Klausur zur Schulmathematik

vom höheren Standpunkt

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- **Antworten sind zu begründen.** Nachvollziehbare Rechnungen zählen als Begründungen.
- Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+3 Punkte) Sei $f(X) = X^3 + 3X + 2\mathrm{i} \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie die Diskriminante $\Delta(f(X))$ von $f(X)$.

(2) Bestimmen Sie nun die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.
Hat $f(X)$ eine mehrfache Nullstelle?

Aufgabe 2 (1+2 Punkte) Sei $f(X) = X^4 + X^2 - 4X - 3 \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie ein Polynom $u(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(X) = (X^2+1)^2 - u(X)^2$.

(2) Bestimmen Sie eine Nullstelle des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Beweisen Sie: Ist $f(X^n)$ durch $X - 1$ teilbar, so ist $f(X^n)$ durch $X^n - 1$ teilbar.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Wert des Kettenbruchs $[\,2, \overline{3}\,]$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es soll $\sqrt{6}$ wie folgt als Kettenbruch dargestellt werden:

Finden Sie $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ mit $\sqrt{6} = [a, \overline{b, c}\,]$.

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte)

Sei $w := \sqrt[3]{5}$. Wir setzen als bekannt voraus: Es sind $1,\ w,\ w^2$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Sei $a := w - 2 = \sqrt[3]{5} - 2$.

(1) Berechnen Sie a^0, a^1, a^2 und a^3.
Stellen Sie das Ergebnis jeweils als $\mathbb{Q}$-Linearkombination in $1,\ w,\ w^2$ dar.

(2) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_a(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von a.

(3) Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(a)$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Stellen Sie das symmetrische Polynom $X_1^4 + X_2^4 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1 = s_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ und $s_2 = s_2(X_1, X_2) = X_1X_2$ dar.

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Wir wissen: π ist transzendent. Verwenden Sie dies, um zu zeigen: $\pi^2 - 1$ ist transzendent.

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen $a = 4$, $b = 13$ und $c = 15$.
