Klausur zur Schulmathematik

vom höheren Standpunkt

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- **Antworten sind zu begründen.** Nachvollziehbare Rechnungen zählen als Begründungen.
- Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **07.04.2023** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **07.04.2023** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+4+1 Punkte) Sei $f(X) = X^3 + 7X - 6\mathrm{i} \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie die Diskriminante $\Delta(f(X))$ von $f(X)$ ohne Verwendung seiner Nullstellen.

(2) Berechnen Sie $f(\mathrm{i})$ und $f(2\mathrm{i})$. Bestimmen Sie nun die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

(3) Verwenden Sie die Nullstellen von $f(X)$, um die Diskriminante $\Delta(f(X))$ abermals zu berechnen.

Lösung.

(1) Die Diskriminante ist $\Delta = \Delta(X^3 + 7X - 6\mathrm{i}) = -4 \cdot 7^3 - 27 \cdot (6\mathrm{i})^2 = -400$.

(2) Es ist $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^3 + 7\mathrm{i} - 6\mathrm{i} = 0$. Es ist $f(2\mathrm{i}) = (2\mathrm{i})^3 + 7(2\mathrm{i}) - 6\mathrm{i} = 0$.

Es ist $(X - \mathrm{i})(X - 2\mathrm{i}) = X^2 - 3\mathrm{i}X - 2$.

Polynomdivision gibt

$$f(X) \;=\; X^3 + 7X - 6\mathrm{i} \;=\; (X^2 - 3\mathrm{i}X - 2)(X + 3\mathrm{i}) \;=\; (X - \mathrm{i})(X - 2\mathrm{i})(X - (-3\mathrm{i}))\ .$$

Also hat $f(X)$ die Nullstellen i, $2\mathrm{i}$, $-3\mathrm{i}$.

(3) Unter Verwendung von (2) wird abermals

$$\Delta \;=\; (\mathrm{i} - 2\mathrm{i})^2 \cdot (\mathrm{i} - (-3\mathrm{i}))^2 \cdot (2\mathrm{i} - (-3\mathrm{i}))^2 \;=\; -400\ .$$

Aufgabe 2 (1+2 Punkte) Sei $f(X) = X^4 - 3X^2 + 6X - 8 \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie ein Polynom $u(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(X) = (X^2 - 1)^2 - u(X)^2$.

(2) Bestimmen Sie eine Nullstelle des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

Lösung.

(1) Es ist

$$f(X) - (X^2 - 1)^2 \;=\; (X^4 - 3X^2 + 6X - 8) - (X^4 - 2X^2 + 1) \;=\; -X^2 + 6X - 9 \;=\; -(X-3)^2 \,.$$

Also können wir $u(X) = X - 3$ wählen.

(2) Es wird

$$f(X) \;=\; (X^2-1)^2 - (X-3)^2 \;=\; (X^2-1-X+3)(X^2-1+X-3) \;=\; (X^2-X+2)(X^2+X-4) \,.$$

Jede Nullstelle des Polynoms $f(X)$ ist also eine Nullstelle von $X^2 - X + 2$ oder von $X^2 + X - 4$.
Nach der Mitternachtsformel sind $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{7})$ und $\frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{7})$ die Nullstellen von $X^2 - X + 2$.
Nach der Mitternachtsformel sind $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$ und $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17})$ die Nullstellen von $X^2 + X - 4$.
Gefragt war die Angabe einer dieser Nullstellen.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Wert des Kettenbruchs $[\,2, \overline{4}\,]$.

Lösung.

Wir haben $[\,\overline{x_1}\,] = \frac{1}{2}(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4})$. Also ist $[\,\overline{4}\,] = \frac{1}{2}(4 + \sqrt{20})$.

Daraus folgt $[\,2, \overline{4}\,] = [\,\overline{4}\,] - 2 = \frac{1}{2}(4 + \sqrt{20}) - 2 = \sqrt{5}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Gibt es $a,\, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ mit $\pi = [\,\overline{a, b}\,]$?

Lösung.

Für $a,\, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ ist $y := [\,\overline{a, b}\,] = \frac{1}{2b}(ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}) = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a}{b}}$.

Also ist $(y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{b}$.

Folglich ist y eine Nullstelle des Polynoms

$$X^2 - aX - \frac{a}{b} \; \in \; \mathbb{Q}[X] \, .$$

Also ist y algebraisch.

Aber π ist transzendent. Folglich kann nicht $y = \pi$ sein.

Aufgabe 5 (2+1+2 Punkte)

Sei $w := \sqrt[3]{5}$.

(1) Zeigen Sie: Es ist $X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.

(2) Zeigen Sie: Es ist $\mu_w(X) = X^3 - 5$.

(3) Zeigen Sie: Es ist $\mu_{w+1}(X) = (X-1)^3 - 5$.

Lösung. Wir rechnen unter Verwendung von $w^3 = 5$.

(1) Es ist $X^3 - 5 = X^3 + 0X^2 + 0X^1 + (-5)X^0$.

Die Koeffizienten bei X^2, X^1, X^0 sind durch 5 teilbar.

Der Koeffizient bei X^0 ist nicht durch 5^2 teilbar.

Also ist $X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel nach Eisensteinkriterium; vgl. Aufgabe 18.

(2) Da $X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel und normiert ist und da w eine Nullstelle dieses Polynoms ist, ist $\mu_w(X) = X^3 - 5$.

(3) Es ist $(X-1)^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ normiert und es ist $w+1$ eine Nullstelle dieses Polynoms.

Es ist $(X-1)^3 - 5 = X^3 - 3X^2 + 3X^1 - 6X^0$.

Die Koeffizienten bei X^2, X^1, X^0 sind durch 3 teilbar.

Der Koeffizient X^0 ist nicht durch 3^2 teilbar.

Also ist $(X-1)^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel nach Eisensteinkriterium.

Insgesamt ist $\mu_{w+1}(X) = (X-1)^3 - 5$.

Man kann für die Irreduzibilität auch anführen: Wäre $(X-1)^3 - 5 = g(X) \cdot h(X)$ mit $g(X)$ und $h(X)$ nichtkonstant aus $\mathbb{Q}[X]$, dann wäre auch $X^3 - 5 = (X+1-1)^3 - 5 = g(X+1) \cdot h(X+1)$, was nicht sein kann dank (1). Also ist $(X-1)^3 - 5$ irreduzibel.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Stellen Sie das symmetrische Polynom $X_1^5 + X_2^5 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1 = s_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ und $s_2 = s_2(X_1, X_2) = X_1X_2$ dar.

Lösung.

Es ist

$$s_1^5 \;=\; (X_1 + X_2)^5 \;=\; X_1^5 + 5X_1^4X_2 + 10X_1^3X_2^2 + 10X_1^2X_2^3 + 5X_1X_2^4 + X_2^5$$

Also ist

$$(X_1^5 + X_2^5) - s_1^5 \;=\; -5X_1^4X_2 - 10X_1^3X_2^2 - 10X_1^2X_2^3 - 5X_1X_2^4\ .$$

Es ist

$$s_1^3s_2 \;=\; (X_1^3 + 3X_1^2X_2 + 3X_1X_2^2 + X_2^3)X_1X_2 \;=\; X_1^4X_2 + 3X_1^3X_2^2 + 3X_1^2X_2^3 + X_1X_2^4\ .$$

Also ist

$$\begin{aligned}(X_1^5 + X_2^5) - s_1^5 + 5s_1^3s_2 \;&=\; (-5X_1^4X_2 - 10X_1^3X_2^2 - 10X_1^2X_2^3 - 5X_1X_2^4) \\ &\quad\; + 5(X_1^4X_2 + 3X_1^3X_2^2 + 3X_1^2X_2^3 + X_1X_2^4) \\ &=\; 5X_1^3X_2^2 + 5X_1^2X_2^3 \\ &=\; 5s_1s_2^2\ .\end{aligned}$$

Folglich ist

$$X_1^5 + X_2^5 = s_1^5 - 5s_1^3s_2 + 5s_1s_2^2\ .$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Wir wissen: e ist transzendent. Verwenden Sie dies, um zu zeigen: Es ist $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ transzendent.

Lösung.

Annahme, es ist $\frac{1}{\mathrm{e}}$ algebraisch. Dann haben wir das normierte irreduzible Polynom

$$f(X) \; := \; \mu_{\frac{1}{\mathrm{e}}}(X) \in \mathbb{Q}[X]$$

mit $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) = 0$.

Wir schreiben $f(X) =: X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_0 X^0$, wobei $n \geqslant 1$ der Grad von $f(X)$ ist und wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$.

Da $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, ist $a_0 \neq 0$.

Es ist also

$$0 \; = \; f(\tfrac{1}{\mathrm{e}}) = \mathrm{e}^{-n} + a_{n-1}\mathrm{e}^{1-n} + a_{n-2}\mathrm{e}^{2-n} + \ldots + a_0 \mathrm{e}^{n-n} \; .$$

Multiplikation mit e^n gibt

$$0 \; = \; \mathrm{e}^0 + a_{n-1}\mathrm{e}^1 + a_{n-2}\mathrm{e}^2 + \ldots + a_{n-n}\mathrm{e}^n \; .$$

Also ist e eine Nullstelle des Polynoms

$$X^0 + a_{n-1}X^1 + a_{n-2}X^2 + \ldots + a_{n-n}X^n \; \in \; \mathbb{Q}[X] \; .$$

von Grad $n \geqslant 1$. Folglich ist e algebraisch, im *Widerspruch* zur Transzendenz von e.

Man kann auch anführen, daß $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist und also mit jedem Element ungleich 0 auch sein Inverses enthält. Unter der Annahme, es sei $\frac{1}{\mathrm{e}}$ algebraisch, folgt damit dann, daß auch $\mathrm{e} = (\frac{1}{\mathrm{e}})^{-1}$ algebraisch ist, was einen Widerspruch zur Transzendenz von e darstellt.

Aufgabe 8 (2+2 Punkte)

Sei ein Dreieck mit den Seiten a, b und c gegeben. Sein Flächeninhalt sei A.

Sei dabei $b = c$. Sei das Dreieck also gleichschenklig.

(1) Zeigen Sie mit der Heronschen Formel: Es ist $A = \frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2}$.

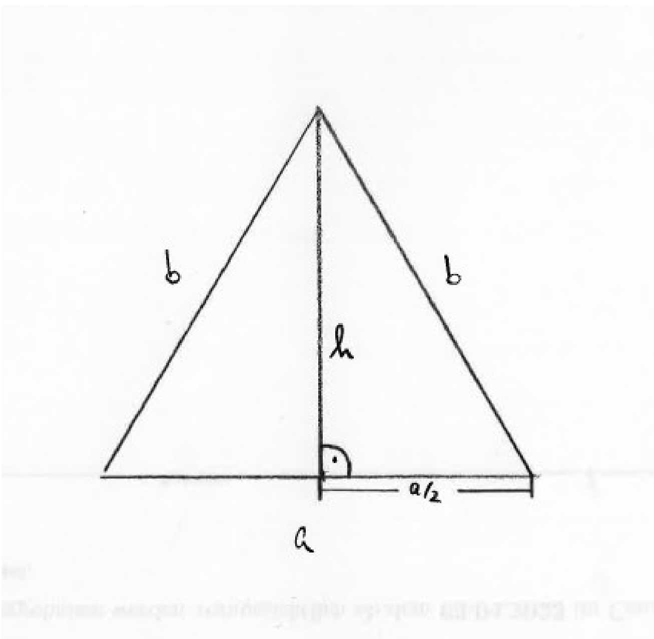
(2) Bestätigen Sie die Formel für A aus (1) unter Verwendung der Höhe auf der Grundseite a.

Lösung.

(1) Wir wollen die Heronsche Formel anwenden. Es ist $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}a + b$. Also wird

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a+b)\cdot(-\tfrac{1}{2}a+b)\cdot\tfrac{1}{2}a\cdot\tfrac{1}{2}a} \\ &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{b^2-\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{4b^2-a^2}\ . \end{aligned}$$

(2) Skizze:



Nach Pythagoras ist $h^2 + (\frac{a}{2})^2 = b^2$. Die Höhe beträgt also $h = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

Die Grundseite ist a.

Somit ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks zu

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{b^2-\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{4b^2-a^2}\ .$$