A. Zvonareva, M. Künzer

Schulmathematik, SoSe 22

# Lösung 4

**Aufgabe 13** Bestimmen Sie die Werte der folgenden Kettenbrüche.

(1) $[\,\overline{3}\,]$

(2) $[\,\overline{1,4,2}\,]$

(3) $[\,\overline{1,1,2,2}\,]$

*Lösung zu Aufgabe 13:*

(1)
$$[\,\overline{3}\,] = \frac{1}{2}\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+4}\right) = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3^2+4}\right) = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{13}\right).$$

(2) Für den Kettenbruch $[\,\overline{1,4,2}\,]$ haben wir:

$$p_2 = x_2x_1 + 1 = 4+1 = 5,\ p_3 = x_3x_2x_1 + x_3 + x_1 = 2\cdot 4 + 2 + 1 = 11,$$

$$q_2 = x_2 = 4 \text{ und } q_3 = x_3x_2 + 1 = 2\cdot 4 + 1 = 9.$$

$$\begin{aligned}[\,\overline{1,4,2}\,] &= \frac{1}{2q_3}\left((p_3-q_2)+\sqrt{(p_3-q_2)^2+4q_3p_2}\right) = \frac{1}{2\cdot 9}\left((11-4)+\sqrt{(11-4)^2+4\cdot 9\cdot 5}\right)\\ &= \frac{1}{18}\left(7+\sqrt{49+180}\right) = \frac{1}{18}\left(7+\sqrt{229}\right).\end{aligned}$$

(3) Für den Kettenbruch $[\,\overline{1,1,2,2}\,]$ haben wir:

$$p_3 = x_3x_2x_1 + x_3 + x_1 = 5,\ p_4 = x_4x_3x_2x_1 + x_4x_3 + x_4x_1 + x_2x_1 + 1 = 12,$$

$$q_3 = x_3x_2 + 1 = 3 \text{ und } q_4 = x_4x_3x_2 + x_4 + x_2 = 7.$$

$$\begin{aligned}[\,\overline{1,1,2,2}\,] &= \frac{1}{2q_4}\left((p_4-q_3)+\sqrt{(p_4-q_3)^2+4q_4p_3}\right) = \frac{1}{2\cdot 7}\left((12-3)+\sqrt{(12-3)^2+4\cdot 7\cdot 5}\right)\\ &= \frac{1}{14}\left(9+\sqrt{81+140}\right) = \frac{1}{14}\left(9+\sqrt{221}\right).\end{aligned}$$

**Aufgabe 14**

(1) Entwickeln Sie $\frac{1}{1+x}$ für $x \in (-1,+1)$ in eine Potenzreihe vermittels der geometrischen Reihe. Integrieren Sie dies zu einer Potenzreihenentwicklung der Form

$$\ln(x+1) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

für $x \in (-1,+1)$, wobei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \geqslant 0$.

Begründen Sie mit dem Abelschen Grenzwertsatz: Diese Gleichheit gilt auch für $x = +1$.

(2) Bestimmen Sie mit dem Satz von Euler eine verallgemeinerte Kettenbruchentwicklung für $\ln(x+1)$, die für $x \in (-1,+1]$ konvergiert.

(3) Bestimmen Sie insbesondere eine verallgemeinerte Kettenbruchentwicklung für $\ln(2)$.

*Lösung zu Aufgabe 14:*

(1)

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ für } x \in (-1,1).$$

$$\int \frac{1}{1+x}\, dx = \ln(1+x) + c \text{ für } c \in \mathbb{R}, x \in (-1,1).$$

$$\int \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots)\, dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + c'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c' \text{ für } c' \in \mathbb{R}, x \in (-1,1).$$

Für $x = 0$ erhalten wir $\ln(1) + c = 0 + c'$, also können wir $c = c' = 0$ nehmen, und damit erhalten wir:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ für } x \in (-1,1).$$

Diese Reihe konvergiert für $x \in (-1,1)$. Sie konvergiert auch noch für $x = 1$ nach Leibniz. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist die Reihe linksseitig stetig in $x = 1$. Da auch der $\ln(1+x)$ dort stetig ist, folgt es, dass die Reihe für $x = 1$ gegen $\ln 2$ konvergiert.

(2) Anders geschrieben, ist es

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = x + x\left(-\frac{x}{2}\right) + x\left(-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{2x}{3}\right) + x\left(-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{2x}{3}\right)\left(-\frac{3x}{4}\right) + \dots$$

Nach dem Satz von Euler bekommen wir:

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{-\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2} - \cfrac{-\frac{2x}{3}}{1 - \frac{2x}{3} - \cfrac{-\frac{3x}{4}}{\dots}}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{\dots}}}}.$$

(3) Für $x = 1$ insbesondere bekommen wir:

$$\ln(2) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{\dots}}}}.$$

**Aufgabe 15** (Pellsche Gleichung)

(1) Sei $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ kein Quadrat einer ganzen Zahl.

Seien $x_1,\ x_2,\ x_3\ \in\ \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ mit $\sqrt{d} = [x_1, \overline{x_2, x_3}]$ gegeben.

Seien $p_j$ und $q_j$ für $j \geqslant -1$ bezüglich dieses Kettenbruchs gebildet.

Aus $\sqrt{d} = [x_1, x_2, x_3, [\overline{x_2, x_3}]]$ folgern Sie: $\sqrt{d} = \frac{[\overline{x_2,x_3}]p_3+p_2}{[\overline{x_2,x_3}]q_3+q_2}$ .

Verwenden Sie $[\overline{x_2, x_3}] = (\sqrt{d} - x_1)^{-1}$, um $\sqrt{d} = \frac{p_3+p_2(\sqrt{d}-x_1)}{q_3+q_2(\sqrt{d}-x_1)}$ zu erhalten.

Schließen Sie mit Koeffizientenvergleich bei $\sqrt{d}$ und bei 1 auf $p_2^2 - dq_2^2 = 1$.

Mit anderen Worten, $(x, y) = (p_2, q_2)$ löst die Pellsche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$.

(2) Berechnen Sie $[2, \overline{2, 4}]$. Verwenden Sie dies, um $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 - 6y^2 = 1$ zu finden.

*Lösung zu Aufgabe 15:*

(1) Wenn wir $\sqrt{d} = [x_1, x_2, x_3, [\overline{x_2, x_3}]]$ als endlichen Kettenbruch betrachten, bekommen wir:

$$\sqrt{d} = [x_1, x_2, x_3, [\overline{x_2, x_3}]] = \frac{p_4}{q_4} = \frac{x_4 p_3 + p_2}{x_4 q_3 + q_2} = \frac{[\overline{x_2, x_3}]p_3 + p_2}{[\overline{x_2, x_3}]q_3 + q_2}.$$

Hier $p_4$ und $q_4$ sind formale Kennzeichnungen; $p_2$, $p_3$, $q_2$ und $q_3$ sind für die Brüche $[x_1, x_2, x_3, [\overline{x_2, x_3}]]$ und $[x_1, x_2, x_3, x_2, x_3, \dots]$ gleich und können berechnet werden.

Aus $\sqrt{d} = x_1 + \frac{1}{[\overline{x_2,x_3}]}$ bekommen wir $[\overline{x_2, x_3}] = \frac{1}{\sqrt{d}-x_1}$ und damit

$$\sqrt{d} = \frac{[\overline{x_2, x_3}]p_3 + p_2}{[\overline{x_2, x_3}]q_3 + q_2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{d}-x_1}\right) \cdot p_3 + p_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{d}-x_1}\right) \cdot q_3 + q_2} = \frac{p_3 + p_2(\sqrt{d} - x_1)}{q_3 + q_2(\sqrt{d} - x_1)}.$$

Also:

$\sqrt{d}(q_3 + q_2(\sqrt{d} - x_1)) = p_3 + p_2(\sqrt{d} - x_1)$ und $\sqrt{d}q_3 + dq_2 - \sqrt{d}q_2 x_1 = p_3 + p_2\sqrt{d} - x_1 p_2$.

Da $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ kein Quadrat einer ganzen Zahl ist, ergibt der Koeffizientenvergleich:

$$q_3 - q_2 x_1 = p_2 \text{ und } dq_2 = p_3 - x_1 p_2.$$

Die zweite Gleichung ergibt:

$$x_1 = \frac{p_3 - dq_2}{p_2} \text{ und dann } q_3 - q_2 \frac{p_3 - dq_2}{p_2} = p_2.$$

Nach dem Multiplizieren mit $p_2$ bekommen wir $q_3 p_2 - q_2 p_3 + dq_2^2 = p_2^2$.

Und $p_2^2 - dq_2^2 = q_3 p_2 - q_2 p_3 = -(-1)^3 = 1$ wie gewünscht (siehe Seite 28 im Skript).

(2)

$$[\overline{2, 4}] = \frac{1}{2x_2}\left(x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2}\right) = \frac{1}{8}\left(8 + \sqrt{4^2 \cdot 6}\right) = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}.$$

Damit

$$[2, \overline{2, 4}] = 2 + \frac{1}{[\overline{2, 4}]} = 2 + \frac{1}{\frac{2+\sqrt{6}}{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{6} + 2}{2 + \sqrt{6}} = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{6} - 2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}.$$

Berechnen wir $p_2 = x_2 x_1 + 1 = 5$ und $q_2 = x_2 = 2$ für $[2, \overline{2, 4}]$. Damit $x = 5$ und $y = 2$ erfühlen die Gleichung $x^2 - 6y^2 = 1$.

**Aufgabe 16** Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_z(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

(1) $z = 3 + \sqrt{5}$

(2) $z = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}$

*Lösung zu Aufgabe 16:*

(1) Berechnen wir

$$z^2 = (3 + \sqrt{5})^2 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = 14 + 6\sqrt{5}.$$

Daraus folgt:

$z^2 - 6z = 14 + 6\sqrt{5} - 18 - 6\sqrt{5} = -4$, und $z$ ist eine Nullstelle von Polynom $X^2 - 6X + 4$.

Das ist das Minimalpolynom von $3 + \sqrt{5}$, da $\sqrt{5}$ irrational ist, und wenn $z$ eine Nullstelle von $a + bX$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und $b \neq 0$ wäre, wäre $\sqrt{5} = -\frac{a+3b}{b}$ auch rational.

(2) Berechnen wir

$$z^2 = (\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{6} - 3 = 1 + 2\mathrm{i}\sqrt{6};$$
$$z^3 = (\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 + 2\mathrm{i}\sqrt{6}) = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3} + 4\mathrm{i}\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = -5\sqrt{2} + 5\mathrm{i}\sqrt{3};$$
$$z^4 = (1 + 2\mathrm{i}\sqrt{6})^2 = 1 + 4\mathrm{i}\sqrt{6} - 24 = -23 + 4\mathrm{i}\sqrt{6};$$

Daraus folgt:

$z^4 - 2z^2 = -23 + 4\mathrm{i}\sqrt{6} - 2 - 4\mathrm{i}\sqrt{6} = -25$, und $z$ ist eine Nullstelle von Polynom $X^4 - 2X^2 + 25$.

Uberprüfen wir, dass $z$ eine Nullstelle eines Polynoms $f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(X) \neq 0$ nicht sein kann, und zeigen wir damit, dass $X^4 - 2X^2 + 25$ das Minimalpolynom von $z$ ist. Nehmen wir an, dass $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Dann

$$a(-5\sqrt{2} + 5\mathrm{i}\sqrt{3}) + b(1 + 2\mathrm{i}\sqrt{6}) + c(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}) + d = 0$$

Da i und 1 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, erhalten wir:

$$-5a\sqrt{2} + b + c\sqrt{2} + d = 0 \text{ und } 5a\sqrt{3} + 2b\sqrt{6} + c\sqrt{3} = 0.$$

Die zweite Gleichung ergibt: $5a + 2b\sqrt{2} + c = 0$, damit $b = 0$ und $5a + c = 0$. Die erste Gleichung ergibt: $-5a\sqrt{2} + c\sqrt{2} + d = 0$, damit $d = 0$ und $-5a + c = 0$. Die Gleichungen $5a + c = 0$ und $-5a + c = 0$ ergeben $a = 0$ und $c = 0$. Also sind $1, z, z^2$ und $z^3$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, und es gibt kein nichtnulliges Polynom von Grad $\leq 3$ so, dass $z$ eine Nullstelle davon ist.