Klausur zur Schulmathematik

vom höheren Standpunkt

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- **Antworten sind zu begründen.** Nachvollziehbare Rechnungen zählen als Begründungen.
- Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+3 Punkte) Sei $f(X) = X^3 + 3X + 2\mathrm{i} \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie die Diskriminante $\Delta(f(X))$ von $f(X)$.

(2) Bestimmen Sie nun die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.
Hat $f(X)$ eine mehrfache Nullstelle?

Lösung.

(1) Die Diskriminante ist $\Delta(X^3 + 3X + 2\mathrm{i}) = -4 \cdot 3^3 - 27 \cdot (2\mathrm{i})^2 = 0$.

(2) Mit $u := \frac{3 \cdot 2\mathrm{i}}{2 \cdot 3}$ sind die Nullstellen gegeben durch $2u = 2\mathrm{i}$ und $-u = -\mathrm{i}$.

Dabei ist $-\mathrm{i}$ eine doppelte Nullstelle.

Alternativ: Es hat $f(X)$ Diskriminante $\Delta(f(X)) = 0$. Folglich hat $f(X)$ eine mehrfache Nullstelle.

Aufgabe 2 (1+2 Punkte) Sei $f(X) = X^4 + X^2 - 4X - 3 \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie ein Polynom $u(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(X) = (X^2 + 1)^2 - u(X)^2$.

(2) Bestimmen Sie eine Nullstelle des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

Lösung.

(1) Es ist

$$f(X) - (X^2 + 1)^2 \;=\; (X^4 + X^2 - 4X - 3) - (X^4 + 2X^2 + 1) \;=\; -X^2 - 4X - 4 \;=\; -(X + 2)^2\,.$$

Also können wir $u(X) = X + 2$ wählen.

(2) Es wird

$$f(X) \;=\; (X^2+1)^2 - (X+2)^2 \;=\; (X^2+1-X-2)(X^2+1+X+2) \;=\; (X^2-X-1)(X^2+X+3)\,.$$

Jede Nullstelle des Polynoms $f(X)$ ist also eine Nullstelle von $X^2 - X - 1$ oder von $X^2 + X + 3$.

Nach der Mitternachtsformel sind $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ die Nullstellen von $X^2 - X - 1$.

Nach der Mitternachtsformel sind $\frac{1}{2}(-1+\mathrm{i}\sqrt{11})$ und $\frac{1}{2}(-1-\mathrm{i}\sqrt{11})$ die Nullstellen von X^2+X+3.

Gefragt war die Angabe einer dieser Nullstellen.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Beweisen Sie: Ist $f(X^n)$ durch $X - 1$ teilbar, so ist $f(X^n)$ durch $X^n - 1$ teilbar.

Lösung.

Da $f(X^n)$ durch $X - 1$ teilbar ist, ist $f(X^n) = (X - 1) \cdot h(X)$ für ein Polynom $h(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Also ist $f(1^n) = (1 - 1) \cdot h(1) = 0$. Somit ist $f(1) = 0$.

Folglich ist $f(X) = (X - 1) \cdot q(X)$ für ein Polynom $q(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Daraus folgt $f(X^n) = (X^n - 1) \cdot q(X^n)$. Also ist $f(X^n)$ durch $X^n - 1$ teilbar.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Wert des Kettenbruchs $[\,2, \overline{3}\,]$.

Lösung.

Wir haben $[\,\overline{x_1}\,] = \frac{1}{2}(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4})$. Also ist $[\,\overline{3}\,] = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$.

Daraus folgt $[\,2, \overline{3}\,] = [\,\overline{3}\,] - 1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es soll $\sqrt{6}$ wie folgt als Kettenbruch dargestellt werden:

Finden Sie $a,\ b,\ c\ \in\ \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ mit $\sqrt{6} = [a, \overline{b, c}\,]$.

Lösung.

Für $u,\ v\ \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ ist $[\,\overline{u, v}\,] = \frac{1}{2v}(uv + \sqrt{u^2v^2 + 4uv}) = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} + \frac{u}{v}}$ nach Formel.

Wir wollen unter der Wurzel den Wert $\frac{u^2}{4} + \frac{u}{v} = 6$ bekommen.

Für $u \in \{1, 2, 3\}$ ist $\frac{u^2}{4} + \frac{u}{v} \leqslant \frac{9}{4} + 3 < 6$.

Für $u = 4$ wird mit $v = 2$ dann $\frac{4^2}{4} + \frac{4}{2} = 6$.

Also ist $[\,\overline{4, 2}\,] = \frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{4}{2}} = 2 + \sqrt{6}$.

Somit wird

$$\sqrt{6} \;=\; [\,\overline{4, 2}\,] - 2 \;=\; [\,4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots\,] - 2 \;=\; [\,2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots\,] \;=\; [\,2, \overline{2, 4}\,]\,.$$

Alternativ kann man auch wie folgt direkt rechnen. Es ist

$$\sqrt{6} \;=\; 2 + (\sqrt{6} - 2) \;=\; 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{6} - 2}}\,.$$

Dabei ist

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{6} - 2} \cdot \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{6} + 2} \;=\; \frac{\sqrt{6} + 2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{6} - 2}{2}\,.$$

Somit wird

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} \;=\; 2 + \frac{\sqrt{6} - 2}{2} \;=\; 2 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{6} - 2}}\,.$$

Weiters ist

$$\frac{2}{\sqrt{6} - 2} = 4 + (\sqrt{6} - 2)\,.$$

Somit wird

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} \;=\; 2 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{6} - 2}} \;=\; 2 + \frac{1}{4 + (\sqrt{6} - 2)} \;=\; 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{6} - 2}}}\,.$$

Also ist

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} \;=\; [2, 4, \frac{1}{\sqrt{6} - 2}] \;=\; [\,\overline{2, 4}\,]\,.$$

Es folgt

$$\sqrt{6} \;=\; 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{6} - 2}} \;=\; 2 + \frac{1}{[\,\overline{2, 4}\,]} \;=\; [\,2, \overline{2, 4}\,]\,.$$

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte)

Sei $w := \sqrt[3]{5}$. Wir setzen als bekannt voraus: Es sind $1,\ w,\ w^2$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Sei $a := w - 2 = \sqrt[3]{5} - 2$.

(1) Berechnen Sie a^0, a^1, a^2 und a^3.
Stellen Sie das Ergebnis jeweils als $\mathbb{Q}$-Linearkombination in $1,\ w,\ w^2$ dar.

(2) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_a(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von a.

(3) Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(a)$.

Lösung. Wir rechnen unter Verwendung von $w^3 = 5$.

(1) Es wird $a^0 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot w + 0 \cdot w^2$ und $a^1 = w - 2 = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot w + 0 \cdot w^2$.

Es wird $a^2 = (w-2)^2 = w^2 - 4w + 4 = 4 \cdot 1 + (-4) \cdot w + 1 \cdot w^2$.

Es wird

$$a^3 \;=\; (w-2)^3 = w^3 - 3 \cdot 2w^2 + 3 \cdot 2^2 w - 2^3 \;=\; -6w^2 + 12w - 3 = (-3) \cdot 1 + 12 \cdot w + (-6) \cdot w^2\,.$$

(2) Es sind $1,\ a,\ a^2$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, da in 1 und a der Term w^2 nicht auftritt. Also gibt es kein normiertes Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ von Grad $\leqslant 2$ mit Nullstelle a.

Es ist

$$a^3 \;=\; -6w^2 + 12w - 3 \;=\; -6(a^2 + 4w - 4) + 12w - 3 \;=\; -6a^2 - 12w + 21 \;=\; -6a^2 - 12a - 3\,.$$

Folglich ist $\mu_a(X) = X^3 + 6X^2 + 12X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, als normiertes Polynom minimalen Grades in $\mathbb{Q}[X]$ mit Nullstelle a.

Alternativ kann man auch anführen: Es hat $X^3+6X^2+12X+3$ die Nullstelle a. Die Primzahl 3 teilt 6, 12 und 3, aber 3^2 teilt nicht 3. Nach Eisensteinkriterium ist $X^3+6X^2+12X+3 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Also ist $\mu_a(X) = X^3 + 6X^2 + 12X + 3$.

Alternativ kann man auch anführen: Es ist

$$\mu_a(X) \;=\; \mu_{w-2}(X) \;=\; \mu_w(X+2) \;=\; (X+2)^3 - 5 \;=\; X^3 + 6X^2 + 12X + 3\,.$$

(3) Es hat das Minimalpolynom $\mu_a(X)$ den Grad 3. Es ist $3 - 1 = 2$.

Eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(a)$ ist also (a^0, a^1, a^2).

Alternativ ist auch z.B. $(1, w, w^2)$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(w)$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Stellen Sie das symmetrische Polynom $X_1^4 + X_2^4 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1 = s_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ und $s_2 = s_2(X_1, X_2) = X_1X_2$ dar.

Lösung.

Es ist

$$s_1^4 \;=\; (X_1 + X_2)^4 \;=\; X_1^4 + 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 + 4X_1X_2^3 + X_2^4$$

Also ist

$$(X_1^4 + X_2^4) - s_1^4 \;=\; -4X_1^3X_2 - 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3\ .$$

Es ist

$$s_1^2s_2 \;=\; (X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2)X_1X_2 \;=\; X_1^3X_2 + X_1X_2^3 + 2X_1^2X_2^2\ .$$

Also ist

$$\begin{aligned}(X_1^4 + X_2^4) - s_1^4 + 4s_1^2s_2 \;&=\; -4X_1^3X_2 - 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3 + 4(X_1^3X_2 + X_1X_2^3 + 2X_1^2X_2^2)\\ &=\; 2X_1^2X_2^2\\ &=\; 2s_2^2\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$X_1^4 + X_2^4 \;=\; s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Wir wissen: π ist transzendent. Verwenden Sie dies, um zu zeigen: $\pi^2 - 1$ ist transzendent.

Lösung.

Annahme, es ist $\pi^2 - 1$ nicht transzendent. Dann ist $\pi^2 - 1$ algebraisch. Also existiert ein Polynom $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad $\geqslant 1$ mit $g(\pi^2 - 1) = 0$.

Bezeichnen wir $f(X) := g(X^2 - 1)$. Dann ist $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad $\geqslant 1$. Aber es ist $f(\pi) = g(\pi^2 - 1) = 0$.

Folglich ist π algebraisch. Aber π ist transzendent. Wir haben einen *Widerspruch.*

Also ist $\pi^2 - 1$ transzendent.

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen $a = 4$, $b = 13$ und $c = 15$.

Lösung. Es ist $s := \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(4 + 13 + 15) = 16$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich mit Heron

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \\ &= \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} \\ &= \sqrt{16 \cdot 36} \\ &= 4 \cdot 6 \\ &= 24\,. \end{aligned}$$