}} \;:=\; \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z \text{ ist algebraisch} \,\} \;\subseteq\; \mathbb{C} \; .$$

Wir wollen im weiteren Verlauf zeigen, daß $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraisch abgeschlossener Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Vorsicht, wir behaupten dabei nicht, daß $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Zahlkörper ist. Dazu ist er in der Tat zu groß.

3.2 Die relative Situation

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper.

Wir wollen einige Begriffe aus §3.1 dahingehend verallgemeinern, statt $\mathbb{Q}$ als Grundkörper auch den Zahlkörper K als Grundkörper zuzulassen. Die Argumente, die dafür benötigt werden, ergeben sich aus denen von §3.1 durch Ersetzung von $\mathbb{Q}$ durch K.

Sei $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines Polynoms in $K[X] \smallsetminus \{0\}$.

Definition. Das Polynom in $K[X]$ von minimalem Grad bezüglich dessen, normiert zu sein und z als Nullstelle zu haben, heißt *Minimalpolynom* von z über K, geschrieben

$$\mu_{z,K}(X) \;\in\; K[X] \; .$$

Speziell ist $\mu_{z,\mathbb{Q}}(X) = \mu_z(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Beispiel. Es ist $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, aber $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(X) = X - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$.

Bemerkung. Sei $g(X) \in K[X]$. Dann gilt:

$$g(z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_{z,K}(X) \text{ teilt } g(X)$$

Definition. Sei $f(X) \in K[X]$ von Grad $\geqslant 1$. Es heißt $f(X)$ *irreduzibel* in $K[X]$, falls es keine Zerlegung von $f(X)$ als Produkt zweier Faktoren aus $K[X]$ gibt, bei der beide Faktoren kleineren Grad als $f(X)$ haben.

Bemerkung. Es ist $\mu_{z,K}(X) \in K[X]$ irreduzibel und normiert.

Bemerkung. Sei $f(X) \in K[X]$ irreduzibel und normiert. Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben mit $f(z) = 0$. Dann ist $f(X) = \mu_{z,K}(X)$.

Definition. Sei L ein Teilkörper mit von $\mathbb{C}$ mit $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$.

Sei L endlichdimensional als K-Vektorraum.

Wir schreiben

$$[L : K] \ := \ \dim_K L$$

für den *Grad* von L über K.

Situation:

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ | \\ L \\ | \\ K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Bemerkung. Sei n der Grad von $\mu_{z,K}(X) \in K[X]$. Dann ist

$$K(z) \ := \ {}_K\langle z^0, z^1, \ldots, z^{n-1} \rangle \ \subseteq \ \mathbb{C}$$

ein Zahlkörper. Es ist $(z^0, z^1, \ldots, z^{n-1})$ eine K-lineare Basis von $K(z)$. Insbesondere ist

$$n \ = \ [K(z) : K] \, .$$

3.3 Konsequenzen

Bemerkung. Seien K, L, M Teilkörper von $\mathbb{C}$ mit $K \subseteq L \subseteq M$.

Sei L ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

Sei M ein endlichdimensionaler L-Vektorraum.

Dann ist M auch ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es wird

$$[M : K] \; = \; [M : L] \cdot [L : K] \; .$$

Situation:

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ | \\ M \\ | \\ L \\ | \\ K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Beweis. Sei $s := [L : K]$. Sei $t := [M : L]$.

Sei $(x_1, \ldots, x_s)$ eine K-lineare Basis von L.

Sei $(y_1, \ldots, y_t)$ eine L-lineare Basis von M.

Es genügt zu zeigen, daß

$$(\, x_j \, y_k \; : \; 1 \leqslant j \leqslant s, \; 1 \leqslant k \leqslant t \,)$$

eine K-lineare Basis von M ist.

Erzeugend. Sei $z \in M$ gegeben. Wir finden $\lambda_k \in L$ für $1 \leqslant k \leqslant t$ mit

$$z \; = \; \textstyle\sum_{k=1}^t \lambda_k \, y_k \; .$$

Für $1 \leqslant k \leqslant t$ finden wir $\kappa_{j,k} \in K$ für $1 \leqslant j \leqslant s$ mit

$$\lambda_k \; = \; \textstyle\sum_{j=1}^s \kappa_{j,k} \, x_j \; .$$

Zusammen wird

$$z \; = \; \textstyle\sum_{k=1}^t \lambda_k \, y_k \; = \; \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^s \kappa_{j,k} \, x_j \, y_k \; .$$

Linear unabhängig. Seien $\kappa_{j,k} \in K$ für $1 \leqslant j \leqslant s$ und $1 \leqslant k \leqslant t$ gegeben mit

$$0 \; = \; \textstyle\sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^s \kappa_{j,k} \, x_j \, y_k \; .$$

Es ist

$$0 \; = \; \textstyle\sum_{k=1}^t \underbrace{(\sum_{j=1}^s \kappa_{j,k} \, x_j)}_{\in L} y_k \; .$$

Da $(y_1, \ldots, y_t)$ linear unabhängig ist über L, folgt

$$0 \; = \; \textstyle\sum_{j=1}^s \kappa_{j,k} \, x_j$$

für $1 \leqslant k \leqslant t$. Da $(x_1, \ldots, x_s)$ linear unabhängig ist über K, folgt

$$\kappa_{j,k} \;=\; 0$$

für $1 \leqslant j \leqslant s$ und $1 \leqslant k \leqslant t$. $\square$

Bemerkung. Es ist $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper. Es ist $\overline{\mathbb{Q}}$ algebraisch abgeschlossen.

Beweis.

Teilkörper. Es ist $1 \in \mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.

Seien $x,\, y \in \overline{\mathbb{Q}}$. Dann ist $\mathbb{Q}(x)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ferner ist $\mathbb{Q}(x)(y)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}(x)$-Vektorraum.

Also ist auch $M := \mathbb{Q}(x)(y)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum, mit

$$[M : \mathbb{Q}] \;=\; [\mathbb{Q}(x)(y) : \mathbb{Q}] \;=\; [\mathbb{Q}(x)(y) : \mathbb{Q}(x)] \cdot [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]\;.$$

Mit anderen Worten, es ist M ein Zahlkörper.

Da $x,\, y \in M$, ist auch $x - y \in M$. Folglich ist $x - y$ algebraisch, d.h. $x - y \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Da $x,\, y \in M$, ist auch $x \cdot y \in M$. Folglich ist $x \cdot y$ algebraisch, d.h. $x \cdot y \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Sei nun $x \neq 0$. Dann ist wegen $x \in \mathbb{Q}(x)$ auch $x^{-1} \in \mathbb{Q}(x)$. Folglich ist x^{-1} algebraisch, d.h. $x^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Algebraisch abgeschlossen. Sei $f(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ von Grad $\geqslant 1$. Wir haben zu zeigen, daß $f(X)$ in $\overline{\mathbb{Q}}$ eine Nullstelle hat.

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ gegeben. Es genügt, $z \overset{!}{\in} \overline{\mathbb{Q}}$ zu zeigen.

Wir schreiben $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, für geeignete $n \geqslant 1$ und $a_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ für $0 \leqslant j \leqslant n$.

Iteration der vorigen Bemerkung gibt, daß $K := \mathbb{Q}(a_0)(a_1)\ldots(a_n)$ ein Zahlkörper ist, mit

$$[K : \mathbb{Q}] \;=\; \prod_{j=0}^{n} [\, \mathbb{Q}(a_0)(a_1)\ldots(a_j) \;:\; \mathbb{Q}(a_0)(a_1)\ldots(a_{j-1})\,]\;.$$

Nach Konstruktion ist $f(X) \in K[X]$.

Es ist $L := K(z)$ endlichdimensional als K-Vektorraum. Also ist auch L ein Zahlkörper mit

$$[L : \mathbb{Q}] \;=\; [L : K] \cdot [K : \mathbb{Q}]\;.$$

Da nun $z \in L$, ist z algebraisch, d.h. $z \in \overline{\mathbb{Q}}$. $\square$

3.4 Transzendenz von e und π

3.4.1 Definition Transzendenz

Definition. Es heißt eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ *transzendent*, wenn sie nicht algebraisch ist.

In den komplexen Zahlen ist die Teilmenge der transzendenten Zahlen also gegeben durch

$$\mathbb{C} \smallsetminus \overline{\mathbb{Q}} \quad \subseteq \quad \mathbb{C} \,.$$

Bemerkung. Wir können noch umformulieren.

(1) Es ist $z \in \mathbb{C}$ genau dann transzendent, wenn z nicht Nullstelle eines Polynoms aus $\mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$ ist, d.h. wenn $(z^0, z^1, z^2, \dots)$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.

(2) Es ist $z \in \mathbb{C}$ genau dann transzendent, wenn z nicht in einem Zahlkörper enthalten ist.

Bemerkung. Ohne Beweis merken wir an: Es gibt abzählbar viele Polynome in $\mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$, also abzählbar viele algebraische Elemente in $\mathbb{C}$. Dagegen gibt es überabzählbar viele Elemente in $\mathbb{C}$. Also gibt es überabzählbar viele transzendente Zahlen in $\mathbb{C}$.

Im Moment kennen wir aber noch keine konkrete transzendente Zahl. Wir wollen im folgenden zeigen, daß e und π transzendent sind.

3.4.2 Transzendenz von e

Lemma. Sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Sei $s \in \mathbb{Z}$. Sei $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Dann ist

$$\int_0^{+\infty} x^k \cdot \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x \;=\; k! \,.$$

Ferner ist

$$T \;:=\; \mathrm{e}^s \cdot \int_s^{+\infty} f(x)(x-s)^k \cdot \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$$

eine durch $k!$ teilbare ganze Zahl. Zudem ist

$$T - f(s) \cdot k!$$

eine durch $(k+1)!$ teilbare ganze Zahl.

Beweis. Wir zeigen zunächst mit Induktion, daß für $n \geqslant 0$ gilt:

$$\int_0^{+\infty} x^n \cdot \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x \;=\; n! \,.$$

Für $n = 0$ wird

$$\int_0^{+\infty} x^0 \cdot \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{u \to +\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} \;=\; 0 - (-1) \;=\; 1 \;=\; 0! \,.$$

Im Induktionsschritt erhalten wir für $n \geqslant 1$

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^{+\infty} x^n \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x & = & \lim_{u\to+\infty} \int_0^u x^n \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \\
& = & \lim_{u\to+\infty} \left([x^n \cdot (-\mathrm{e}^{-x})]_0^u - \int_0^u nx^{n-1} \cdot (-\mathrm{e}^{-x})\, \mathrm{d}x \right) \\
& = & \lim_{u\to+\infty} \int_0^u nx^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \\
& = & n \cdot \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \\
& \overset{\text{I.V.}}{=} & n \cdot (n-1)! \\
& = & n!\,.
\end{array}$$

Wir schreiben

$$f(X+s) \;=\; \sum_{j=0}^{\ell} b_j X^j\,,$$

wobei $\ell \geqslant 0$ und wobei $b_j \in \mathbb{Z}$ für $0 \leqslant j \leqslant \ell$. Es ist $f(s) = b_0$.

Substitution $x - s = y$ gibt nun

$$\begin{array}{rcl}
T & = & \mathrm{e}^s \cdot \int_0^{+\infty} f(x)(x-s)^k \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \\
& = & \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^s \cdot \int_0^u f(x)(x-s)^k \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \\
& = & \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^s \cdot \int_0^u f(y+s) y^k \cdot \mathrm{e}^{-y-s}\, \mathrm{d}y \\
& = & \sum_{j=0}^{\ell} b_j \lim_{u\to+\infty} \int_0^u y^{k+j} \cdot \mathrm{e}^{-y}\, \mathrm{d}y \\
& = & \sum_{j=0}^{\ell} b_j \int_0^{+\infty} y^{k+j} \cdot \mathrm{e}^{-y}\, \mathrm{d}y \\
& = & \sum_{j=0}^{\ell} b_j \cdot (k+j)! \\
& = & b_0 \cdot k! + \sum_{j=1}^{\ell} b_j \cdot (k+j)! \\
& = & f(s) \cdot k! + \sum_{j=1}^{\ell} b_j \cdot (k+j)!\,.
\end{array}$$

Daher ist T durch $k!$ und $T - f(s) \cdot k!$ durch $(k+1)!$ teilbar. □

Satz. Es ist e transzendent.

Beweis. Annahme, nicht. Es gibt ein Polynom $h(X) \in \mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$ mit $h(e) = 0$. Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten können wir $h(X) \in \mathbb{Z}[X] \smallsetminus \{0\}$ annehmen. Da $\mathrm{e} \neq 0$, können wir nach Division durch eine Potenz von X auch $h(0) \neq 0$ annehmen. Ferner können wir nach eventueller Multiplikation von $h(X)$ mit (-1) noch $a_0 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ annehmen.

Schreiben wir $h(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ mit $n \geqslant 1$, mit $a_j \in \mathbb{Z}$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ und mit $a_n \neq 0$ und $a_0 \geqslant 1$, so wird

$$\sum_{s=0}^{n} a_s\, \mathrm{e}^s \;=\; 0\,.$$

Wir schreiben $m := a_0 \cdot n! \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Für $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ sei

$$f_\ell(X) \;:=\; X^{\ell m} \cdot (X-1)^{\ell m+1} \cdot (X-2)^{\ell m+1} \cdot \ldots \cdot (X-n)^{\ell m+1} \;\in\; \mathbb{Z}[X]\ .$$

Für $s \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leqslant s \leqslant n$ sei

$$\begin{array}{rcl} T^0_{\ell,s} & := & \mathrm{e}^s \cdot \int_0^s f_\ell(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\ T^\infty_{\ell,s} & := & \mathrm{e}^s \cdot \int_s^{+\infty} f_\ell(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x\ . \end{array}$$

Aus $\sum_{s=0}^n a_s \mathrm{e}^s = 0$ folgt

$$\begin{array}{rcl} \left(\sum_{s=0}^n a_s T^0_{\ell,s}\right) + \left(\sum_{s=0}^n a_s T^\infty_{\ell,s}\right) & = & \sum_{s=0}^n a_s \left(\mathrm{e}^s \cdot \int_0^s f_\ell(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x + \mathrm{e}^s \cdot \int_s^{+\infty} f_\ell(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x\right) \\ & = & \sum_{s=0}^n a_s \mathrm{e}^s \cdot \int_0^{+\infty} f_\ell(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\ & = & 0\ . \end{array}$$

Also ist

$$T_\ell \;:=\; \left|\sum_{s=0}^n a_s T^0_{\ell,s}\right| \;=\; \left|\sum_{s=0}^n a_s T^\infty_{\ell,s}\right|\ .$$

Nach vorstehendem Lemma gilt folgendes.

Falls $1 \leqslant s \leqslant n$, dann ist $T^\infty_{\ell,s} \in \mathbb{Z}$ und durch $(\ell m+1)!$ teilbar.

Ferner ist $T^\infty_{\ell,0} \in \mathbb{Z}$ und durch $(\ell m)!$ teilbar und

$$T^\infty_{\ell,0} - (0-1)^{\ell m+1} \cdot (0-2)^{\ell m+1} \cdot \ldots \cdot (0-n)^{\ell m+1}$$

durch $(\ell m+1)!$ teilbar.

Zusammen ist also

$$\sum_{s=0}^n a_s T^\infty_{\ell,s}$$

durch $(\ell m)!$ teilbar und

$$\left(\sum_{s=0}^n a_s T^\infty_{\ell,s}\right) - a_0 \cdot (-1)^{(\ell m+1)n} \cdot (n!)^{\ell m+1}$$

durch $(\ell m+1)!$ teilbar.

Da $\ell m+1$ und $m = a_0 \cdot n!$ teilerfremd sind, folgt $\sum_{s=0}^n a_s T^\infty_{\ell,s} \neq 0$. Da es sich um eine ganze Zahl handelt, die durch $(\ell m)!$ teilbar ist, ist also

$$T_\ell \;=\; \left|\sum_{s=0}^n a_s T^\infty_{\ell,s}\right| \;\geqslant\; (\ell m)!\ .$$

Wir wählen ein $A \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $A \geqslant |x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n)|$ für $x \in [0,n]$.

Wir wählen ein $B \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B \geqslant |(x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n)|$ für $x \in [0,n]$.

Dann ist $A^{\ell m} \cdot B \geqslant |x^{\ell m} \cdot (x-1)^{\ell m+1} \cdot (x-2)^{\ell m+1} \cdot \ldots \cdot (x-n)^{\ell m+1}| = |f_\ell(x)|$ für $x \in [0,n]$. Also wird

$$\begin{array}{rcl} |T^0_{\ell,s}| & = & |\mathrm{e}^s \cdot \int_0^s f_\ell(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x| \\ & \leqslant & \mathrm{e}^n \cdot \int_0^s |f_\ell(x)| \cdot \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \\ & \leqslant & \mathrm{e}^n \cdot \int_0^s A^{\ell m} \cdot B \cdot \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \\ & \leqslant & \mathrm{e}^n \cdot A^{\ell m} \cdot B \cdot \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \\ & = & \mathrm{e}^n \cdot A^{\ell m} \cdot B \,. \end{array}$$

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \geqslant |a_s|$ für $0 \leqslant s \leqslant n$ gewählt. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \left|\sum_{s=0}^n a_s T^0_{\ell,s}\right| & \leqslant & \sum_{s=0}^n |a_s| \cdot |T^0_{\ell,s}| \\ & \leqslant & \sum_{s=0}^n a \cdot \mathrm{e}^n \cdot A^{\ell m} \cdot B \\ & = & (n+1) \cdot a \cdot \mathrm{e}^n \cdot A^{\ell m} \cdot B \end{array}$$

Da $\lim_{k \to \infty} \frac{A^k}{k!} = 0$ ist, gibt es ein $k_0 \geqslant 0$ derart, daß für $k \geqslant k_0$ sich $\frac{A^k}{k!} < \frac{1}{(n+1) \cdot a \cdot \mathrm{e}^n \cdot B}$ und also

$$(n+1) \cdot a \cdot \mathrm{e}^n \cdot A^k \cdot B \;<\; k!$$

ergibt.

Insbesondere können wir nun ein $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ wählen mit

$$T_\ell \overset{\text{s.o.}}{\leqslant} (n+1) \cdot a \cdot \mathrm{e}^n \cdot A^{\ell m} \cdot B \;<\; (\ell m)! \,.$$

Für dieses ℓ ist

$$(\ell m)! \;\leqslant\; T_\ell \;<\; (\ell m)! \,.$$

Wir haben einen *Widerspruch*.

Für den Nachweis der Transzendenz von π werden wir dagegen erst ein paar Vorbereitungen benötigen.

3.4.3 Symmetrische Polynome

Sei $n \geqslant 1$.

Definition. Sei $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom in $X_1, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Es heißt $f(X_1, \ldots, X_n)$ *symmetrisch*, falls

$$f(X_1, \ldots, X_n) \;=\; f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$$

ist für jede Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

Beispiel. Sei $n = 3$.

- Es ist
$$s_1(X_1, X_2, X_3) \ := \ X_1 + X_2 + X_3 \ \in \ \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$$
ein symmetrisches Polynom.
So z.B. ist für $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
$$s_1(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}) \ = \ s_1(X_2, X_1, X_3) \ = \ X_2 + X_1 + X_3 \ = \ X_1 + X_2 + X_3 \ = \ s_1(X_1, X_2, X_3)\ .$$
Ähnlich für die weiteren Elemente $\sigma \in \mathrm{S}_3$.

- Es ist
$$s_2(X_1, X_2, X_3) \ := \ X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 \ \in \ \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$$
ein symmetrisches Polynom.

- Es ist
$$s_3(X_1, X_2, X_3) \ := \ X_1X_2X_3 \ \in \ \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$$
ein symmetrisches Polynom.

- Es ist
$$g(X_1, X_2, X_3) \ := \ X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_2^3X_1 + X_2^3X_3 + X_3^3X_1 + X_3^3X_2 - 2X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 \ \in \ \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$$
ein symmetrisches Polynom.

Definition. Sei $1 \leqslant j \leqslant n$. Sei
$$s_j(X_1, \ldots, X_n) \ \ := \ \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = j}} \prod_{k \in I} X_k$$
das j-te *elementarsymmetrische* Polynom. Oft schreiben wir kurz
$$s_j \ := \ s_j(X_1, \ldots, X_n)\ .$$

Definition. Wir ordnen die Menge
$$\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\times n} \ = \ \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$
lexikographisch. Für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \ \in \ \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\times n}$ ist also
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \ > \ (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$
genau dann, wenn es ein $1 \leqslant k \leqslant n$ gibt mit
$$\alpha_1 = \beta_1 \ \ \wedge \ \ \ldots \ \ \wedge \ \ \alpha_{k-1} = \beta_{k-1} \ \ \wedge \ \ \alpha_k > \beta_k \ \ .$$

Für ein Monom $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ aus $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ heiße $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sein *Exponententupel.*

Für ein Polynom $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \smallsetminus \{0\}$ sei unter seinen Monomen mit Koeffizient $\neq 0$ das mit maximalem Exponententupel das *Leitmonom* von $f(X_1, \ldots, X_n)$.

Beispiel.

- Das Polynom $g(X_1, X_2, X_3)$ aus dem vorigen Beispiel hat das Leitmonom

  $$X_1^3 X_2 \;=\; X_1^3 X_2^1 X_3^0 \,,$$

  mit Exponententupel $(3, 1, 0)$.

- Sei $n = 3$. Das Polynom $s_1^1 s_2^3 s_3^2$ hat das Leitmonom

  $$X_1^1 \cdot (X_1 X_2)^3 \cdot (X_1 X_2 X_3)^2 \;=\; X_1^{1+3+2} X_2^{3+2} X_3^2 \;=\; X_1^6 X_2^5 X_3^2 \,,$$

  mit Exponententupel $(1+3+2,\ 3+2,\ 2) = (6, 5, 2)$.

Bemerkung. Ist das Polynom $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \smallsetminus \{0\}$ symmetrisch und ist $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ sein Leitmonom, dann ist

$$\alpha_1 \;\geqslant\; \alpha_2 \;\geqslant\; \ldots \;\geqslant\; \alpha_n \,.$$

Denn *angenommen*, diese Anordnung liegt nicht vor. Dann gibt eine Permutation ein größeres Exponententupel. Da $f(X_1, \ldots, X_n)$ symmetrisch ist, tritt auch dieses im Polynom auf. Dies steht aber im *Widerspruch* zur Maximalität des Exponententupels des Leitmonoms.

Bemerkung. Sei $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\times n}$. Das symmetrische Polynom

$$s_1^{\delta_1} s_2^{\delta_2} \ldots s_n^{\delta_n}$$

hat das Leitmonom

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} \;=\; X_1^{\delta_1} (X_1 X_2)^{\delta_2} \ldots (X_1 X_2 \ldots X_n)^{\delta_n} \,,$$

wobei

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \;=\; (\delta_1 + \ldots + \delta_n\,,\ \delta_2 + \ldots + \delta_n\,,\quad \ldots\quad ,\ \delta_{n-1} + \delta_n\,,\ \delta_n)$$

und also

$$(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \delta_n) \;=\; (\alpha_1 - \alpha_2,\ \alpha_2 - \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} - \alpha_n,\ \alpha_n)$$

ist.

Definition. Sei $n \geqslant 1$. Der *Totalgrad* eines Monoms $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ sei definiert als

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \; .$$

Beispiel. Es hat $X_1^7 X_2^5 X_3^8$ den Totalgrad $7 + 5 + 8 = 20$.

Lemma. Sei $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom.

Dann können wir ein Polynom $u(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ wählen mit

$$f(X_1, \ldots, X_n) \;=\; u(s_1, \ldots, s_n) \; .$$

Jedes symmetrische Polynom ist also ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den elementarsymmetrischen Polynomen.

Ist $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ das Leitmonom von $f(X_1, \ldots, X_n)$, dann hat jedes in unserem gewählten $u(X_1, \ldots, X_n)$ auftretende Monom Totalgrad $\leqslant \alpha_1$.

Beweis. Falls $f(X_1, \ldots, X_n) = 0$, dann ist nichts zu zeigen.

Falls $f(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$, dann argumentieren wir mit Induktion über das Exponententupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ des Leitmonoms $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ von $f(X_1, \ldots, X_n)$. Sei $c \in \mathbb{Z}$ sein Koeffizient.

Es ist $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, wie oben bemerkt.

Wir betrachten das symmetrische Polynom

$$g(X_1, \ldots, X_n) \;:=\; f(X_1, \ldots, X_n) - c s_1^{\alpha_1 - \alpha_2} s_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \ldots s_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} s_n^{\alpha_n} \; .$$

Falls $g(X_1, \ldots, X_n) = 0$ ist, dann nehmen wir das Polynom

$$u(X_1, \ldots, X_n) \;:=\; c \cdot X_1^{\alpha_1 - \alpha_2} X_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \ldots X_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} X_n^{\alpha_n}$$

mit Monom von Totalgrad α_1 und sind fertig wegen $f(X_1, \ldots, X_n) = u(s_1, \ldots, s_n)$.

Falls $g(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$ ist, dann hat sein Leitmonom $X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_n^{\beta_n}$ ein kleineres Exponententupel als das Leitmonom $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ von $f(X_1, \ldots, X_n)$. D.h. es ist

$$(\beta_1, \ldots, \beta_n) \;<\; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \; .$$

Die Induktionsvoraussetzung gibt also ein Polynom $v(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$f(X_1, \ldots, X_n) - c s_1^{\alpha_1 - \alpha_2} s_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \ldots s_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} s_n^{\alpha_n} \;=\; g(X_1, \ldots, X_n) \;=\; v(s_1, \ldots, s_n)$$

und mit der Eigenschaft, daß jedes Monom von $v(X_1, \ldots, X_n)$ Totalgrad $\leqslant \beta_1$ hat und damit auch $\leqslant \alpha_1$.

Mit

$$u(X_1,\dots,X_n) \;:=\; v(X_1,\dots,X_n) + cX_1^{\alpha_1-\alpha_2}X_2^{\alpha_2-\alpha_3}\dots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}X_n^{\alpha_n} \;\in\; \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$$

ist also

$$f(X_1,\dots,X_n) \;=\; v(s_1,\dots,s_n) + cs_1^{\alpha_1-\alpha_2}s_2^{\alpha_2-\alpha_3}\dots s_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}s_n^{\alpha_n} \;=\; u(s_1,\dots,s_n)\;.$$

Dabei ist der Totalgrad von $X_1^{\alpha_1-\alpha_2}X_2^{\alpha_2-\alpha_3}\dots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}X_n^{\alpha_n}$ gleich α_1. Somit ist der Totalgrad jedes Monoms von $u(X_1,\dots,X_n) \leqslant \alpha_1$. ▫

Beispiel. Wir setzen obiges Beispiel fort. Es ist

$$g(X_1,X_2,X_3) \;=\; (X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_2^3X_1 + X_2^3X_3 + X_3^3X_1 + X_3^3X_2) - 2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\;.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} s_1^2s_2 \;&=\; (X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_2^3X_1 + X_2^3X_3 + X_3^3X_1 + X_3^3X_2) + 2(X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_2^2) \\ &\quad + 5(X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2X_3^2)\;. \end{aligned}$$

Also ist

$$g(X_1,X_2,X_3) \;=\; s_1^2s_2 - 2(X_1^2X_2^2+X_1^2X_3^2+X_2^2X_2^2) - 5(X_1^2X_2X_3+X_1X_2^2X_3+X_1X_2X_3^2) - 2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\;.$$

Nun ist

$$s_2^2 \;=\; (X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_2^2) + 2(X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2X_3^2)\;.$$

Und auch gleich

$$s_1s_3 \;=\; X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2X_3^2\;.$$

Also ist

$$g(X_1,X_2,X_3) \;=\; s_1^2s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3 - 2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\;.$$

Nun ist

$$s_1^2 \;=\; (X_1^2+X_2^2+X_3^2) + 2(X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3) \;=\; (X_1^2+X_2^2+X_3^2) + 2s_2\;.$$

Also ist

$$g(X_1,X_2,X_3) \;=\; s_1^2s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3 - 2s_1^2 + 4s_2\;.$$

Weitere Beispiele für diese Tatsache haben wir bereits bei der Berechnung der Diskriminante in §1.4 gesehen.

Wir merken eine Verallgemeinerung des Satzes von Vieta an.

Bemerkung. Sei $h(X) \in \mathbb{C}[X]$ von Grad $n \geqslant 0$. Wir faktorisieren

$$h(X) \;=\; a \cdot (X - z_1) \cdot (X - z_2) \cdot \ldots \cdot (X - z_n)\;,$$

wobei $z_1,\, \ldots,\, z_n \,\in\, \mathbb{C}$ und wobei $a \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ der Leitkoeffizient von $h(X)$ ist.

Ausmultiplizieren gibt

$$\begin{aligned} &h(X) \;= \\ &a \cdot X^n + (-1)^1 a \cdot s_1(z_1, \ldots, z_n) X^{n-1} + (-1)^2 a \cdot s_2(z_1, \ldots, z_n) X^{n-2} + \ldots + (-1)^n a \cdot s_n(z_1, \ldots, z_n) X^{n-n}\;. \end{aligned}$$

Falls $h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ist, dann ist also $a \cdot s_j(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}$ für $1 \leqslant j \leqslant n$.

Beispiel (Vieta). Sei

$$h(X) \;=\; (X - z_1)(X - z_2) \;\in\; \mathbb{C}[X]\;,$$

wobei $z_1,\, z_2 \,\in\, \mathbb{C}$. Ausmultiplizieren gibt

$$\begin{aligned} h(X) \;&=\; X^2 - (z_1 + z_2) X + z_1 z_2 \\ &=\; X^2 + (-1)^1 s_1(z_1, z_2) X^1 + (-1)^2 s_2(z_1, z_2) X^0\;. \end{aligned}$$

Beispiel. Sei

$$h(X) \;=\; (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) \;\in\; \mathbb{C}[X]\;,$$

wobei $z_1,\, z_2,\, z_3 \,\in\, \mathbb{C}$. Ausmultiplizieren gibt

$$\begin{aligned} h(X) \;&=\; X^3 - (z_1 + z_2 + z_3) X^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) X - z_1 z_2 z_3 \\ &=\; X^3 + (-1)^1 s_1(z_1, z_2, z_3) X^2 + (-1)^2 s_2(z_1, z_2, z_3) X^1 + (-1)^3 s_3(z_1, z_2, z_3) X^0\;. \end{aligned}$$

Lemma. Sei $h(X) \in \mathbb{Z}[X]$, von Grad $n \geqslant 0$. Wir faktorisieren

$$h(X) \;=\; a \cdot (X - z_1) \cdot (X - z_2) \cdot \ldots \cdot (X - z_n)\;,$$

wobei $z_1,\, \ldots,\, z_n \,\in\, \mathbb{C}$ und wobei $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ der Leitkoeffizient von $h(X)$ ist.

Sei $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom.

Sei $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ der Exponent von X_1 im Leitmonom von $f(X_1, \ldots, X_n)$.

Dann ist

$$a^d \cdot f(z_1, \ldots, z_n) \;\in\; \mathbb{Z}\;.$$

Beweis. Nach vorigem Lemma gibt es ein Polynom $u(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$f(X_1, \ldots, X_n) \;=\; u(s_1, \ldots, s_n) \;=\; u(s_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, s_n(X_1, \ldots, X_n))\;.$$

und mit allen Monomen von Totalgrad $\leqslant d$.

Nach voriger Bemerkung ist
$$a \cdot s_j(z_1, \ldots, z_n) \;\in\; \mathbb{Z}$$
für $1 \leqslant j \leqslant n$.

Für ein Monom $m(X_1, \ldots, X_n)$ von Totalgrad d_m gilt also
$$a^{d_m} \cdot m(s_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, s_n(z_1, \ldots, z_n)) \;=\; m(a \cdot s_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, a \cdot s_n(z_1, \ldots, z_n)) \;\in\; \mathbb{Z}\,.$$

Da alle Monome, die in $u(X_1, \ldots, X_n)$ auftreten, Totalgrad $\leqslant d$ haben, folgt
$$a^d \cdot f(z_1, \ldots, z_n) \;=\; a^d \cdot u(s_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, s_n(z_1, \ldots, z_n)) \;\in\; \mathbb{Z}\,.$$

$\square$

Beispiel. Es hat
$$h(X) \;=\; X^3 - 2 \;=\; (X - \sqrt[3]{2})(X - \zeta_3\sqrt[3]{2})(X - \zeta_3^2\sqrt[3]{2})\,.$$
Leitkoeffizient $a = 1$.

Es ist
$$f(X_1, X_2, X_3) \;=\; X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_1X_2X_3 + X_1 + X_2 + X_3 \;\in\; \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$$
symmetrisch.

Dank Lemma ist also
$$f(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2}, \zeta_3^2\sqrt[3]{2}) \;\in\; \mathbb{Z}\,.$$
Es gibt auch eine direkte Rechnung
$$\begin{array}{cl} & f(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2}, \zeta_3^2\sqrt[3]{2}) \\ = & (\sqrt[3]{2})^3 + (\zeta_3\sqrt[3]{2})^3 + (\zeta_3^2\sqrt[3]{2})^3 + \sqrt[3]{2} \cdot (\zeta_3\sqrt[3]{2}) \cdot (\zeta_3^2\sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2} + \zeta_3\sqrt[3]{2} + \zeta_3^2\sqrt[3]{2} \\ = & 2 + 2 + 2 + 2 + 0 \;=\; 8 \;\in\; \mathbb{Z}\,. \end{array}$$

3.4.4 Transzendenz von π

Wir folgen **[6]** und **[5]** in der Interpretation von **[4]** .

Bemerkung. Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung einer Kurve.

Sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h. komplex differenzierbar.

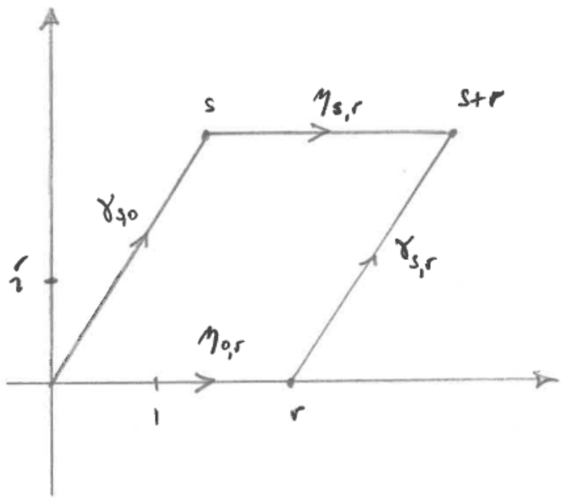
Nach Definition ist
$$\int_\gamma u(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \int_a^b u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dieses Integral ist wegunabhängig. Dies gilt auch noch für stückweise aus differenzierbar parametrisierten Kurven zusammengesetzte Wege.

Bemerkung. Sei $s \in \mathbb{C}$. Sei $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Sei $\gamma_{s,r}(t) := r + st$ für $t \in [0, 1]$. Dies parametrisiert eine Strecke von r nach $s + r$.

Sei $\eta_{s,r}(t) := s + rt$ für $t \in [0, 1]$. Dies parametrisiert eine Strecke von s nach $s + r$.



Sei $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom.

Besagte Wegunabhängigkeit gibt

$$\int_{\gamma_{s,0}} f(z)\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z + \int_{\eta_{s,r}} f(z)\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z \;=\; \int_{\eta_{0,r}} f(z)\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{s,r}} f(z)\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z \;.$$

Sei $r_0 := \max\{|s|, \frac{1}{2}\}$. Betrachten wir einmal $\int_{\gamma_{s,r}} f(z)\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z$ für $r \in \mathbb{R}_{\geqslant r_0}$.

Zunächst ist $|r + st| \leqslant r + |s| \cdot t \leqslant r + |s| \leqslant 2r$ für $t \in [0, 1]$.

Wir schreiben $A := 2^n \cdot \sum_{j=0}^{n} |a_j|$ und schätzen wie folgt ab.

$$\begin{array}{rcl} |f(\gamma_{s,r}(t))| & = & |f(r + st)| \\ & \leqslant & \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot |r + st|^j \\ & \leqslant & (2r)^n \cdot \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot (2r)^{j-n} \\ & \leqslant & 2^n \cdot r^n \cdot \sum_{j=0}^{n} |a_j| \\ & = & A \cdot r^n \;. \end{array}$$

Da $\gamma'_{s,r}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r + st) = s$, wird damit

$$\begin{array}{rcl} |\int_{\gamma_{s,r}} f(z)\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z| & = & |\int_0^1 f(r + st)\, \mathrm{e}^{-(r+st)} \cdot s\, \mathrm{d}t| \\ & \leqslant & \int_0^1 |f(r + st)| \cdot |\mathrm{e}^{-(r+st)}| \cdot |s|\, \mathrm{d}t \\ & \leqslant & \int_0^1 A \cdot r^n \cdot \mathrm{e}^{-r} \cdot |\mathrm{e}^{-st}| \cdot |s|\, \mathrm{d}t \\ & = & A \cdot r^n \cdot \mathrm{e}^{-r} \cdot |s| \cdot \int_0^1 |\mathrm{e}^{-st}|\, \mathrm{d}t \;. \end{array}$$

Insbesondere wird

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{s,r}} f(z)\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z \;=\; 0 \;.$$

Wegen $\eta'_{0,r}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s + rt) = r$ ergibt sich

$$\int_{\eta_{0,r}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 f(rt)\,\mathrm{e}^{-rt}\cdot r\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^r f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\;\mathrm{d}x\;.$$

Setzen wir nun

$$\int_{\eta_{s,\infty}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z \;:=\; \lim_{r\to+\infty} \int_{\eta_{s,r}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z\;,$$

so wird also

$$\begin{array}{rcl} \int_{\gamma_{s,0}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z + \int_{\eta_{s,\infty}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z & = & \lim_{r\to+\infty}\left(\int_{\gamma_{s,0}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z + \int_{\eta_{s,r}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z\right) \\ & = & \lim_{r\to+\infty}\left(\int_{\eta_{0,r}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{s,r}} f(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z\right) \\ & = & \lim_{r\to+\infty} \int_0^r f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\;. \end{array}$$

Satz (Hilbert). Sei ein Polynom $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ von Grad $n \geqslant 1$ gegeben mit $p(0) = 0$. Schreiben wir

$$p(X) \;=\; a\cdot(X - s_1)\cdot(X - s_2)\cdot\ldots\cdot(X - s_n)\;.$$

mit $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ und $s_j \in \mathbb{C}$ für $1 \leqslant j \leqslant n$.

Dann ist

$$\mathrm{e}^{s_1} + \mathrm{e}^{s_2} + \ldots + \mathrm{e}^{s_n} \;\neq\; 0\;.$$

Beweis. Annahme, es ist $\mathrm{e}^{s_1} + \mathrm{e}^{s_2} + \ldots + \mathrm{e}^{s_n} = 0$.

Wir sortieren die Faktoren so, daß $s_1, \ldots, s_m \neq 0$ und $s_{m+1}, \ldots, s_n = 0$ ist, für $0 \leqslant m < n$ geeignet. Wir schreiben

$$p(X) \;=:\; q(X)\cdot X^{n-m}\;,$$

mit

$$q(X) \;=\; a\cdot(X - s_1)\cdot(X - s_2)\cdot\ldots\cdot(X - s_m) \;\in\; \mathbb{Z}[X]\;.$$

und $q(0) \neq 0$. Es ist

$$\mathrm{e}^{s_1} + \mathrm{e}^{s_2} + \ldots + \mathrm{e}^{s_m} + (n - m) \;=\; 0\;.$$

Sei $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sei

$$f_k(X) \;:=\; X^k\cdot q(X)^{k+1} \;\in\; \mathbb{Z}[X]\;.$$

Es ist also

$$f_k(X) \;=\; a^{k+1}\cdot X^k\cdot(X - s_1)^{k+1}(X - s_2)^{k+1}\cdot\ldots\cdot(X - s_m)^{k+1}$$

von Grad $k + m + km$.

Es wird

$$
\begin{aligned}
0 &= (\mathrm{e}^{s_1} + \mathrm{e}^{s_2} + \ldots + \mathrm{e}^{s_m} + (n-m)) \cdot \int_0^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= (n-m) \int_0^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{s_j} \int_0^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Bem.}}{=} (n-m) \int_0^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{s_j} \int_{\gamma_{s_j,0}} f_k(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{s_j} \int_{\eta_{s_j,\infty}} f_k(z)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z \\
&= (n-m) \int_0^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_{s_j,0}} f_k(z)\,\mathrm{e}^{s_j-z}\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^m \int_{\eta_{s_j,\infty}} f_k(z)\,\mathrm{e}^{s_j-z}\,\mathrm{d}z\ .
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
T_k^1 &:= (n-m) \int_0^{+\infty} f_k(x)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
T_k^0 &:= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_{s_j,0}} f_k(z)\,\mathrm{e}^{s_j-z}\,\mathrm{d}z \\
T_k^\infty &:= \sum_{j=1}^m \int_{\eta_{s_j,\infty}} f_k(z)\,\mathrm{e}^{s_j-z}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

ist also

$$T_k^1 + T_k^0 + T_k^\infty \;=\; 0\ .$$

Behauptung 1. Es ist

$$a^{k+m+km} \cdot T_k^\infty$$

eine durch $(k+1)!$ teilbare ganze Zahl.

Es ist

$$
\begin{aligned}
T_k^\infty &= \sum_{j=1}^m \int_{\eta_{s_j,\infty}} f_k(z)\,\mathrm{e}^{s_j-z}\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{j=1}^m \lim_{r\to+\infty} \int_0^1 f_k(s_j+rt)\,\mathrm{e}^{s_j-(s_j+rt)} \cdot r\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^m \lim_{r\to+\infty} \int_0^1 f_k(s_j+rt)\,\mathrm{e}^{-rt} \cdot r\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^m \lim_{r\to+\infty} \int_0^r f_k(s_j+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^m \int_0^{+\infty} f_k(s_j+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^m f_k(s_j+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\ .
\end{aligned}
$$

In den Polynomen $\mathbb{Z}[X,S]$ in den Variablen X und S schreiben wir

$$f_k(S+X) \;=:\; \sum_{\ell=0}^{k+m+km} H_\ell(S) X^\ell\ .$$

Es ist also $H_\ell(S) \in \mathbb{Z}[S]$ für $0 \leqslant \ell \leqslant k+m+km$, von Grad $\leqslant k+m+km$.

Da $f_k(s_j + X)$ durch X^{k+1} teilbar ist, ist $H_\ell(s_j) = 0$ für $0 \leqslant \ell \leqslant k$ und $1 \leqslant j \leqslant m$.

Es wird

$$\begin{array}{rcl} T_k^\infty & = & \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} f_k(s_j + x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{k+m+km} H_\ell(s_j) x^\ell\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} \sum_{\ell=k+1}^{k+m+km} H_\ell(s_j) x^\ell\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \sum_{\ell=k+1}^{k+m+km} \sum_{j=1}^{m} H_\ell(s_j) \int_0^{+\infty} x^\ell\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & \overset{\text{Lemma aus §3.4.2}}{=} & \sum_{\ell=k+1}^{k+m+km} \sum_{j=1}^{m} H_\ell(s_j) \cdot \ell! \\ & = & (k+1)! \sum_{\ell=k+1}^{k+m+km} \sum_{j=1}^{m} H_\ell(s_j) \cdot \frac{\ell!}{(k+1)!} \end{array}$$

Nun ist

$$\sum_{\ell=k+1}^{k+m+km} \sum_{j=1}^{m} H_\ell(S_j) \cdot \tfrac{\ell!}{(k+1)!} \;\in\; \mathbb{Z}[S_1, \ldots, S_m]$$

ein symmetrisches Polynom, dessen Monome alle Totalgrad $\leqslant k + m + km$ haben, dessen Monome also auch alle bei X_1 einen Exponenten $\leqslant k + m + km$ haben. Mit dem zweiten Lemma aus §3.4.3 folgt also

$$a^{k+m+km} \cdot \tfrac{1}{(k+1)!} T_k^\infty \;=\; a^{k+m+km} \cdot \sum_{\ell=k+1}^{k+m+km} \sum_{j=1}^{m} H_\ell(s_j) \cdot \tfrac{\ell!}{(k+1)!} \;\in\; \mathbb{Z}\,.$$

Behauptung 2. Es ist

$$T_k^1$$

eine durch $k!$ teilbare ganze Zahl. Es ist

$$T_k^1 - q(0)^{k+1} \cdot (n - m) \cdot k!$$

eine durch $(k+1)!$ teilbare ganze Zahl.

Schreiben wir $q(X)^{k+1} = \sum_{\ell=0}^{m+km} b_\ell X^\ell \in \mathbb{Z}[X]$, mit $b_j \in \mathbb{Z}$ für $0 \leqslant j \leqslant m$ und mit $b_0 = q(0)^{k+1} \neq 0$, so wird

$$\begin{array}{rcl} T_k^1 & = & (n-m) \int_0^{+\infty} f_k(x) \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & (n-m) \int_0^{+\infty} q(x)^{k+1} x^k \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & (n-m) \int_0^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{m+km} b_\ell x^{\ell+k} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & (n-m) \sum_{\ell=0}^{m+km} b_\ell \int_0^{+\infty} x^{\ell+k} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & \overset{\text{Lemma aus §3.4.2}}{=} & (n-m) \sum_{\ell=0}^{m+km} b_\ell (k+\ell)!\,. \end{array}$$

Jeder Summand ist eine durch $k!$ teilbare ganze Zahl, damit auch T_k^1. Ferner wird

$$T_k^1 - q(0) \cdot (n-m) \cdot k! \;=\; (n-m) \sum_{\ell=1}^{m+km} b_\ell (k+\ell)!$$

durch $(k+1)!$ teilbar.

Behauptung 3. Es ist

$$|T_k^1 + T_k^\infty| \;\geqslant\; k! \cdot |a|^{-(k+m+km)} ,$$

falls k ein Vielfaches von $a \cdot q(0) \cdot (n-m)$ ist.

Es ist $|a^{k+m+km}(T_k^1 + T_k^\infty)|$ nach Behauptungen 1 und 2 eine durch $k!$ teilbare ganze Zahl.

Wir müssen nur zeigen, daß $a^{k+m+km}(T_k^1 + T_k^\infty) \overset{!}{\neq} 0$ ist.

Annahme $a^{k+m+km}(T_k^1 + T_k^\infty) = 0$. Dank der Behauptungen 1 und 2 ist

$$a^{k+m+km}(T_k^1 - q(0)^{k+1} \cdot (n-m) \cdot k!) + a^{k+m+km}(T_k^1 + T_k^\infty) \;=\; -a^{k+m+km} \cdot q(0)^{k+1} \cdot (n-m) \cdot k!$$

durch $(k+1)!$ teilbar. Also ist $a^{k+m+km} \cdot q(0)^{k+1} \cdot (n-m)$ durch $k+1$ teilber. Also ist $a \cdot q(0) \cdot (n-m)$ nicht teilerfremd zu $k+1$. Da aber k ein Vielfaches von $a \cdot q(0) \cdot (n-m)$ ist, ist $a \cdot q(0) \cdot (n-m)$ teilerfremd zu $k+1$. Wir haben einen Widerspruch.

Behauptung 4. Es gibt $A,\, D \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|T_k^0| \leqslant A^k \cdot D$ für $k \geqslant 1$.

Wir erinnern an

$$f_k(X) \;=\; a^{k+1} \cdot X^k \cdot (X - s_1)^{k+1} (X - s_2)^{k+1} \cdot \ldots \cdot (X - s_m)^{k+1}$$

Sei $M := \max\{\, |s_j| \,:\, 1 \leqslant j \leqslant m \,\}$.

Sei $A \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt mit $A \geqslant |a \cdot z \cdot (z - s_1) \cdot (z - s_2) \cdot \ldots \cdot (z - s_m)|$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqslant M$.

Sei $B \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt mit $B \geqslant |a \cdot (z - s_1) \cdot (z - s_2) \cdot \ldots \cdot (z - s_m)|$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqslant M$.

Dann ist $A^k \cdot B \geqslant |f_k(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqslant M$.

Wir beachten $|\mathrm{e}^{ts}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(ts)} \leqslant \mathrm{e}^{|s|}$ für $s \in \mathbb{C}$ und $t \in [0,1]$.

Sei $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt mit $C \geqslant \mathrm{e}^{|s_j|} \cdot |s_j|$ für $1 \leqslant j \leqslant m$.

Sei $D := m \cdot B \cdot C$.

Es wird

$$\begin{array}{rcl} |T_k^0| & = & |\sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_{s_j,0}} f_k(z)\, \mathrm{e}^{s_j - z}\, \mathrm{d}z| \\ & = & |\sum_{j=1}^{m} \int_0^1 f_k(s_j t)\, \mathrm{e}^{s_j - s_j t} \cdot s_j\, \mathrm{d}t| \\ & \leqslant & \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 |f_k(s_j t)| \cdot |\mathrm{e}^{s_j - s_j t}| \cdot |s_j|\, \mathrm{d}t \\ & \leqslant & \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 A^k \cdot B \cdot C\, \mathrm{d}t \\ & = & m \cdot A^k \cdot B \cdot C \\ & = & A^k \cdot D\,. \end{array}$$

Behauptung 5. Wir haben einen Widerspruch.

Aus $T_k^1 + T_k^0 + T_k^\infty = 0$ folgt

$$k! \cdot |a|^{-(k+m+km)} \overset{\text{Beh. 3}}{\leqslant} |T_k^1 + T_k^\infty| \;=\; |T_k^0| \overset{\text{Beh. 4}}{\leqslant} A^k \cdot D$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ Vielfaches von für $a \cdot q(0) \cdot (n-m)$ und geeignet gewählte $A,\, D \in \mathbb{R}_{>0}$.

Für diese Werte von k ist also

$$\frac{A^k \cdot D \cdot |a|^{k+m+km}}{k!} \;\geqslant\; 1\,.$$

Nun ist aber

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k \cdot D \cdot |a|^{k+m+km}}{k!} \;=\; 0\,.$$

Daraus entnehmen wir, daß es eine Stelle $k_0 \geqslant 0$ gibt mit

$$\frac{A^k \cdot D \cdot |a|^{k+m+km}}{k!} \;<\; \frac{1}{2}$$

für $k \geqslant k_0$.

Für ein durch $a \cdot q(0) \cdot (n-m)$ teilbares k, welches $\geqslant k_0$ ist, haben wir einen *Widerspruch.* □

Beispiel. Es ist $p(X) = X^3 + 5X = (X-0)(X - \mathrm{i}\sqrt{5})(X - (-\mathrm{i}\sqrt{5}))$.

Mit dem Satz von Hilbert ist

$$\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{5}} \;\neq\; 0\,.$$

Tatsächlich ist

$$\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{5}} \;=\; -0{,}234545\ldots$$

Satz (Lindemann). Es ist π eine transzendente Zahl.

Beweis. Annahme, nicht. Dann ist π algebraisch. Da auch i algebraisch ist und da $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper ist, ist auch $\mathrm{i}\pi$ algebraisch. Es ist also $\mathrm{i}\pi$ die Nullstelle eines Polynoms in $\mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$.

Nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner der Koeffizienten dieses Polynoms erhalten wir ein Polynom $u(X) \in \mathbb{Z}[X] \smallsetminus \{0\}$ mit

$$u(\mathrm{i}\pi) \;=\; 0\;.$$

Wir schreiben

$$u(X) \;=\; a \cdot (X - v_1) \cdot (X - v_2) \cdot \ldots \cdot (X - v_n)\;,$$

mit $v_j \in \mathbb{C}$ für $1 \leqslant j \leqslant n$, wobei $n \geqslant 1$ der Grad von $u(X)$ ist und $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ der Leitkoeffizient von $u(X)$. Sei dabei $v_1 := \mathrm{i}\pi$.

Da

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \;=\; -1\;,$$

folgt

$$(\mathrm{e}^{v_1} + 1) \cdot (\mathrm{e}^{v_2} + 1) \cdot \ldots (\mathrm{e}^{v_n} + 1) \;=\; 0\;.$$

Für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$w_I \;:=\; \sum_{j \in I} v_j\;.$$

Damit wird

$$0 \;=\; (\mathrm{e}^{v_1} + 1) \cdot \ldots \cdot (\mathrm{e}^{v_n} + 1) \;=\; \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \mathrm{e}^{w_I}\;.$$

Sei

$$p(X) \;:=\; a^{2^n} \cdot \prod_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (X - w_I) \;\in\; \mathbb{C}[X]\;.$$

Es ist $p(0) = 0$, da die Teilmenge $I = \emptyset$ den Faktor $(X - 0)$ liefert.

Sei $0 \leqslant k \leqslant 2^n$. Der Koeffizient von $p(X)$ bei $X^{2^n - k}$ ist

$$a^{2^n} \cdot (-1)^k \sum_{\substack{K \subseteq \mathrm{Pot}(\{1,\ldots,n\}) \\ |K| = k}} \prod_{I \in K} w_I \;=\; a^{2^n} \cdot (-1)^k \sum_{\substack{K \subseteq \mathrm{Pot}(\{1,\ldots,n\}) \\ |K| = k}} \prod_{I \in K} \sum_{j \in I} v_j\;.$$

Wir betrachten das Polynom

$$f(V_1, \ldots, V_n) \;:=\; (-1)^k \sum_{\substack{K \subseteq \mathrm{Pot}(\{1,\ldots,n\}) \\ |K| = k}} \prod_{I \in K} \sum_{j \in I} V_j \;\in\; \mathbb{Z}[V_1, \ldots, V_n]\;.$$

Dies ist ein symmetrisches Polynom, da eine Umbezeichnung der Indizes von $V_1, \ldots, V_n$ in diesem Ausdruck eine Permutation der auftretenden Teilmengen K bewirkt.

Jedes Monom darin hat Totalgrad k, also bei X_1 einen Exponenten $\leqslant 2^n$. Gemäß dem zweiten Lemma in §3.4.3 ist also

$$\mathbb{Z} \;\ni\; a^{2^n} \cdot f(v_1, \ldots, v_n) \;=\; a^{2^n} \cdot (-1)^k \sum_{\substack{K \subseteq \mathrm{Pot}(\{1,\ldots,n\}) \\ |K| = k}} \prod_{I \in K} \sum_{j \in I} v_j\;.$$

Mit anderen Worten, es ist

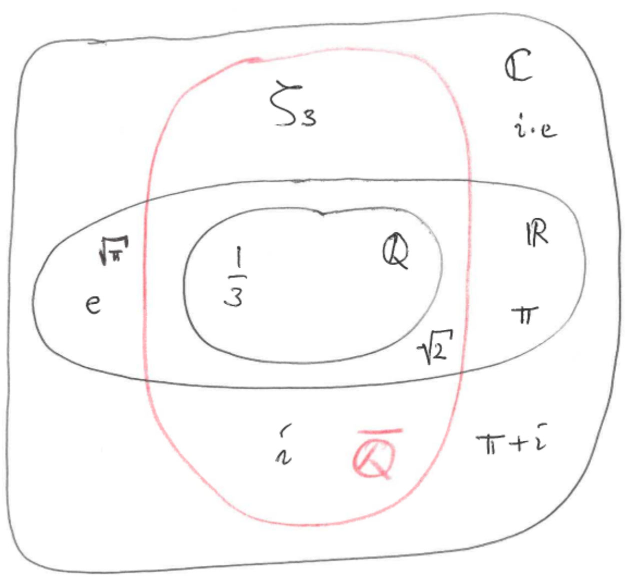
$$p(X) \;\in\; \mathbb{Z}[X]\;.$$

Dank vorstehendem Satz von Hilbert ist

$$0 \neq \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \mathrm{e}^{w_I} .$$

Wir haben einen *Widerspruch*. ▫

3.4.5 Übersicht



Darin ist $\overline{\mathbb{Q}}$ der Teilkörper der algebraischen Zahlen in $\mathbb{C}$.

Das Komplement $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{\mathbb{Q}}$ ist die Teilmenge der transzendenten Zahlen in $\mathbb{C}$.

Auf die Transzendenz von $\sqrt{\pi}$ gehen wir unten in §4.2.1 noch ein.

Kapitel 4

Geometrie

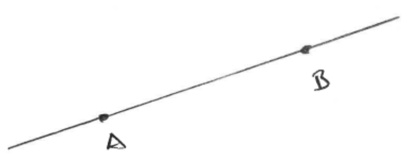
4.1 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Konstruktion. Wir gehen aus von zwei Punkten in der Ebene, P und Q mit $P \neq Q$. Wir legen unser kartesisches Koordinatensystem so, daß P den Koordinatenvektor $\binom{0}{0}$ und Q den Koordinatenvektor $\binom{1}{0}$ erhält. Wir schreiben dann auch

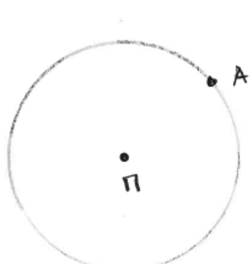
$$P = \binom{0}{0} , \qquad Q = \binom{1}{0}$$

Mit Zirkel und Lineal durchführbare sind nun die Schritte (1–5).

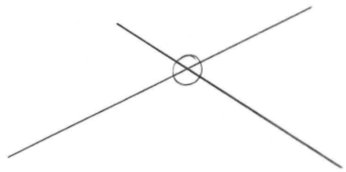
(1) Durch zwei verschiedene Punkte A und B kann eine Gerade g mit A, $B \in g$ gezeichnet werden.



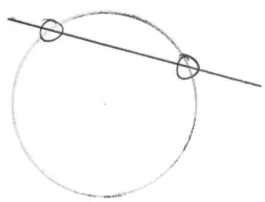
(2) Gegeben ein Punkt M und ein Punkt A, so kann ein Kreis K mit Mittelpunkt M durch den Punkt A gezeichnet werden, d.h. mit $A \in K$.



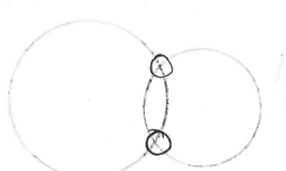
(3) Wir können den Schnittpunkt zweier Geraden bilden, sofern diese nicht parallel sind.



(4) Wir können einen Kreis mit einer Geraden schneiden und dabei, je nach Lage, keinen, einen oder zwei Schnittpunkte erhalten.



(5) Wir können zwei Kreise schneiden und dabei, je nach Lage, keinen, einen oder zwei Schnittpunkte erhalten.



Es ist nun die Frage, welche Koordinaten bei einem iterierten Verwenden dieser Konstruktionsschritte auftreten können.

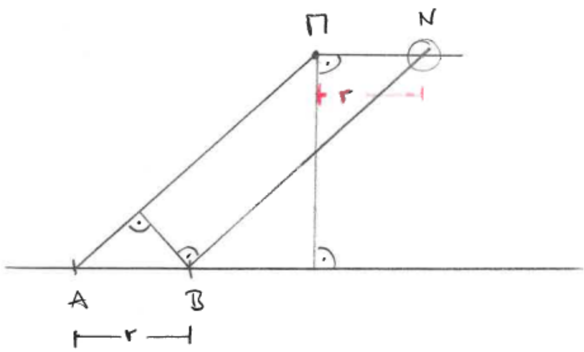
Bemerkung. Man vermißt vielleicht unter den möglichen Konstruktionsschritten das "Abtragen von Längen", bei welchem im Zirkel ein Radius an einer Stelle abgegriffen wird und an einer anderen Stelle zum Einsatz kommt.

Seien zwei Punkte A und B gegeben, mit $A \neq B$.

Das Abtragen den Abstands von A und B gehe folgendermaßen vonstatten. Sei ein Punkt M gegeben. Wir wollen einen Punkt konstruieren, der von M den Abstand $r := |A - B|$ hat. Dann können wir um M auch einen Kreis legen mit Radius r.

Wir zeichnen die Gerade g durch A und B.

Fall $M \notin g$. Wir konstruieren wie folgt ein Parallelogramm mit Ecken A, B, M, N. Dann ist $|M - N| = r$. Hierbei setzen wir die Konstruktion des Errichten und des Fällen des Lots als bekannt voraus.



Fall $M \in g$. Wir wählen einen Punkt $M' \notin g$. Darauf wenden wir den ersten Fall an, um ein Parallelogramm (A, B, M', N') zu erhalten. Dann wenden wir nochmal den ersten Fall an, um ein Parallelogramm (M', N', M, N) zu erhalten.

Definition. Seien K und L Teilkörper von $\mathbb{C}$ mit $K \subseteq L$. Es heißt L eine *multiquadratische Erweiterung* von K, falls es $m \geqslant 0$ und Elemente $x_1, \ldots, x_m \in L$ gibt mit den Eigenschaften $(1, 2)$.

(1) Es ist $L = K(x_1)(x_2)\ldots(x_k)$.

(2) Es ist $[\, K(x_1)(x_2)\ldots(x_j) \;:\; K(x_1)(x_2)\ldots(x_{j-1}) \,] = 2$ für $1 \leqslant j \leqslant m$.

Dank erster Bemerkung aus §3.3 ist dann

$$[\, K(x_1)(x_2)\ldots(x_m) \;:\; K \,] \;=\; 2^m \;.$$

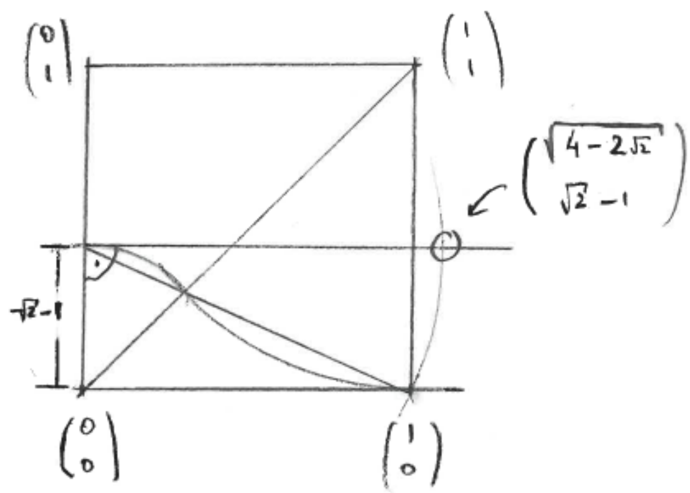
Schematisch:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, equal] \arrow[dddddd, bend left=60, dash, "2^m"] \\
K(x_1)(x_2)\ldots(x_m) \arrow[d, dash, "2"] \\
K(x_1)(x_2)\ldots(x_{m-1}) \arrow[d, dash, "2"] \\
\vdots \arrow[d, dash, "2"] \\
K(x_1)(x_2) \arrow[d, dash, "2"] \\
K(x_1) \arrow[d, dash, "2"] \\
K
\end{tikzcd}$$

Wobei wir an jeden Strich den Grad 2 der Körpererweiterung geschrieben haben, d.h. die Dimension des größeren Körpers als Vektorraum über dem kleineren.

Beispiel. Beim Durchführen von geometrischen Konstruktionen können Punkte mit Koordinaten in multiquadratischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ entstehen.

Zum Beispiel so:



Man beachte hierbei $(\sqrt{2}-1)^2 + 1^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

Es ist $\mathbb{Q}(\sqrt{4-2\sqrt{2}})$ eine multiquadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$, denn für

$$\mathbb{Q} \;\subseteq\; \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \;\subseteq\; \mathbb{Q}(\sqrt{4-2\sqrt{2}})$$

ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ und $[\mathbb{Q}(\sqrt{4-2\sqrt{2}}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$.

Satz. Sei $A = \binom{a_1}{a_2}$ ein Punkt, der bei einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal entsteht. Dann sind a_1 und a_2 in einer multiquadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten.

Beweis. Wir gehen davon aus, daß die Koordinaten der bislang konstruierten Punkte in einem Teilkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ liegen, wobei K eine multiquadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Es genügt zu zeigen, daß nun bei Schnitt zweier Geraden, bei Schnitt von Geraden mit Kreis und bei Schnitt zweier Kreise nur Punkte entstehen können, die Koordinaten in K oder aber Koordinaten in einer Erweiterung L von K mit $[L : K] = 2$ haben.

Schnitt zweier Geraden. Seien Punkte $A = \binom{a_1}{a_2}$, $B = \binom{b_1}{b_2}$, $C = \binom{c_1}{c_2}$, $D = \binom{d_1}{d_2}$ gegeben, mit allen Koordinaten in K und mit $A \neq B$ und $C \neq D$.

Sei g die Gerade durch A und B. Sei h die Gerade durch C und D. Seien die Richtungsvektoren $B-A$ und $D-C$ linear unabhängig.

Wir *behaupten,* daß der Schnittpunkt von g und h Koordinaten in K hat.

Es ist $g = \{\, A + s(B-A) \;:\; s \in \mathbb{R} \,\}$. Es ist $h = \{\, C + t(D-C) \;:\; t \in \mathbb{R} \,\}$. Wir suchen also $s,\, t \in \mathbb{R}$ mit

$$A + s(B-A) \;=\; C + t(D-C)\;.$$

Umgeschrieben suchen wir $\binom{s}{t} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit

$$\begin{pmatrix} b_1-a_1 & c_1-d_1 \\ b_2-a_2 & c_2-d_2 \end{pmatrix} \binom{s}{t} \;=\; \binom{c_1-a_1}{c_2-a_2}$$

Die Matrix ist invertierbar nach Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit.

Ihre Inverse liegt in $K^{2\times 2}$, da allgemein

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{ux-vw} \begin{pmatrix} x & -v \\ -w & u \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{GL}_2(K) \;\subseteq\; K^{2\times 2}$$

ist für $\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$.

Wir erhalten

$$\binom{s}{t} \;=\; \begin{pmatrix} b_1-a_1 & c_1-d_1 \\ b_2-a_2 & c_2-d_2 \end{pmatrix}^{-1} \binom{c_1-a_1}{c_2-a_2} \;\in\; K^{2\times 1}$$

Dies zeigt die *Behauptung*.

Schnitt von Gerade und Kreis. Seien Punkte $A = \binom{a_1}{a_2}$, $B = \binom{b_1}{b_2}$, $C = \binom{c_1}{c_2}$, $D = \binom{d_1}{d_2}$ gegeben, mit allen Koordinaten in K und mit $A \neq B$ und $C \neq D$.

Sei g die Gerade durch A und B. Sei U der Kreis um C durch D.

Wir *behaupten*, daß jeder Schnittpunkt von g und U Koordinaten in K oder aber Koordinaten in einer Erweiterung L von K mit $[L:K] = 2$ hat.

Es ist $g = \{\, A + s(B-A) \;:\; s \in \mathbb{R} \,\}$. Es ist $U = \{\, P \;:\; |P-C|^2 = |D-C|^2 \,\}$. Wir schreiben $r := |D-C|$. Es ist $r^2 \in K$. Wir betrachten $s \in \mathbb{R}$ mit

$$|(A + s(B-A)) - C|^2 \;=\; r^2\;.$$

Umgeschrieben wird dies zu

$$(a_1 + s(b_1-a_1) - c_1)^2 + (a_2 + s(b_2-a_2) - c_2)^2 - r^2 \;=\; 0\;,$$

also zu

$$s^2((b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2)+2s((a_1-c_1)(b_1-a_1)+(a_2-c_2)(b_2-a_2))+((a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2-r^2) \;=\; 0\;.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für s mit Koeffizienten in K. Ein Schnittpunkt liegt vor für jede reelle Lösung s_0 dieser Gleichung.

Sei $L := K(s_0) \subseteq \mathbb{C}$. Falls die Diskriminante der quadratischen Gleichung ein Quadrat in K ist, dann ist $s_0 \in K$ und also $L = K$. Falls die Diskriminante kein Quadrat in K ist, dann ist $s_0 \notin K$ und also

$$[L:K] \;=\; [K(s_0):K] \;=\; \deg \mu_{s_0,K}(X) \;=\; 2\;,$$

da $\mu_{s_0,K}(X)$ ein Teiler des obigen Polynoms ist, in welchem noch statt s wieder X zu schreiben ist.

Mit $s \in L$ liegt auch die Koordinaten des Schnittpunkts $(A + s(B - A)) - C$ in L. Dies zeigt die *Behauptung*.

Schnitt zweier Kreise. Seien Punkte $A = \binom{a_1}{a_2}$, $B = \binom{b_1}{b_2}$, $C = \binom{c_1}{c_2}$, $D = \binom{d_1}{d_2}$ gegeben, mit allen Koordinaten in K und mit $A \neq B$ und $C \neq D$ und $A \neq C$.

Sei U' der Kreis um A durch B. Sei U'' der Kreis um C durch D.

Es ist $U' = \{\, P \,:\, |P - A|^2 = |B - A|^2 \,\}$. Es ist $U'' = \{\, P \,:\, |P - C|^2 = |D - C|^2 \,\}$.

Ist P ein Schnittpunkt von U' und U'', dann ist $|P-A|^2 = |B-A|^2$ und $|P-C|^2 = |D-C|^2$.

Behalten wir die erste Gleichung und ersetzen die zweite durch die Differenz der Gleichungen, so haben zu gelten:

$$\begin{aligned} |P - A|^2 &= |B - A|^2 \\ |P - A|^2 - |P - C|^2 &= |B - A|^2 - |D - C|^2 \end{aligned}$$

Schreiben wir $P = \binom{p_1}{p_2}$, $u := |B-A|^2 \in K$, $v := |B-A|^2 - |D-C|^2 - a_1^2 - a_2^2 + c_1^2 + c_2^2 \in K$, so haben zu gelten:

$$\begin{aligned} |P - A|^2 &= u \\ 2p_1(c_1 - a_1) + 2p_2(c_2 - a_2) &= v \end{aligned}$$

Die erste Gleichung beschreibt den Kreis U'.

Fall $c_1 \neq a_1$ *und* $c_2 \neq a_2$ *und* $v \neq 0$. Die zweite Gleichung beschreibt die Gerade durch die Punkte $\begin{pmatrix} \frac{v}{2(c_1-a_1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{2(c_2-a_2)} \end{pmatrix}$, welche Koordinaten in K haben.

Fall $c_1 \neq a_1$ *und* $c_2 \neq a_2$ *und* $v = 0$. Die zweite Gleichung beschreibt die Gerade durch die Punkte $\binom{c_2-a_2}{a_1-c_1}$ und $\binom{2(c_2-a_2)}{2(a_1-c_1)}$, welche Koordinaten in K haben.

Fall $c_1 = a_1$ *und* $c_2 \neq a_2$. Die zweite Gleichung beschreibt die Gerade durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{2(c_2-a_2)} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v}{2(c_2-a_2)} \end{pmatrix}$, welche Koordinaten in K haben.

Fall $c_1 \neq a_1$ *und* $c_2 = a_2$. Die zweite Gleichung beschreibt die Gerade durch die Punkte $\begin{pmatrix} \frac{v}{2(c_1-a_1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{v}{2(c_1-a_1)} \\ 1 \end{pmatrix}$, welche Koordinaten in K haben.

Also können wir von hier ab argumentieren wie im vorigen Fall.

4.2 Ein paar unmögliche Konstruktionen

4.2.1 Die unmögliche Quadratur des Kreises

Bemerkung. Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ transzendent. Dann ist auch $\sqrt{s}$ transzendent.

Erster Beweis. Annahme, es ist $\sqrt{s}$ algebraisch. Es ist $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper nach der zweiten Bemerkung in §3.3. Also ist mit $\sqrt{s} \in \overline{\mathbb{Q}}$ auch $s = (\sqrt{s})^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$. Dies steht aber im *Widerspruch* zur Transzendenz von s.

Zweiter Beweis. Annahme, es ist $\sqrt{s}$ algebraisch. Dann können wir ein Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$ wählen mit Nullstelle $\sqrt{s}$.

Dann hat auch das Polynom $u(X) := f(X) \cdot f(-X) \in \mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$ die Nullstelle $\sqrt{s}$.

Da

$$u(X) - u(-X) \;=\; f(X) \cdot f(-X) - f(-X) \cdot f(-(-X)) \;=\; 0$$

ist, hat $u(X)$ Koeffizient 0 bei X^k mit $k \geqslant 0$ ungerade. Folglich können wir $u(X) = v(X^2)$ schreiben für ein Polynom $v(X) \in \mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$.

Dann ist $v(s) = v((\sqrt{s})^2) = u(\sqrt{s}) = 0$. Dies steht aber im *Widerspruch* zur Transzendenz von s. ▫

Bemerkung. Es ist $\sqrt{\pi}$ transzendent.

Da nach dem Satz von Lindemann aus §3.4.4 die Zahl π transzendent ist, folgt dies mit vorstehender Bemerkung. ▫

Lemma. Man kann mit Zirkel und Lineal kein Quadrat konstruieren, das denselben Flächeninhalt hat ein Kreis mit Radius 1.

Beweis. Annahme, man könnte ein solches Quadrat konstruieren. Es hat Flächeninhalt π. Es hat also Seitenlänge $\sqrt{\pi}$. Durch Abtragen dieser Seitenlänge auf die erste Koordinatenachse konstruieren wir den Punkt $\left(\begin{smallmatrix}\sqrt{\pi}\\ 0\end{smallmatrix}\right)$.

Gemäß Satz aus §4.1 ist mithin $\sqrt{\pi}$ in einer multiquadratischen Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ enthalten. Insbesondere ist K ein Zahlkörper. Wegen $\sqrt{\pi} \in K$ ist nun $\sqrt{\pi}$ algebraisch; vgl. Lemma aus §3.1.

Aber mit vorstehender Bemerkung ist $\sqrt{\pi}$ transzendent. Wir haben einen *Widerspruch.* ▫

4.2.2 Die unmögliche Würfelverdopplung

Bemerkung. Es ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mu_{\sqrt[3]{2}}(X) = X^3 - 2$ ist, denn der Grad dieses Minimal-polynoms ist gleich dem gesuchten Körpergrad.

Da es ein normiertes Polynom mit Nullstelle $\sqrt[3]{2}$ ist, genügt es dazu zu zeigen, daß $X^3-2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Dazu wiederum genügt es zu zeigen, daß $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle hat, denn es ist ein Polynom mit Grad $\in \{2, 3\}$.

Dies folgt mit Descartes durch den Nachweis, daß kein Teiler von -2 eine Nullstelle von $X^3 - 2$ ist. In der Tat liefern -2, 2, -1, 1 bei Einsetzen Werte ungleich 0. □

Man kann für die Irreduzibilität von $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ auch das Eisensteinsche Kriterium anwenden.

Lemma. Es kann mit Zirkel und Lineal keine Strecke konstruiert werden, deren Länge gleich der Kantenlänge eines Würfels mit Volumen 2 ist.

Beweis. Annahme, wir können eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ konstruieren. Durch Abtragen dieser Seitenlänge auf die erste Koordinatenachse konstruieren wir den Punkt $\binom{\sqrt[3]{2}}{0}$.

Gemäß Satz aus §4.1 ist mithin $\sqrt[3]{2}$ in einer multiquadratischen Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ enthalten. Es gibt daher ein $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2^m$.

Mit der ersten Bemerkung aus §3.3 und vorstehender Bemerkung folgt

$$2^m \;=\; [K : \mathbb{Q}] \;=\; [K : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] \;=\; [K : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot 3\ .$$

wobei $[K : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Wir haben einen *Widerspruch*.

4.2.3 Die unmögliche Winkeldreiteilung

Mit Zirkel und Lineal kann man Winkel halbieren. Aber dritteln kann man sie i.a. nicht, wie wir zeigen wollen.

Bemerkung. Sei $z \in \mathbb{C}$. Es ist

$$\begin{array}{rcl}
\cos(z)^3 & = & \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\right) \\
& = & \frac{1}{8}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^3 + 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2 + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^3\right) \\
& = & \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}z}\right) \\
& = & \frac{1}{8}\left(2\cos(3z) + 6\cos(z)\right) \\
& = & \frac{1}{4}\cos(3z) + \frac{3}{4}\cos(z)\ .
\end{array}$$

Also ist

$$\cos(z)^3 - \tfrac{3}{4}\cos(z) - \tfrac{1}{4}\cos(3z) \;=\; 0\ .$$

Lemma. Es gibt kein Konstruktionsverfahren, mit Zirkel und Lineal einen gegebenen Winkel in drei gleiche Winkel zu teilen.

Beweis. *Annahme,* doch. Dann kann man auch einen Winkel von $60° = \frac{\pi}{3}$ so in drei gleiche Winkel teilen.

Da man über ein gleichseitiges Dreieck einen Winkel von 60° konstruieren kann, kann man dann auch einen Winkel von $20° = \frac{\pi}{9}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren. Durch Einzeichnen eines Kreises mit Radius 1 und Fällen eines Lots kann man dann auch eine Strecke der Länge $\cos(\frac{\pi}{9})$ konstruieren. Abtragen dieser Länge auf der ersten Koordinatenachse gibt dann die Konstruktion des Punktes

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{9}) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist $\cos(\frac{\pi}{9})$ und damit auch

$$b \;:=\; 2\cos(\tfrac{\pi}{9})$$

in einer multiquadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten. Insbesondere ist $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2 ; vgl. erste Bemerkung in §3.3.

Nach voriger Bemerkung ist

$$\cos(\tfrac{\pi}{9})^3 - \tfrac{3}{4}\cos(\tfrac{\pi}{9}) - \tfrac{1}{4}\cos(3\cdot\tfrac{\pi}{9}) \;=\; 0 .$$

Also ist auch

$$(\tfrac{b}{2})^3 - \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{b}{2} - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} \;=\; 0$$

und somit

$$b^3 - 3b - 1 \;=\; 0 .$$

Nach Descartes gibt aber ein Überprüfen der Werte des Polynoms $X^3 - 3X - 1$ bei den Teilern -1 und 1 des konstanten Terms -1, daß $X^3 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ keine Nullstellen hat und also irreduzibel ist.

Alternativ kann man es auch modulo 2 betrachten, um seine Irreduzibiltät festzustellen.

Also ist $\mu_b(X) = X^3 - 3X - 1$. Somit ist $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = 3$. Dies ist keine Potenz von 2. Wir haben einen *Widerspruch.*

4.3 Dreiecke und Tetraeder

4.3.1 Satz des Heron

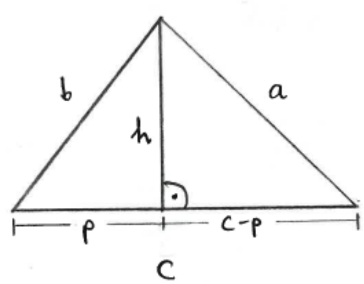
Satz (Heron). Sei ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gegeben.

Wir schreiben $s := \frac{a+b+c}{2}$.

Dann hat dieses Dreieck den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)} . \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeichnen in unserem Dreieck die Höhe ein, mit Länge h.



Der Höhenfußpunkt unterteilt die Seite mit Länge c in eine Strecke der Länge p und eine Strecke der Länge $c-p$.

Pythagoras gibt

$$\begin{aligned} b^2 &= p^2 + h^2 \\ a^2 &= (c-p)^2 + h^2 \,. \end{aligned}$$

Als Differenz ergibt sich

$$b^2 - a^2 \;=\; (p^2 + h^2) - ((c-p)^2 + h^2) \;=\; p^2 + h^2 - c^2 + 2cp - p^2 - h^2 \;=\; -c^2 + 2cp \,.$$

Daraus erhalten wir

$$p \;=\; \tfrac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \,.$$

Pythagoras gibt

$$h^2 \;=\; b^2 - p^2 \;=\; b^2 - \tfrac{(b^2-a^2+c^2)^2}{4c^2} \;=\; \tfrac{4c^2b^2}{4c^2} - \tfrac{b^4+a^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2}{4c^2} \;=\; \tfrac{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4c^2} \,.$$

Somit wird

$$A \;=\; \tfrac{1}{2}ch \;=\; \tfrac{1}{2}c\sqrt{\tfrac{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4c^2}} \;=\; \tfrac{1}{4}\sqrt{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)} \,.$$

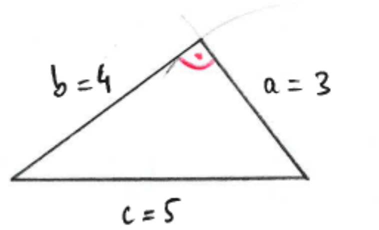
Ferner wird

$$\begin{aligned} s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) &= \tfrac{a+b+c}{2}\cdot\tfrac{-a+b+c}{2}\cdot\tfrac{a-b+c}{2}\cdot\tfrac{a+b-c}{2} \\ &= \tfrac{1}{16}((b+c)+a)((b+c)-a)(a-(b-c))(a+(b-c)) \\ &= \tfrac{1}{16}((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2) \\ &= \tfrac{1}{16}((b+c)^2a^2-(b+c)^2(b-c)^2-a^4+a^2(b-c)^2) \\ &= \tfrac{1}{16}(a^2(2b^2+2c^2)-(b^2-c^2)^2-a^4) \\ &= \tfrac{1}{16}(2a^2b^2+2a^2c^2-b^4+2b^2c^2-a^4) \\ &= \tfrac{1}{16}(-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)) \,. \end{aligned}$$

Folglich wird auch

$$\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \;=\; \tfrac{1}{4}\sqrt{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)} \;=\; A \,.$$

Beispiel.
Wir betrachten ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.



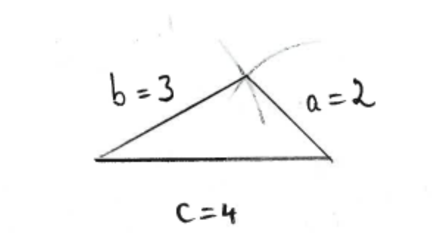
Wir wollen seinen Flächeninhalt A bestimmen.

1. *Weg.* Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, ist $A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

2. *Weg.* Wir wenden die Heronsche Formel an. Es ist $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = 6$. Es wird

$$A \;=\; \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \;=\; \sqrt{6 \cdot (6-3) \cdot (6-4) \cdot (6-5)} \;=\; \sqrt{36} \;=\; 6\,.$$

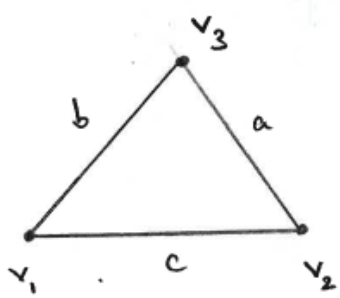
Beispiel.
Wir betrachten ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.



Wir wollen seinen Flächeninhalt A bestimmen.
Wir wenden die Heronsche Formel an. Es ist $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}$. Es wird

$$A \;=\; \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \;=\; \sqrt{\tfrac{9}{2} \cdot (\tfrac{9}{2}-2) \cdot (\tfrac{9}{2}-3) \cdot (\tfrac{9}{2}-4)} \;=\; \sqrt{\tfrac{9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{16}} \;=\; \tfrac{3}{4}\sqrt{15}\,.$$

Bemerkung. Wir betrachten folgendes Dreieck.



Hierbei seien $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ die Eckpunkte, gegeben durch ihre Ortsvektoren.

Wir wollen den Flächeninhalt dieses Dreiecks mit einer Determinante in Beziehung setzen, indem wir die Heronsche Formel auf eine andere Weise zum Ausdruck bringen.

Für $j,\ k \in \{1,2,3\}$ sei

$$d_{j,k} \ := \ |v_j - v_k|^2 \ .$$

Also

$$\begin{array}{rcccl} & & d_{j,j} & = & 0 \qquad \text{für } j \in \{1,2,3\} \\ d_{1,2} & = & d_{2,1} & = & c^2 \\ d_{1,3} & = & d_{3,1} & = & b^2 \\ d_{2,3} & = & d_{3,2} & = & a^2 \ . \end{array}$$

Wir wollen folgendes zeigen.

$$-16A^2 \ \stackrel{!}{=} \ \det\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & 1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & 1 \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \det\begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Diese Determinante heißt *Cayley-Menger-Determinante in* $\mathbb{R}^2$.

Wir rechnen wie folgt.

$$\begin{array}{rcl} \det\begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \det\begin{pmatrix} -b^2 & c^2-a^2 & b^2 & 0 \\ c^2-b^2 & -a^2 & a^2 & 0 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad -\det\begin{pmatrix} -b^2 & c^2-a^2 & b^2 \\ c^2-b^2 & -a^2 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & -\det\begin{pmatrix} -2b^2 & c^2-a^2-b^2 & b^2 \\ c^2-b^2-a^2 & -2a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad -\det\begin{pmatrix} -2b^2 & c^2-a^2-b^2 \\ c^2-b^2-a^2 & -2a^2 \end{pmatrix} \\ & = & -(4a^2b^2 - (-a^2-b^2+c^2)^2) \\ & = & -(4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) \\ & = & (a^4+b^4+c^4) - 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \ . \end{array}$$

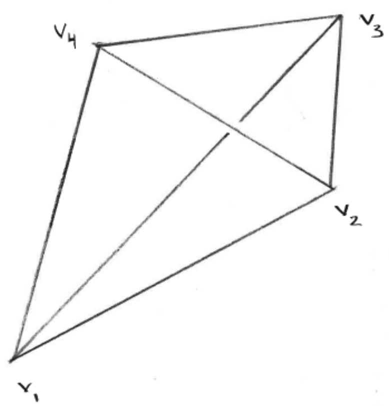
Zum anderen wird mit der Heronschen Formel

$$-16A^2 \ = \ -16\Big(\tfrac{1}{4}\sqrt{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}\ \Big)^2 \ = \ (a^4+b^4+c^4)-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \ .$$

Das ist dasselbe.

4.3.2 Die Cayley-Menger-Determinante in $\mathbb{R}^3$

Sei ein Tetraeder gegeben.



Hierbei seien $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ \in\ \mathbb{R}^{3\times 1}$ die Eckpunkte, gegeben durch ihre Ortsvektoren.

Für $j,\ k\ \in\ \{1,2,3\}$ sei

$$d_{j,k}\ :=\ |v_j - v_k|^2\ .$$

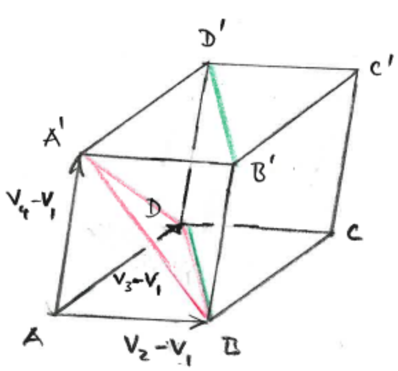
Lemma. Sei V das Volumen des betrachteten Tetraeders. Dann ist

$$288V^2\ =\ \det\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 1 \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & 1 \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Diese Determinante heißt *Cayley-Menger-Determinante in* $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Wir schreiben $\det(v_2 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_4 - v_1)$ für die Determinante der Matrix mit den Spalten $v_2 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_4 - v_1$.

Es ist $|\det(v_2 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_4 - v_1)|$ das Volumen des von den Vektoren $v_2 - v_1,\ v_3 - v_1$ und $v_4 - v_1$ aufgespannten Parallelepipeds $(A, B, C, D, A', B', C', D')$.



Also ist $\frac{1}{2}|\det(v_2 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_4 - v_1)|$ das Volumen des Prismas (A, B, D, A', B', D').

Das Volumen dieses Prismas ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt seiner Grundseite (A, B, D) und seiner Höhe.

Das Volumen des Tetraeders (A, B, D, A') ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt seiner Grundseite (A, B, D) und seiner Höhe, geteilt durch 3.

Also ist $\frac{1}{6}|\det(v_2 - v_1,\, v_3 - v_1,\, v_4 - v_1)|$ das Volumen V des Tetraeders (A, B, D, A'). Schreiben wir

$$V \;=\; \tfrac{1}{6}|\det(v_2 - v_1,\, v_3 - v_1,\, v_4 - v_1)| \;=\; \tfrac{\varepsilon}{6}\det(v_2 - v_1,\, v_3 - v_1,\, v_4 - v_1)\;,$$

wobei $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. Die Multilinearität der Determinante gibt nun

$$\begin{aligned} 6V\varepsilon &= \det(v_2 - v_1,\, v_3 - v_1,\, v_4 - v_1) \\ &= \det(v_2,\, v_3,\, v_4) - \det(v_1,\, v_3,\, v_4) - \det(v_2,\, v_1,\, v_4) - \det(v_2,\, v_3,\, v_1)\;. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die bei der Verwendung der Multilinearität entstehenden Determinanten mit zwei übereinstimmden Spalten v_1 bereits weggelassen.

Wir schreiben $v_j =: \left(\begin{smallmatrix} v_{j,1} \\ v_{j,2} \\ v_{j,3} \end{smallmatrix}\right)$ für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Mit Entwicklung nach 4ter Spalte und Transposition wird

$$-6V\varepsilon \;=\; \det\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} & 1 & 0 \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} & 1 & 0 \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} & 1 & 0 \\ v_{4,1} & v_{4,2} & v_{4,3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\;.$$

Transposition, Vertauschung der unteren beiden Zeilen und Multiplikation der ersten 4 Spalten mit -2 gibt nun

$$6 \cdot 16V\varepsilon \;=\; (-2)^4 \cdot (-(-6V\varepsilon)) \;=\; \det\begin{pmatrix} -2v_{1,1} & -2v_{2,1} & -2v_{3,1} & -2v_{4,1} & 0 \\ -2v_{1,2} & -2v_{2,2} & -2v_{3,2} & -2v_{4,2} & 0 \\ -2v_{1,3} & -2v_{2,3} & -2v_{3,3} & -2v_{4,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\;.$$

Da die Determinante des Produkts dieser beiden Matrizen gleich dem Produkt ihrer Determinanten ist, erhalten wir

$$-36 \cdot 16V^2 \;=\; (-6V\varepsilon)(6 \cdot 16V\varepsilon) \;=\; \det\begin{pmatrix} -2v_1^{\mathrm{t}}v_1 & -2v_1^{\mathrm{t}}v_2 & -2v_1^{\mathrm{t}}v_3 & -2v_1^{\mathrm{t}}v_4 & 1 \\ -2v_2^{\mathrm{t}}v_1 & -2v_2^{\mathrm{t}}v_2 & -2v_2^{\mathrm{t}}v_3 & -2v_2^{\mathrm{t}}v_4 & 1 \\ -2v_3^{\mathrm{t}}v_1 & -2v_3^{\mathrm{t}}v_2 & -2v_3^{\mathrm{t}}v_3 & -2v_3^{\mathrm{t}}v_4 & 1 \\ -2v_4^{\mathrm{t}}v_1 & -2v_4^{\mathrm{t}}v_2 & -2v_4^{\mathrm{t}}v_3 & -2v_4^{\mathrm{t}}v_4 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\;.$$

Addition von Vielfachen der letzten Zeile zu den anderen Zeilen und Addition von Vielfachen der letzen Spalte zu den anderen Spalten gibt

$$\begin{aligned} -36 \cdot 16V^2 \;&=\; \det\begin{pmatrix} |v_1|^2{-}2v_1^{\mathrm{t}}v_1{+}|v_1|^2 & |v_1|^2{-}2v_1^{\mathrm{t}}v_2{+}|v_2|^2 & |v_1|^2{-}2v_1^{\mathrm{t}}v_3{+}|v_3|^2 & |v_1|^2{-}2v_1^{\mathrm{t}}v_4{+}|v_4|^2 & 1 \\ |v_2|^2{-}2v_2^{\mathrm{t}}v_1{+}|v_1|^2 & |v_2|^2{-}2v_2^{\mathrm{t}}v_2{+}|v_2|^2 & |v_2|^2{-}2v_2^{\mathrm{t}}v_3{+}|v_3|^2 & |v_2|^2{-}2v_2^{\mathrm{t}}v_4{+}|v_4|^2 & 1 \\ |v_3|^2{-}2v_3^{\mathrm{t}}v_1{+}|v_1|^2 & |v_3|^2{-}2v_3^{\mathrm{t}}v_2{+}|v_2|^2 & |v_3|^2{-}2v_3^{\mathrm{t}}v_3{+}|v_3|^2 & |v_3|^2{-}2v_3^{\mathrm{t}}v_4{+}|v_4|^2 & 1 \\ |v_4|^2{-}2v_4^{\mathrm{t}}v_1{+}|v_1|^2 & |v_4|^2{-}2v_4^{\mathrm{t}}v_2{+}|v_2|^2 & |v_4|^2{-}2v_4^{\mathrm{t}}v_3{+}|v_3|^2 & |v_4|^2{-}2v_4^{\mathrm{t}}v_4{+}|v_4|^2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \det\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 1 \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & 1 \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\;. \end{aligned}$$

Division der letzten Zeile durch (-2) gibt schließlich

$$288V^2 \;=\; \det\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 1 \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & 1 \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

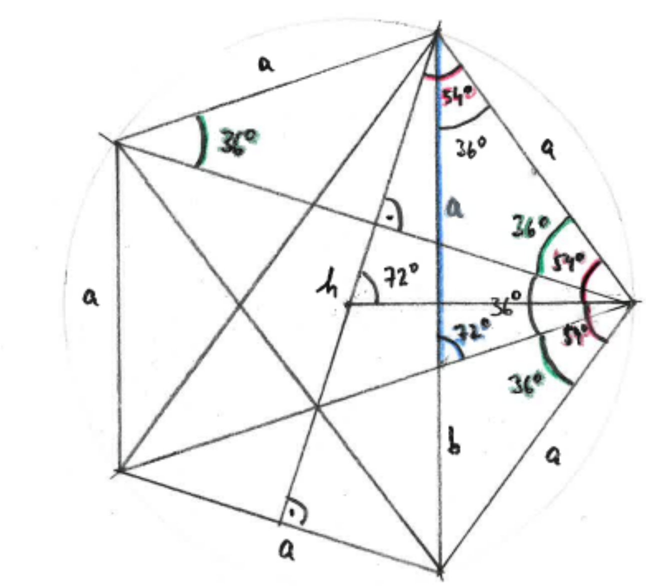
Korollar. Vier Punkte v_1, v_2, v_3, v_4, $\in \mathbb{R}^{3\times 1}$ liegen in einer Ebene genau dann, wenn mit $d_{j,k} := |v_j - v_k|^2$ für j, $k \in \{1,2,3,4\}$ sich

$$0 \;=\; \det\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 1 \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & 1 \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt.

Beispiel. Wir wollen das Volumen eines Dodekaeders mit Kantenlänge a bestimmen.

(1) Wir bestimmen zunächst den Flächeninhalt A eines regelmäßigen Fünfecks mit Kantenlänge a.



Wir zeichnen alle Diagonalen ein.

Der Winkel zwischen zwei Strecken von Umkreismittelpunkt zu je einer Ecke beträgt $\frac{1}{5}\cdot 360° = 72°$.

Das dabei entstandene gleichseitige Dreieck auf einer Kante als Grundseite zeigt, daß der halbe Innenwinkel an einer Ecke $\frac{1}{2}(180° - 72°) = 54°$ beträgt.

Das rechtwinklige Dreieck, das auch den roten und den grünen Winkel beinhaltet, zeigt, daß der grüne Winkel zwischen Seite und Diagonale $90° - 54° = 36°$ beträgt.

Der Winkel zwischen zwei Diagonalen ist also $2 \cdot 54° - 2 \cdot 36° = 36°$.

Da gleichschenklige Dreiecke mit Basiswinkel von 72° zueinander ähnlich sind, erhält man

$$\tfrac{\text{Schenkel}}{\text{Grundseite}} = \tfrac{a}{b} = \tfrac{b}{a-b} \; .$$

Somit ist $a^2 - ab = b^2$, also $b^2 + ab - a^2 = 0$, also

$$b \;=\; -\tfrac{a}{2} \pm \sqrt{\tfrac{a^2}{4} - (-a^2)} \;=\; \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\,a \; ,$$

da das negative Vorzeichen wegen $b \geqslant 0$ nicht gelten kann. Mit Pythagoras wird

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(a+b)^2 - (\tfrac{a}{2})^2} \\ &= \sqrt{(a + \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\,a)^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2} \\ &= \tfrac{a}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 1} \\ &= \tfrac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \; . \end{aligned}$$

Sei g die Grundseite des kleineren gleichscheinkligen Dreiecks mit Basiswinkel 72°. Dank ähnlicher Dreiecke wird

$$\tfrac{g}{b} \;=\; \tfrac{a}{a+b}$$

und also

$$g \;=\; \tfrac{a}{a+b}\cdot b \;=\; a\cdot\tfrac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \;=\; a\cdot\tfrac{(-1+\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})} \;=\; \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,a \; .$$

Sei r der Umkreisradius des Fünfecks. Dank ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke wird

$$\tfrac{r}{a-\frac{g}{2}} \;=\; \tfrac{a+b}{h}$$

und also

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{a+b}{h}(a - \tfrac{g}{2}) \\ &= \tfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\,(1 - \tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}))\,a \\ &= \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\,(1+\sqrt{5})\,a \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{(1+\sqrt{5})^4}{5+2\sqrt{5}}}\;a \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1+4\sqrt{5}+6\cdot 5+4\cdot 5\cdot\sqrt{5}+25}{5+2\sqrt{5}}}\;a \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{(56+24\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}}\;a \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{40+8\sqrt{5}}{5}}\;a \\ &= \tfrac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} \; . \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A unseres Fünfecks ist das Fünffache des Flächeninhalts des Dreiecks mit den Seitenlängen r, r, a. Für Heron wird $s = \frac{r+r+a}{2}$ und also

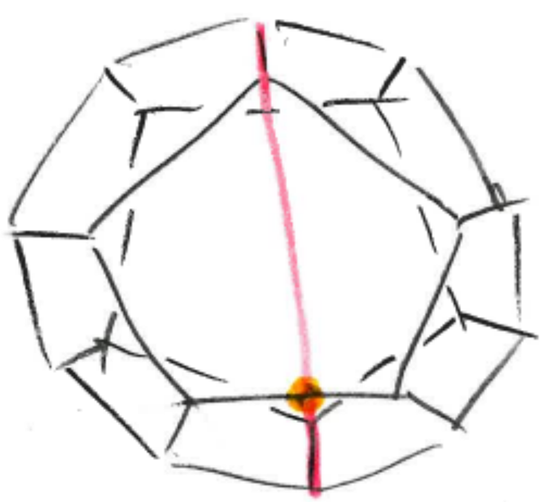
$$\begin{aligned} s\,(s-a)(s-r)(s-r) &= (r+\tfrac{a}{2})(r-\tfrac{a}{2})\cdot\tfrac{a^2}{4} \\ &= (r^2-\tfrac{a^2}{4})\cdot\tfrac{a^2}{4} \\ &= (\tfrac{a^2}{100}(50+10\sqrt{5})-\tfrac{a^2}{4})\cdot\tfrac{a^2}{4} \\ &= \tfrac{a^2}{100}(25+10\sqrt{5})\cdot\tfrac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Mit Heron wird also

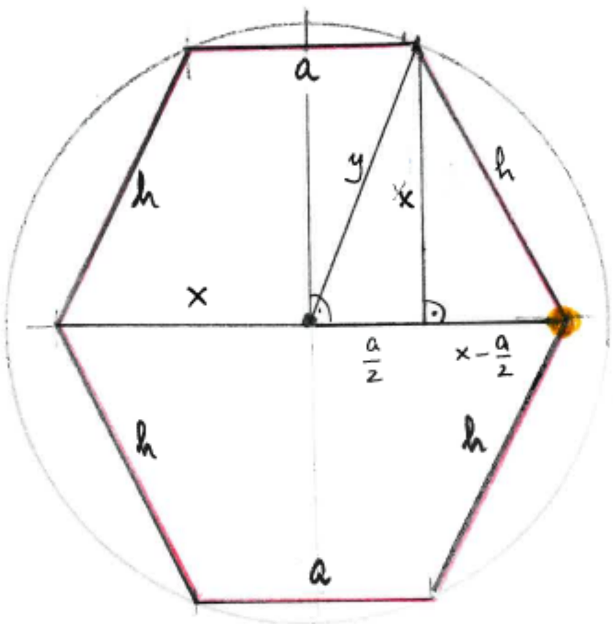
$$A \;=\; 5\cdot\sqrt{s\,(s-a)(s-r)(s-r)} \;=\; 5\cdot\sqrt{\tfrac{a^2}{100}(25+10\sqrt{5})\cdot\tfrac{a^2}{4}} \;=\; \tfrac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,.$$

(2) Wir bestimmen damit nun das das Volumen V eines Dodekaeders mit Kantenlänge a.

Eine Freihandskizze eines Dodekaeders beginne man mit einem Fünfeck, einem verdrehten Fünfeck dahiner und kurzen Strecken nach außen. Dann verbinde man die äußeren Endpunkte dieser Strecken zu einem Zehneck. Also etwa so:



Wir schneiden den Dodekaeder entlang der roten Ebene durch und erhalten folgendes Sechseck.



Dabei ist x der Abstand vom Umkugelmittelpunkt des Dodekaeders zu jeder Kantenmitte.

Ferner ist y der Abstand vom Umkugelmittelpunkt des Dodekaeders zu jeder Ecke.

Die Strecke der Länge h stammt aus (1).

Dank Pythagoras ist

$$x^2 + (x - \tfrac{a}{2})^2 \;=\; h^2 \;\overset{(1)}{=}\; \tfrac{a^2}{4}(5 + 2\sqrt{5}) \;.$$

Also ist

$$2x^2 - ax + \tfrac{a^2}{4}(-4 - 2\sqrt{5}) \;=\; 0 \;.$$

Es folgt

$$x \;=\; \tfrac{1}{4}\big(a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 2 \cdot \tfrac{a^2}{4}(-4 - 2\sqrt{5})}\,\big) \;=\; \tfrac{a}{4}\big(1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}\,\big) = \tfrac{a}{4}(3 + \sqrt{5}) \;,$$

da $(2 + \sqrt{5})^2 \;=\; 9 + 4\sqrt{5}$ ist und da das negative Vorzeichen wegen $x \geqslant 0$ nicht gelten kann.

Dank Pythagoras ist

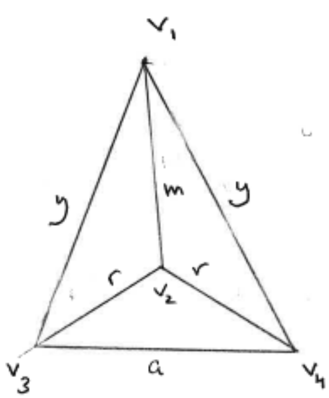
$$y \;=\; \sqrt{\tfrac{a^2}{4} + \tfrac{a^2}{16}(3 + \sqrt{5})^2} \;=\; \tfrac{a}{4}\sqrt{4 + (3 + \sqrt{5})^2} \;=\; \tfrac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}} \;=\; \tfrac{a}{4}\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{5}) \;,$$

da $(1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5}$.

Der Abstand m vom Umkugelmittelpunkt zu jedem Umkreismittelpunkt eines begrenzenden Fünfecks ist

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{y^2 - r^2} \\ &= a\sqrt{\tfrac{1}{16}(18+6\sqrt{5}) - \tfrac{1}{100}(50+10\sqrt{5})} \\ &= a\sqrt{\tfrac{1}{80}(90+30\sqrt{5}) - \tfrac{1}{80}(40+8\sqrt{5})} \\ &= a\sqrt{\tfrac{1}{80}(50+22\sqrt{5})} \\ &= \tfrac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}\ . \end{aligned}$$

Das Volumen V unseres Dodekaeders ist das $12\cdot 5$-fache des Volumens des Tetraeders mit den Seitenlängen r, r, a, y, y, m.



Wir rechnen zunächst die Cayley-Menger-Determinante aus. Es wird

$$\begin{aligned} d := \det\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 1 \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & 1 \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 0 & m^2 & y^2 & y^2 & 1 \\ m^2 & 0 & r^2 & r^2 & 1 \\ y^2 & r^2 & 0 & a^2 & 1 \\ y^2 & r^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & m^2 & 0 & y^2 & 1 \\ m^2 & 0 & 0 & r^2 & 1 \\ y^2 & r^2 & -a^2 & a^2 & 1 \\ y^2 & r^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a^2\det\begin{pmatrix} 0 & m^2 & 0 & y^2 & 1 \\ m^2 & 0 & 0 & r^2 & 1 \\ y^2 & r^2 & -1 & a^2 & 1 \\ y^2 & r^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a^2\det\begin{pmatrix} 0 & m^2 & 0 & y^2 & 1 \\ m^2 & 0 & 0 & r^2 & 1 \\ 2y^2 & 2r^2 & 0 & a^2 & 2 \\ y^2 & r^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -a^2\det\begin{pmatrix} 0 & m^2 & y^2 & 1 \\ m^2 & 0 & r^2 & 1 \\ 2y^2 & 2r^2 & a^2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -a^2\det\begin{pmatrix} 0 & m^2 & y^2 & 1 \\ m^2 & -m^2 & r^2-m^2 & 1 \\ 2y^2 & 2(r^2-y^2) & a^2-2y^2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a^2\det\begin{pmatrix} m^2 & y^2 & 1 \\ -m^2 & r^2-m^2 & 1 \\ 2(r^2-y^2) & a^2-2y^2 & 2 \end{pmatrix} = a^2\det\begin{pmatrix} m^2 & y^2 & 1 \\ -2m^2 & r^2-m^2-y^2 & 0 \\ 2(r^2-y^2-m^2) & a^2-4y^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a^2\det\begin{pmatrix} -2m^2 & r^2-m^2-y^2 \\ 2(r^2-y^2-m^2) & a^2-4y^2 \end{pmatrix} \\ &= a^2(-2m^2(a^2-4y^2) - 2(r^2-m^2-y^2)^2)\ . \end{aligned}$$

Einsetzen von $m = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$, von $y = \frac{a}{4}\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5})$ und von $r = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$

gibt unter Verwendung eines Taschenrechners

$$d \;=\; \tfrac{a^6}{20}(47+21\sqrt{5})\;.$$

Somit wird

$$V = 60\cdot\sqrt{\tfrac{d}{288}} \;=\; 60\cdot\tfrac{a^3}{20\cdot 12}\cdot\sqrt{10(47+21\sqrt{5})} \;=\; \tfrac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})\;,$$

da $(15+7\sqrt{5})^2 = 470+210\sqrt{5}$.

Natürlich kann dieses Tetraeder-Volumen auch als ein Drittel mal Grundseite mal Höhe bestimmt werden, da diese Daten im vorliegenden Fall bekannt sind. Aber wir wollten den Einsatz der Cayley-Menger-Determinante illustrieren.

Literatur

[1] Cohn, H., *A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of* e, Am. Math. Monthly 113, p. 57–62, 2006.

[2] Ebbinghaus H.-D. et al., *Zahlen,* Springer Grundwissen, 3. Aufl., 1992.

[3] Fendt, W., *Das Dodekaeder,* `www.walter-fendt.de/math/geo/dodekaeder.pdf`, 2005.

[4] Hilbert, D., *Über die Transzendenz der Zahlen* e *und* π*,* Math. Ann. 43, S. 216–219, 1893.

[5] Milla, L., *Die Transzendenz von* π *und die Quadratur des Kreises,* arxiv 2003.14035v3, 2020.

[6] Moser, L.-F., *Die Transzendenz der Zahlen* e *und* π *nach Hilbert,* Manuskript, 2013.

[7] Straubinger, J., *Cayley-Menger-Determinante im Raum*, Manuskript, 2013.

[8] Wikipedia, *Satz des Heron*, `en.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Heron`, Abruf Juli 2022.

[9] Wikipedia, *Euler's continued fraction formula*, `en.wikipedia.org/wiki/Euler's_continued_fraction_formula`, Abruf Mai 2022.

[10] Wirth, J., *Schulmathematik vom höheren Standpunkt,* Skript, Universität Stuttgart, 2021.