A. Zvonareva, M. Künzer

Schulmathematik, SoSe 22

Lösung 7

Aufgabe 27 Beweisen Sie die Unmöglichkeit der Kubatur der Kugel.
D.h. zeigen Sie: Es kann mit Zirkel und Lineal keine Strecke von Länge a konstruiert werden, für welche ein Würfel mit einer Kantenlänge a dasselbe Volumen hat wie eine Kugel von Radius 1.

Lösung zu Aufgabe 27: Wenn eine Strecke von Länge a mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, kann auch der Punkt $\binom{a}{0}$ mit Abtragen von Längen konstruiert werden. In diesem Fall muss a in eine multiquadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten sein, also muss a auch algebraisch sein. Das Volumen der Kugel von Radius 1 ist $\frac{4}{3}\pi$. Das Volumen vom Würfel mit der Kantenlänge a ist a^3. Also $a^3 = \frac{4}{3}\pi$ und $a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}$. Wenn a algebraisch wäre, wäre auch $\frac{3}{4}a^3 = \pi$ algebraisch, da $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Körper ist. Das liefert einen Widerspruch, da π transzendent ist. Also ist die Kubatur der Kugel unmöglich.

Aufgabe 28

(1) Benutzen Sie die Heronsche Formel, um den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seiten von Länge 17, 17 und 16 zu bestimmen.

(2) Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ das Oktaeder mit den Ecken $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Skizzieren Sie dieses Oktaeder.

Berechnen Sie sein Volumen zum einen mittels der Volumenformel für Pyramiden: Das Volumen einer Pyramide ist das Produkt aus dem Flächeninhalt der Grundseite und der Höhe, geteilt durch 3.

Berechnen Sie sein Volumen zum anderen mit der Cayley-Menger-Determinante, angewandt auf ein Tetraeder, welches drei Eckpunkte mit dem Oktaeder gemeinsam hat und den Mittelpunkt des Oktaeders als vierte Ecke.

Vergleichen Sie die Resultate.

Lösung zu Aufgabe 28:

(1) Das Dreieck mit den Seiten der Längen 17, 17 und 16 hat den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{17+17+16}{2}\left(\frac{17+17+16}{2} - 17\right)\left(\frac{17+17+16}{2} - 17\right)\left(\frac{17+17+16}{2} - 16\right)} \\ &= \sqrt{\frac{17+17+16}{2}\cdot\frac{16}{2}\cdot\frac{16}{2}\cdot\frac{18}{2}} = \sqrt{50\cdot 16\cdot 18} = \sqrt{5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2} = 120. \end{aligned}$$

(2) Das Oktaeder besteht aus zwei gleichen Pyramiden. Die obere Pyramide hat Ecken $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$. Die Grundseite hat Ecken $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$. Der Flächeninhalt der Grundseite ist also 2. Die Hohe der Pyramide hat Länge 1. Also ist das Volumen der Pyramide $\frac{2}{3}$, und das Volumen des Oktaeders ist $\frac{4}{3}$.

Dasselbe Oktaeder besteht aus acht gleichen Tetraeder. Eins davon hat Ecken

$v_1 = \binom{0}{\substack{0\\0}}$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Bezeichnen wir $|v_j - v_k|^2 = d_{j,k}$ und das Volumen von dem betrachtenden Tetraeder durch V. Wir haben:

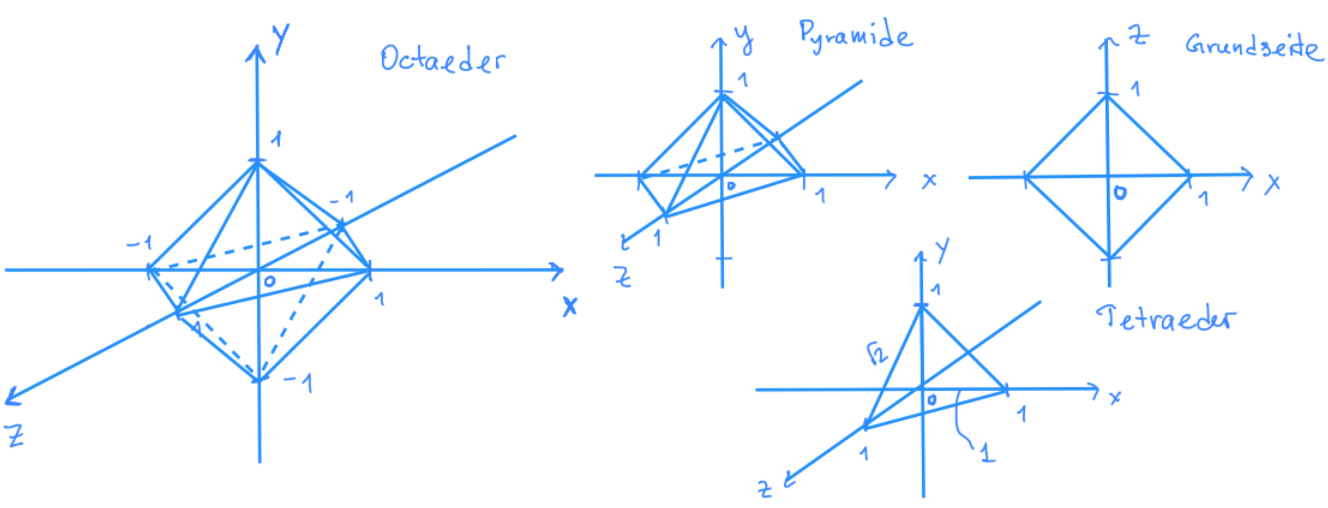
$$288V^2 = \begin{vmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 1 \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{4,4} & 1 \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\left(\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 3(2+0+2) + (4 + 2\cdot(-2) - 2\cdot 2) = 8.$$

Also $V^2 = \frac{1}{36}$, $V = \frac{1}{6}$, und das Volumen des Oktaeders ist gleich $8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$. Das stimmt mit der ersten Berechnung überein.



Aufgabe 29 Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heiße *konstruierbar*, wenn der Punkt $\binom{a}{0}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

(1) Es sind a und b genau dann konstruierbar, wenn der Punkt $\binom{a}{b}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

(2) Sind a und b konstruierbar und ist $b \neq 0$, dann sind auch ab und $\frac{1}{b}$ konstruierbar. Verwenden Sie hierzu Strahlensatz-Konstruktionen.

(3) Ist $a > 0$ konstruierbar, dann auch $\sqrt{a}$.

(4) Sind a und b konstruierbar, dann ist $a + bi$ in einer multiquadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten.

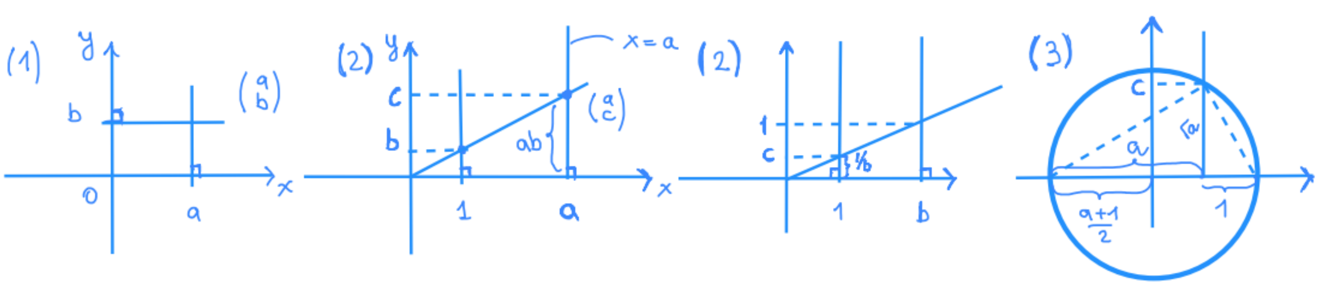
Lösung zu Aufgabe 29:

(1) Die Zahlen a und b sind dann und genau dann konstruierbar, wenn $\binom{a}{0}$ und $\binom{b}{0}$ konstruierbar sind. Mit Abtragen der Längen gilt das dann und genau dann, wenn $\binom{a}{0}$ und $\binom{0}{b}$ konstruierbar sind. Mit dem Errichten und dem Fällen des Lots, gilt das dann und genau dann, wenn $\binom{a}{b}$ konstruierbar ist.

(2) Sei $\binom{a}{0}$ und $\binom{b}{0}$ konstruierbar. Der Punkt $\binom{1}{0}$ ist auch konstruierbar. Errichten wir eine Senkrechte im Punkt $\binom{a}{0}$ und eine Senkrechte im Punkt $\binom{1}{0}$. Mit Abtragen von Längen konstruieren wir den Punkt $\binom{1}{b}$ auf der zweiten Senkrechte. Zeichnen wir eine Gerade durch $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{b}$. Sei $\binom{a}{c}$ der Schnittpunkt von dieser Geraden mit $x = a$. Nach Strahlensätzen $\frac{a}{1} = \frac{c}{b}$, also $c = ab$. Und nach (1) ist ab konstruierbar. (Bemerken wir, dass auf der Skizze $a > 1$ angenommen ist. Die gleiche Konstruktion funktioniert für $a < 1$.)

Sei $b \neq 0$. Errichten wir eine Senkrechte im Punkt $\binom{b}{0}$ und eine Senkrechte im Punkt $\binom{1}{0}$. Mit Abtragen von Längen konstruieren wir den Punkt $\binom{b}{1}$ auf der ersten Senkrechte. Zeichnen wir eine Gerade durch $\binom{0}{0}$ und $\binom{b}{1}$. Sei $\binom{1}{c}$ der Schnittpunkt von dieser Geraden mit $x = 1$. Nach Strahlensätzen $\frac{1}{b} = \frac{c}{1}$, also $c = \frac{1}{b}$. (Bemerken wir, dass auf der Skizze $b > 1$ angenommen ist. Die gleiche Konstruktion funktioniert für $b < 1$.)

(3) Sei $a > 0$ konstruierbar. Mit Abtragen von Längen und (2) ist $\frac{a+1}{2}$ auch konstruierbar. Zeichnen wir einen Kreis mit dem Mittelpunkt $\binom{0}{0}$ durch $\binom{\frac{a+1}{2}}{0}$. Der Durchmesser dieses Kreises hat die Länge $a + 1$. Errichten wir eine Senkrechte im Punkt $\binom{\frac{a-1}{2}}{0}$ (dieser Punk ist auch mit Abtragen von Längen und (2) konstruierbar). Nehmen wir den Schnittpunkt $\binom{\frac{a-1}{2}}{c}$ von dieser Senkrechten mit dem Kreis mit $c > 0$. Nach dem Höhensatz haben wir $c = \sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}$.



(4) Sind a, b konstruierbar, so ist nach (1) auch $\binom{a}{b}$. Dann sind a, b in einer multiquadratischen Erweiterung $L \subseteq \mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ enthalten, $[L : \mathbb{Q}] = 2^m$. Dann $a + bi \in L(\mathrm{i})$. Wir haben $[L(\mathrm{i}) : \mathbb{Q}] = [L(\mathrm{i}) : L] \cdot [L : \mathbb{Q}] = 2^{m+1}$. Also ist $L(\mathrm{i})$ eine multiquadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $a + bi \in L(\mathrm{i})$.

Aufgabe 30 Sei P_n ein regelmäßiges n-Eck, das in einem Kreis von Radius 1 einbeschrieben ist. Kann P_n mit Zirkel und Lineal konstruiert werden? Führen Sie eine Konstruktion durch oder beweisen Sie, dass diese unmöglich ist.

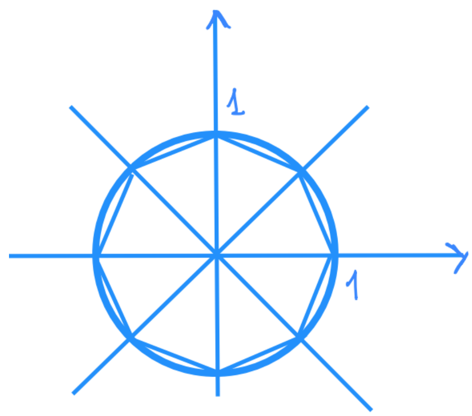
(1) $n = 8$

(2) $n = 11$

Lösung zu Aufgabe 30:

(1) Wir können einen Kreis vom Radius 1 durch $\binom{0}{0}$ konstruieren. Wir können auch eine Gerade durch $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{1}$ und eine Gerade durch $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{-1}$ konstruieren. Acht Schnittpunkte von den Geraden mit dem Kreis sind die Ecken von P_8.

(2) Wenn P_{11} konstruierbar wäre, wäre auch $\binom{a}{b}$ mit $\zeta_{11} = a+b\mathrm{i}$ konstruierbar. Nach Aufgabe 27 (4) wäre dann ζ_{11} in einer multiquadratischen Erweiterung L von $\mathbb{Q}$ enthalten. Dann $[L : \mathbb{Q}(\zeta_{11})][\mathbb{Q}(\zeta_{11}) : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}] = 2^m$. Aber nach Aufgabe 19 ist das Minimalpolynom von ζ_{11} gleich $X^{10} + X^9 + \cdots + 1$, also $[\mathbb{Q}(\zeta_{11}) : \mathbb{Q}] = 10$. Das liefert einen Widerspruch.



http://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/schulmathematik_22/