A. Zvonareva, M. Künzer

Lösung 6

Aufgabe 21 Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Eine Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ heißt eine *Approximation* von α von Ordnung t, falls $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^t}$ ist, wobei $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Es heißt α *approximierbar* von Ordnung t, falls sie unendlich viele verschiedene Approximationen von Ordnung t hat.

Sei nun α algebraisch. Wir wählen ein $P(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ von Grad d mit $P(\alpha) = 0$. Sei $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ein Intervall, das außer α keine weiteren Nullstellen von $P(X)$ enthält, für ein geeignetes $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $M \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt mit $|P'(x)| \leqslant M$ für $x \in I$.

(1) Sei $t \geqslant 1$. Zeigen Sie: Es gibt nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q}$ von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \notin I$. Hinweis: Begrenzen Sie den Wert von q.

(2) Zeigen Sie: $|P(\frac{p}{q})| \geqslant \frac{1}{q^d}$ für $\frac{p}{q} \in I$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Folgern Sie mit dem Mittelwertsatz, angewandt auf $P(x)$: $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{q^d M}$.

(3) Sei $t > d$. Zeigen Sie mit (2), dass es nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q}$ von α von Ordnung t gibt mit $\frac{p}{q} \in I$.

(4) Sei $t > d$. Folgern Sie aus (1) und (3): Es ist α nicht approximierbar von Ordnung t .

Lösung zu Aufgabe 21:

(1) Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine Approximation von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \notin I$. Dann $|\alpha - \frac{p}{q}| > \delta$, also $\frac{1}{q^t} \geq |\alpha - \frac{p}{q}| > \delta$ und $q^t < \frac{1}{\delta}$. Wir bekommen $q < \frac{1}{\sqrt[t]{\delta}}$. Es kann nur endlich viele $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $q < \frac{1}{\sqrt[t]{\delta}}$ geben. Nun fixieren wir eine solche q. Wenn die Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine Approximation von α von Ordnung t ist, haben wir $\frac{1}{q^t} \geq |\alpha - \frac{p}{q}|$, also $\frac{p}{q}$ ist im Intervall $[\alpha - \frac{1}{q^t}, \alpha + \frac{1}{q^t}]$ enthalten. Nehmen wir jetzt zwei verschiedene Approximationen $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q}$. Dann $|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q}| \geq \frac{1}{q}$, also kann es nur endlich viele verschiedene Approximationen $\frac{p}{q}$ von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \notin I$ für die vorgegebene q geben. Insgesamt gibt es nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q}$ von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \notin I$.

(2) Sei $P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Da $\frac{p}{q}$ keine Nullstelle von $P(X)$ ist (weil $\frac{p}{q} \in I$), bekommen wir

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \sum_{i=0}^d a_i \left(\frac{p}{q}\right)^i \right| = \left| \frac{a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} q + \cdots + a_0 q^d}{q^d} \right| \geq \frac{1}{q^d}.$$

Da $P(X)$ stetig ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz eine $c \in (\alpha, \frac{p}{q})$ (wenn $\frac{p}{q} > \alpha$) oder eine $c \in (\frac{p}{q}, \alpha)$ (wenn $\frac{p}{q} < \alpha$), so dass

$$|P'(c)| = \frac{|P(\frac{p}{q}) - P(\alpha)|}{|\frac{p}{q} - \alpha|} = \frac{|P(\frac{p}{q})|}{|\frac{p}{q} - \alpha|}.$$

Da $|P'(c)| \leq M$, bekommen wir

$$\frac{|P(\frac{p}{q})|}{|\frac{p}{q} - \alpha|} \leq M \text{ und } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geq \frac{|P(\frac{p}{q})|}{M}.$$

Zusammen mit $|P(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^d}$ liefert das: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d M}$.

(3) Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine Approximation von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \in I$ und $t > d$. Dann

$$\frac{1}{q^t} \geq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d M}.$$

Also $M \geq q^{t-d}$ und $\sqrt[t-d]{M} \geq q$. Es gibt nur endlich viele $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ so, dass $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine Approximation von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \in I$ sein kann. Wie im (1) bekommen wir, dass es nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \in I$ geben kann.

(4) Sei $t > d$. Nach (1) gibt es nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \notin I$. Nach (3) gibt es nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ von α von Ordnung t mit $\frac{p}{q} \in I$. Also gibt es nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ von α von Ordnung t, und α ist nicht approximierbar von Ordnung t.

Aufgabe 22 Sei $\alpha = [x_1, x_2, x_3, \ldots]$ ein unendlicher Kettenbruch, wobei $x_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $k \geqslant 1$. Wir verwenden die Standardbezeichnungen p_n , q_n .

(1) Zeigen Sie: Es ist $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{q_n^2}$ für $n \geqslant 2$.

(2) Folgern Sie aus (1): Jede irrationale Zahl ist von Ordnung 2 approximierbar.

Lösung zu Aufgabe 22:

(1) Nach der Vorlesung

$$[x_1, \ldots, x_n] = \frac{p_n}{q_n} = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k} \text{ und}$$

$$\alpha = [x_1, \ldots] = x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k}.$$

Also

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k} - x_1 - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Die letzte Abschätzung gilt für $n \geq 2$, da $(\frac{1}{q_{k-1}q_k})_{k\geq 2}$ eine monotone Nullfolge ist. Da $q_k = x_k q_{k-1} + q_{k-2}$ für $k > 1$ und $q_1 = 1$, haben wir $q_{n+1} > q_n$ für $n \geq 2$ und

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2} \text{ für } n \geq 2.$$

Das liefert die gewünschte Ungleichung.

(2) Da $(\frac{1}{q_{k-1}q_k})_{k>2}$ eine streng fallende Nullfolge ist, haben wir

$$\left|\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x_1 + \sum_{k=2}^{m}(-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k} - x_1 - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^k \frac{1}{q_{k-1}q_k}\right| \neq 0$$

für $m > n > 2$. Also gibt es unendlich viele verschiedene $\frac{p_n}{q_n}$ mit $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$ und α ist von Ordnung 2 approximierbar. Jede irrationale Zahl $\alpha > 0$ ist von Ordnung 2 approximierbar, da $\alpha = [x_1, x_2, \ldots]$ ein unendlicher Kettenbruch mit $x_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $k \geqslant 1$ ist. Wenn α approximierbar von Ordnung 2 ist, ist $-\alpha$ auch von Ordnung 2 approximierbar, also sind alle irrationalen Zahlen von Ordnung 2 approximierbar.

Aufgabe 23 Betrachten wir den Kettenbruch $\alpha = [x_1, x_2, x_3, \dots] = [10^{1!}, 10^{2!}, 10^{3!}, \dots]$. Wir verwenden Standardbezeichnungen p_n, q_n .

(1) Zeigen Sie: $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{10^{(n+1)!}}$ für $n \geqslant 2$.

(2) Zeigen Sie: $\frac{q_k}{q_{k-1}} \leqslant x_k + 1$ für $k \geqslant 2$.

Folgern Sie: $q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{q_2}{q_1} \leqslant 10^{n! \cdot 2}$ für $n \geqslant 2$.

(3) Folgern Sie aus (1) und (2): Für jedes $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ gilt: Es ist $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{q_n^t}$ für $n \geqslant 2t - 1$.

(4) Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 21: α ist transzendent.

Lösung zu Aufgabe 23:

(1) Wir haben $q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq x_n$ für $n \geq 2$. Wie in der Aufgabe 2 (1)

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{x_n x_{n+1}} = \frac{1}{10^{n!}10^{(n+1)!}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} \text{ für } n \geq 2.$$

(2) Aus $q_k = x_k q_{k-1} + q_{k-2}$ bekommen wir auch

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = x_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \leq x_k + 1 \text{ für } k \geq 2.$$

Die letzte Abschätzung folgt aus $q_k \leq q_{k+1}$ für $k \geq 0$. Dann

$$\begin{aligned} q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{q_2}{q_1} &\leqslant (x_n + 1)(x_{n-1} + 1) \cdot \dots \cdot (x_2 + 1) \\ &\leqslant (10^{n!} + 1)(10^{(n-1)!} + 1) \cdot \dots \cdot (10^{2!} + 1) \leqslant 10^{n! + (n-1)! + \dots + 2!} \end{aligned}$$

Da $n! + (n-1)! + \dots + 2! \leqslant n! + (n-1)! \cdot (n-2) \leqslant n! \cdot 2$, bekommen wir $q_n \leqslant 10^{n! \cdot 2}$ für $n \geqslant 2$.

(3) Aus $q_n \leqslant 10^{n! \cdot 2}$ bekommen wir $\frac{1}{q_n} \geqslant \frac{1}{10^{n! \cdot 2}}$. Nach dem Teil (1)

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{10^{(n+1)!}} \leqslant \frac{1}{10^{(n)!(n+1)}} \leqslant \frac{1}{10^{(n)!(2t)}} \leqslant \frac{1}{q_n^t} \text{ für } n \geq 2 \text{ und } n \geqslant 2t - 1.$$

(4) Fixieren wir eine beliebige $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Es gibt unendlich viele $n \geqslant 2t - 1$, also nach (3) gibt es unendlich viele Approximationen $\frac{p_n}{q_n}$ von α von Ordnung t, all diese Approximationen sind verschieden wie in der Aufgabe 22 (2). Folglich ist α von Ordnung t approximierbar. Da t beliebig war, ist α von einer beliebigen Ordnung approximierbar. Nach Aufgabe 21, wenn es ein Polynom $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ von Grad $d \geqslant 1$ mit $P(\alpha) = 0$ gäbe, wäre α nicht von Ordnung $t > d$ approximierbar (Wiederspruch). Also ist α transzendent.

Aufgabe 24 Stellen Sie die folgenden symmetrischen Polynome in $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen dar.

(1) $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

(2) $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 3X_1X_2X_3$

(3) $(X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3)$

(4) $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 - 2X_1^2X_2^2 - 2X_2^2X_3^2 - 2X_3^2X_1^2$

Lösung zu Aufgabe 24: Die elementarsymmetrischen Polynomen in $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ sind

$$\begin{aligned} s_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ s_2 &= X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 \\ s_3 &= X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

(1)

$$s_1^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2(X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3).$$

Also $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = s_1^2 - 2s_2$.

(2)

$$s_1^3 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^2 + 3(X_1X_2^2 + X_1X_3^2 + X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2X_3^2 + X_2^2X_3) + 6X_1X_2X_3,$$

$$s_1s_2 = (X_1X_2^2 + X_1X_3^2 + X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2X_3^2 + X_2^2X_3) + 3X_1X_2X_3.$$

Also $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 3X_1X_2X_3 = s_1^3 - 3s_1s_2$.

(3)

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) &= (X_1X_2^2 + X_1X_3^2 + X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2X_3^2 + X_2^2X_3) + 2X_1X_2X_3 \\ &= s_1s_2 - s_3. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} s_1^4 = X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 &+ 4(X_1X_2^3 + X_1X_3^3 + X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_2X_3^3 + X_2^3X_3) \\ &+ 6(X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2) + 12(X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2X_3^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1^2s_2 = &(X_1X_2^3 + X_1X_3^3 + X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_2X_3^3 + X_2^3X_3) + 2(X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2) \\ &+ 5(X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2X_3^2). \end{aligned}$$

$$s_1s_3 = X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2X_3^2.$$

Also $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 - 2X_1^2X_2^2 - 2X_2^2X_3^2 - 2X_3^2X_1^2 = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 8s_1s_3$.