A. Zvonareva, M. Künzer

Schulmathematik, SoSe 22

Lösung 3

Aufgabe 9

(1) Sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(0)$ und $f(1)$ ungerade. Zeigen Sie: $f(X)$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{Z}$.

(2) Sei $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ nichtkonstant.
Man zeige: Es gibt $x, y \in \mathbb{C}$ mit $f(x,y) = 0$.

(3) Sei $f(X) \in \mathbb{C}[X]$, $f(X)$ nicht Nullpolynom. Zeigen Sie: $f(X)$ hat eine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $f(X)$ und $f'(X)$ eine gemeinsame Nullstelle haben.

Lösung zu Aufgabe 9:

(1) Sei $f(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Da $f(0)$ ungerade ist, ist a_0 auch ungerade. Da $f(1)$ ungerade ist, ist $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \sum\limits_{a_i \text{ ungerade}} a_i + \sum\limits_{a_i \text{ gerade}} a_i$ auch ungerade. Das heißt: Die Anzahl von underagen a_i ist underage.

Sei $c \in \mathbb{Z}$ gerade, so ist $f(c) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i c^i = a_0 + c\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c^{i-1}\right)$ ungerade, also $f(c) \neq 0$.

Sei $c \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist $f(c) = \sum\limits_{a_i \text{ ungerade}} a_i c^i + \sum\limits_{a_i \text{ gerade}} a_i c^i$ ungerade, da $\sum\limits_{a_i \text{ gerade}} a_i c^i$ gerade ist und $A = \sum\limits_{a_i \text{ ungerade}} a_i c^i$ underade ist, denn A ist die Summe der ungeraden Anzahl der ungeraden Summanden. Deshalb haben wir in diesem Fall auch $f(c) \neq 0$.

Schließlich hat $f(X)$ keine Nullstellen in $\mathbb{Z}$.

(2) Das Polynom $f(X,Y)$ ist nichtkonstant, deshalb ist der Grad von $f(X,Y)$ bezüglich X oder bezüglich Y größer als 0. Nehmen wir an, dass der Grad von $f(X,Y)$ bezüglich X größer als 0 ist. Schreiben wir $f(X) = \sum_{i=0}^{n} f_i(Y)X^i$ mit $f_i(Y) \in \mathbb{C}[Y]$, $f_n(Y) \neq 0$, $n \geq 1$. Das Polynom $f_n(Y)$ hat nach der Fundamentalsatz der Algebra endlich viele Nullstellen (oder ist $f_n(Y)$ konstant und hat keine Nullstellen). Wehlen wir y_0 so, dass $f_n(y_0) \neq 0$. Betrachten wir das Polynom $f(X, y_0) \in \mathbb{C}[X]$. Dieses Polynom ist nichtkonstant. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $f(X, y_0)$ eine Nullstelle x. Wir haben x und $y = y_0$ gefunden so, dass $f(x, y_0) = 0$.

Den Fall, wenn der Grad von $f(X,Y)$ bezüglich X gleich 0 ist, behandelt man analog.

(3) Das Polynom $f(X) \neq 0$ hat eine mehrfache Nullstelle a genau dann, wenn

$$f(X) = (X-a)^2 g(X),$$

wobei $a \in \mathbb{C}, g(X) \in \mathbb{C}[X]$. Dann

$$f'(X) = 2(X-a)g(X) + (X-a)^2 g'(X) \text{ und } f'(a) = 0.$$

Das heißt: $f(X)$ und $f'(X)$ haben eine gemeinsame Nullstelle a.

Umgekehrt: Nehmen wir an, dass $f(X)$ und $f'(X)$ eine gemeinsame Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ haben. Nehmen wir auch an, dass a keine mehrfache Nullstelle von $f(X)$ ist. Da $f(X)$ kein Nullpolynom ist, können wir $f(X) = (X-a)g(X)$ schreiben mit $g(X) \in \mathbb{C}[X], g(a) \neq 0$. Wir bekommen $f'(X) = g(X) + (X-a)g'(X)$ und $f'(a) = g(a) \neq 0$. Das ist ein Wiederspruch, also a eine mehrfache Nullstelle von $f(X)$ ist.

Aufgabe 10 (Sturmsche Regel) Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen in $\mathbb{C}$, $f(X)$ nichtkonstant. Die Sturmsche Kette von $f(X)$ ist die folgende endliche Folge von Polynomen

$$p_0(X), p_1(X), \ldots, p_k(X),$$

wobei der Grad dieser Polynome streng monoton abnimmt und $p_k(X) \neq 0$ konstant ist:

$$\begin{aligned} p_0(X) &:= f(X) \\ p_1(X) &:= f'(X) \\ p_i(X) &:= -r(p_{i-2}, p_{i-1})(X), \quad \text{wobei } r(p_{i-2}, p_{i-1})(X) \text{ den Rest bei der} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Polynomdivision von } p_{i-2}(X) \text{ durch } p_{i-1}(X) \text{ bezeichnet.} \end{aligned}$$

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\sigma(c)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $p_0(c), p_1(c), \ldots, p_k(c)$.

(1) Zeigen Sie: Die Kette $p_0(X), p_1(X), \ldots, p_k(X)$ existiert mit den angegebenen Eigenschaften.

(2) Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $p_i(X)$ mit $0 < i < k$, so ist $p_{i-1}(a) \neq 0$, $p_{i+1}(a) \neq 0$, und die Vorzeichen von $p_{i-1}(a)$ und $p_{i+1}(a)$ sind verschieden.

(3) Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $p_i(a) \neq 0, p_i(b) \neq 0$ für $0 \leq i \leq k$. Zeigen Sie: $f(X) = p_0(X)$ hat $\sigma(a) - \sigma(b)$ verschiedene Nullstellen in (a, b).

(4) Begründen Sie, dass wir die Anzahl der reellen Nullstellen von $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ damit bestimmen können.

Lösung zu Aufgabe 10:

(1) Bezeichnen wir den Grad des Polynoms $h(X) \in \mathbb{R}[X]$ durch $\deg(h)$. Da $f(X)$ nichtkonstant ist, $\deg(p_1) = \deg(f') < \deg(f) = \deg(p_0)$. Für $i > 1$ ist $\deg(p_i) = \deg(r(p_{i-2}, p_{i-1})) < \deg(p_{i-1})$ nach der Polynomdivision mit Rest. Deshalb nehmen die Grade der Polynome $p_0(X), p_1(X), \ldots, p_i(X), \ldots$ streng monoton ab, bis $p_k(X)$ konstant ist. Dieser Prozess ist endlich, da $\deg(f) < \infty$.

Wenn $\deg(f) = 1$, ist $p_k(X) = p_1(X) \neq 0$. Für $k > 1$ nehmen wir an, dass $p_k(X) = 0$. Nach der Konstruktion von $p_k(X)$ ist $\deg(p_{k-1}) > 0$, d.h. ist $p_{k-1}(X)$ kein Nullpolynom, und wir erhalten:

$$p_{k-2}(X) = p_{k-1}(X)h(X)$$

mit $h(X) \in \mathbb{R}[X]$. Das heißt: $p_{k-1}(X)$ teilt $p_{k-2}(X)$. Für $i < k$ gilt es: Teilt $p_{k-1}(X)$ beide $p_i(X)$ und $p_{i-1}(X)$, teilt $p_{k-1}(X)$ auch $p_{i-2}(X)$. Das folgt aus der folgenden Formel:

$$p_{i-2}(X) = p_{i-1}(X)h'(X) - p_i(X) \text{ für einige } h'(X) \in \mathbb{R}[X].$$

Nach der Induktion erhalten wir, dass $p_{k-1}(X)$ beide $p_0(X)$ und $p_1(X)$ teilt. Da $\deg(p_{k-1}) > 0$, hat $p_{k-1}(X)$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Diese Nullstelle ist eine gemeinsame Nullstelle von $f(X)$ and $f'(X)$, also nach Aufgabe 9 (c) haben wir ein Wiederspruch. Folglich $p_k(X) \neq 0$.

(2) Nach der Konstruktion gilt es für $0 < i < k$

$$p_{i-1}(X) = p_i(X)h(X) - p_{i+1}(X) \text{ für einige } h(X) \in \mathbb{R}[X].$$

Wenn a eine Nullstelle von $p_{i-1}(X)$ oder $p_{i+1}(X)$ ist, haben zwei aufeinanderfolgenden Polynome aus der Kette denselben Teiler $(X - a)$. Mit der gleichen Induktion wie in der Teilaufgabe (1) erhalten wir, dass a gleichzeitig eine Nullstelle von $p_0(X)$ und $p_1(X)$ ist, was einen Wiederspruch liefert. Also $p_{i+1}(a) \neq 0$ und $p_{i-1}(a) \neq 0$. Zudem $p_{i-1}(a) = p_i(a)h(a) - p_{i+1}(a)$, also $p_{i-1}(a) = -p_{i+1}(a)$.

(3) Betrachten wir die Funktion $\sigma(a)-\sigma(x)$ für $x \in [a,b]$. Da die Polynome $p_0(X),\dots,p_k(X)$ stetig sind, und da $p_i(a) \neq 0$ für $i=0,\dots,k$, ist die Funktion $\sigma(a)-\sigma(x)$ in einer Umgegung von a gleich Null. Die Funktion $\sigma(x_0)-\sigma(x_1)$ ist gleich 0, wenn das Intervall $[x_0,x_1] \subset [a,b]$ keine Nullstellen von $p_i(X)$ für $i=0,\dots,k$ enthält. Betrachten wir, was passiert, wenn das Intervall $[x_0,x_1] \subset [a,b]$ eine Nullstelle c von $p_l(X)$ für eine bestimmte $l=0,\dots,k$ enthält. Wir können annehmen, dass $p_i(x_0) \neq 0$ und $p_i(x_1) \neq 0$ für alle $i=0,\dots,k$ und, dass c die einzige Nullstelle von $p_i(X)$ für $i=0,\dots,k$ im Intervall $[x_0,x_1]$ ist.

Wenn c eine Nullstelle von $p_l(X)$ für $l=1,\dots,k-1$ ist, ist sie nach der Teilaufgabe (2) keine Nullstelle von $p_{l-1}(X)$ oder $p_{l+1}(X)$. Außerdem haben $p_{l-1}(c)$ und $p_{l+1}(c)$ verschiedene Vorzeichen. Die Vorzeichen von $p_{l-1}(X)$ und $p_{l+1}(X)$ sind auf dem Intervall $[x_0,x_1]$ konstant und verschieden, z.B. $+,-$. Unabhängig vom Vorzeichen von $p_l(X)$ hat die Folge $p_{l-1}(X), p_l(X), p_{l+1}(X)$ im x_0 oder im x_1 genau einen Vorzeichenwechsel: Die Vorzeichen von $p_{l-1}(X), p_l(X), p_{l+1}(X)$ sind $+,+,-$ im x_0 und $+,-,-$ im x_1 (oder umgekehrt). Dass heißt $\sigma(x_0)-\sigma(x_1)=0$ Also: Eine Nullstelle von $p_i(X)$ für $i=1,\dots,k-1$ leistet keinen Beitrag zur $\sigma(a)-\sigma(b)$.

Wenn c eine Nullstelle von $f(X)=p_0(X)$ ist, wechselt $p_0(X)$ das Vorzeichen in c ($f(X)$ hat keine mehrfache Nullstelle). Wenn das Vorzeichen von $-$ auf $+$ gewechselt wird, steigt $f(X)$, und das Vorzeichen von $p_1(X)$ ist $+$. Also haben $p_0(x_0), p_1(x_0)$ die Vorzeichen $-,+$ und $p_0(x_1), p_1(x_1)$ haben die Vorzeichen $+,+$, d.h. $\sigma(x_0)-\sigma(x_1)=1-0=1$. Wenn $f(X)$ das Vorzeichen von $+$ auf $-$ wechselt, ist sie eine fallende Funktion, und das Vorzeichen von $p_1(X)$ ist $-$. Also: $p_0(x_0), p_1(x_0)$ haben Vorzeichen $+,-$ und $p_0(x_1), p_1(x_1)$ haben Vorzeichen $-,-$, d.h. $\sigma(x_0)-\sigma(x_1)=1-0=1$.

Insgesamt leisten die Nullstellen von $p_i(X)$ für $i=1,\dots,k$ keinen Beitrag zu $\sigma(a)-\sigma(b)$ ($p_k(X)$ hat keine Nullstellen). Der Beitrag jeder Nullstelle von $f(X)$ ist genau 1. Also: $f(X)$ hat $\sigma(a)-\sigma(b)$ verschiedene Nullstellen in (a,b).

(4) Die Polynome $p_0(X),\dots,p_k(X)$ haben endlich viele Nullstellen, und alle Nullstellen sind im irgendeinem Intervall (a,b) enthalten. Die Vorzeichen von $p_0(X),\dots,p_k(X)$ sind sowohl im Intervall $(-\infty,a]$ als auch im Intervall $[b,+\infty)$ konstant, also können wir die Vorzeichen von $p_0(X),\dots,p_k(X)$ für $X\to-\infty$ anstatt $X=a$ bestimmen und für $X\to+\infty$ anstatt $X=b$ bestimmen.

Aufgabe 11 Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen des Polynoms
$$f(X)=2X^5-10X^3+10X-3 \;\in\; \mathbb{R}[X]$$
unter Verwendung der Sturmschen Regel.

Lösung zu Aufgabe 11: Versuchen wir die Schturmsche Kette zu konstruiren:
$p_0(X)=f(X)=2X^5-10X^3+10X-3$,
$p_1(X)=f'(X)=10X^4-30X^2+10$,

$$\begin{array}{rrrr|l} 2X^5 & -10X^3 & +10X & -3 & 10X^4-30X^2+10 \\ \hline -2X^5 & +6X^3 & -2X & & \frac{1}{5}X \\ \hline & -4X^3 & +8X & -3 & \end{array}$$

$p_2(X)=4X^3-8X+3$,

$$\begin{array}{rrrr|l} 10X^4 & -30X^2 & & +10 & 4X^3-8X+3 \\ \hline -10X^4 & +20X^2 & -\frac{15}{2}X & & \frac{5}{2}X \\ \hline & -10X^2 & -\frac{15}{2}X & +10 & \end{array}$$

$p_3(X) = 10X^2 + \frac{15}{2}X - 10$,

$$\begin{array}{rcl|l}
4X^3 & & -\,8X + 3 & 10X^2 + \frac{15}{2}X - 10 \\ \cline{4-4}
-\,4X^3 - 3X^2 & + 4X & & \frac{2}{5}X - \frac{3}{10} \\ \cline{1-2}
& -\,3X^2 - 4X + 3 & & \\
& 3X^2 + \frac{9}{4}X - 3 & & \\ \cline{2-2}
& -\,\frac{7}{4}X & &
\end{array}$$

$p_4(X) = \frac{7}{4}X$,

$$\begin{array}{rl|l}
10X^2 + \frac{15}{2}X - 10 & & \frac{7}{4}X \\ \cline{3-3}
-\,10X^2 & & \frac{40}{7}X + \frac{30}{7} \\ \cline{1-1}
\frac{15}{2}X & & \\
-\,\frac{15}{2}X & & \\ \cline{1-1}
-\,10 & &
\end{array}$$

$p_5(X) = 10$.
Wir haben $p_5(X) = 10$ erreicht. Das bedeutet, dass der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(f, f')$ von $f(X)$ und $f'(X)$ gleich 1 ist, da $\mathrm{ggT}(f, f')$ alle Polynome $p_i(X)$, $i = 0, 1, \ldots, 5$ teilt. Also hat $f(X)$ keine mehrfache Nullstelle, und wir haben die Schturmsche Kette mit $k = 5$ konstruirt.
Für $X \to -\infty$ bekommen wir die folgende Folge der Vorzeichen

$$\begin{array}{cccccc}
p_0(X) & p_1(X) & p_2(X) & p_3(X) & p_4(X) & p_5(X) \\
- & + & - & + & - & +
\end{array}$$

Für $X \to +\infty$ bekommen wir die folgende Folge der Vorzeichen

$$\begin{array}{cccccc}
p_0(X) & p_1(X) & p_2(X) & p_3(X) & p_4(X) & p_5(X) \\
+ & + & + & + & + & +
\end{array}$$

Also $\sigma(a) - \sigma(b) = 5$ für $a \to -\infty$ und $b \to +\infty$. Das Polynom $f(X)$ hat 5 verschiedene reele Nullstellen.

Aufgabe 12

(1) Bestimmen Sie experimentell den Beginn der Kettenbruchentwicklung von $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$.
Stellen Sie eine Vermutung zu dieser Kettenbruchentwicklung auf.

(2) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{11}$.

(3) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{27}$.

Lösung zu Aufgabe 12:

(1)

$$\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1} = 2.16395\cdots = 2+0.16395\cdots = 2+\frac{1}{\frac{1}{0.16395\ldots}} = 2+\frac{1}{6.09929\ldots} = 2+\frac{1}{6+0.09929\ldots}$$

$$= 2+\frac{1}{6+\frac{1}{\frac{1}{0.09929\ldots}}} = 2+\frac{1}{6+\frac{1}{10.07114\ldots}} = 2+\frac{1}{6+\frac{1}{10+0.07114\ldots}} = 2+\frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{\cdots}}}.$$

Vermutung: $\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1} = [2, 6, 10, 14, \ldots, x_n, \ldots]$ mit $x_n = 2 + 4(n-1)$.

(2)

$$\sqrt{11} = 3 + (\sqrt{11} - 3) = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{11} - 3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{11} - 3} = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} \cdot \frac{\sqrt{11} + 3}{\sqrt{11} + 3} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{11} - 3}{2}$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{11} - 3}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{\sqrt{11} - 3}{2}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{11} - 3}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{11} - 3} = 6 + (\sqrt{11} - 3)$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{11} - 3}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + (\sqrt{11} - 3)}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt{11} - 3)}}}}$$

Also $\frac{1}{\sqrt{11} - 3} = [3, 6, \frac{1}{\sqrt{11} - 3}] = [\overline{3, 6}]$ und $\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}]$.

(3)

$$\sqrt{27} = 5 + (\sqrt{27} - 5) = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{27} - 5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{27} - 5} = \frac{1}{\sqrt{27} - 5} \cdot \frac{\sqrt{27} + 5}{\sqrt{27} + 5} = \frac{\sqrt{27} + 5}{2} = 5 + \frac{\sqrt{27} - 5}{2}$$

$$\sqrt{27} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{27} - 5}} = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{\sqrt{27} - 5}{2}} = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{27} - 5}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{27} - 5} = 10 + (\sqrt{27} - 5)$$

$$\sqrt{27} = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{27} - 5}}} = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + (\sqrt{27} - 5)}} = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt{27} - 5)}}}}$$

Also $\frac{1}{\sqrt{27} - 5} = [5, 10, \frac{1}{\sqrt{27} - 5}] = [\overline{5, 10}]$ und $\sqrt{27} = [5, \overline{5, 10}]$.