A. Zvonareva, M. Künzer

Schulmathematik, SoSe 22

Lösung 2

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die Diskriminante von $f(X)$.
Bestimmen Sie damit die Nullstellen in $\mathbb{C}$ des Polynoms $f(X)$.

(1) $f(X) = X^3 - 3X - 4$.

(2) $f(X) = X^3 + 3X - 2\mathrm{i}$.

Lösung zu Aufgabe 5:

(1)
$$\Delta = -4c^3 - 27d^2 = -4(-3)^3 - 27(-4)^2 = -27(-4+16) = -27 \cdot 12 = -324.$$

Somit gilt

$$-\frac{\Delta}{27} = 12, w = 2\sqrt{3} \text{ und } t_1 = \frac{1}{2}(-d+w) = \frac{1}{2}(4+2\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}.$$

Eine 3-te Wurzel von t_1 ist gleich

$$u = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}.$$

Folglich:

$$v = -\frac{c}{3u} = \frac{3}{3\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}.$$

Mit $\zeta_3 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ erhalten wir die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms $f(X)$:

$$u+v, u\zeta + v\zeta^2 \text{ und } u\zeta^2 + v\zeta.$$

(2)
$$\Delta = -4c^3 - 27d^2 = -4 \cdot 3^3 - 27(-2\mathrm{i})^2 = -27(4-4) = 0.$$

Wir setzen

$$u = \frac{3d}{2c} = \frac{3(-2\mathrm{i})}{2 \cdot 3} = -\mathrm{i}$$

und erhalten damit die Nullstellen von $f(X)$:

$$2u = -2\mathrm{i}, -u = \mathrm{i}.$$

Dabei ist $-2\mathrm{i}$ eine einfache Nullstelle und i eine doppelte Nullstelle.

Aufgabe 6

(1) Verwenden Sie ein Additionstheorem, um $\cos(\frac{\pi}{4}) = 2\cos(\frac{\pi}{8})^2 - 1$ zu bestätigen.
Berechnen Sie damit die 2-ten Wurzeln von $-1+\mathrm{i}$ und von $-1-\mathrm{i}$.
Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 5$.

(2) Bestimmen Sie eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - 4X^2 - 4X - 1$.

Lösung zu Aufgabe 6:

(1) Nach Additionstheorem $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ bekommt man, dass $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = 2\cos(\alpha)^2 - 1$. Daraus folgt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 1.$$

Da $\frac{\pi}{8}$ im ersten Quadrant liegt, erhalten wir, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}};\ \ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

Für $-1+\mathrm{i}$ gilt es:

$$-1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Die 2-ten Wurzeln von $-1+\mathrm{i}$ sind

$$\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right).$$

Dazu gilt es:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \ \text{ und } \ \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

D.h. sind die 2-ten Wurzeln von $-1+\mathrm{i}$ gleich

$$\pm\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).$$

Für $-1-\mathrm{i}$ gilt es:

$$-1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Die 2-ten Wurzeln von $-1+\mathrm{i}$ sind

$$\begin{aligned}\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right) &= \pm\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}\right)\\ &= \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).\end{aligned}$$

Nun machen wir die Substitution $X = Y - \frac{b}{4} = Y - 1$:

$$\begin{aligned}f(Y-1) &= Y^4 + Y^2\left(-\frac{3}{8}b^2+c\right) + Y\left(\frac{1}{8}b^3-\frac{1}{2}bc+d\right) + \left(-\frac{3}{256}b^4+\frac{1}{16}b^2c-\frac{1}{4}bd+e\right)\\ &= Y^4+2Y^2+2.\end{aligned}$$

Mit $T = Y^2$ bekommen wir die Nullstellen $t_{1,2} = \frac{-2\pm 2\mathrm{i}}{2} = -1\pm\mathrm{i}$ des Polynoms T^2+2T+2. Die Nullstellen des Polynoms Y^4+2Y^2+2 sind somit die 2-ten Wurzeln von $-1\pm\mathrm{i}$, die wir schon früher gefunden haben. Nach der Rücksubstitution erhält man die Nullstellen von $f(X)$:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)-1 \text{ und } \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)-1.$$

(2) Wählen wir $t \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$\begin{aligned}-8t^3+4ct^2+8et+(d^2-4ce) &= -8t^3+4(-4)t^2+8(-1)t+((-4)^2-4(-4)(-1))\\ &-8t^3-16t^2-8t=0.\end{aligned}$$

Beispielsweise nehmen wir die Wurzel $t=0$. Wählen wir eine zweite Wurzel w von $2t-c=4$. Also, $w=\pm 2$. Bestimmen wir z derart, dass

$$z^2+t = w\left(z-\frac{d}{2(2t-c)}\right).$$

Folglich:

$$z^2 = \pm 2\left(z-\frac{-4}{2\cdot 4}\right) = \pm(2z+1).$$

Die erste Gleichung $z^2-2z-1=0$ ergibt $z_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. Die zweite Gleichung $z^2+2z+1=0$ ergibt $z_3=-1$. Damit sind $1\pm\sqrt{2}$ und -1 die Nullstellen des Polynoms $f(X)$.

Aufgabe 7

(1) Sei $g(t)=t^3+\frac{5}{2}t^2-3t-8$. Berechnen Sie $\dfrac{g(t)}{t+2}$ mittels Polynomdivision.

(2) Sei $f(X)=X^4-5X^2-2X+3$. Bestimmen Sie eine Nullstelle von $f(X)$ in $\mathbb{C}$. Das Polynom in (1) kann dabei helfen.

Lösung zu Aufgabe 7:

(1) Bezeichnen wir $x=t$; mit Polynomdivision bekommen wir:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-8 & x+2 \\ \hline -&x^3-2x^2 & x^2+\frac{1}{2}x-4 \\ \hline & \frac{1}{2}x^2-3x & \\ -&\frac{1}{2}x^2-x & \\ \hline & -4x-8 & \\ & 4x+8 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

(2) Wählen wir $t \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$\begin{aligned}-8t^3+4ct^2+8et+(d^2-4ce) &= -8t^3+4(-5)t^2+8\cdot 3t+((-2)^2-4(-5)3)\\ &= -8t^3-20t^2+24t+64 = -8(t^3+\frac{5}{2}t^2-3t-8)=0.\end{aligned}$$

Damit können wir $t = -2$ nehmen. Wählen wir nun eine zweite Wurzel w von $2t - c = -4 + 5 = 1$. Also, $w = \pm 1$. Bestimmen wir z derart, dass

$$z^2 + t = w\left(z - \frac{d}{2(2t - c)}\right).$$

Folglich:

$$z^2 - 2 = \pm\left(z - \frac{-2}{2}\right) = \pm(z + 1).$$

Die erste Gleichung $z^2 - z - 3 = 0$ ergibt $z_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Die zweite Gleichung $z^2 + z - 1 = 0$ ergibt $z_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Damit sind $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ und $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ die Nullstellen des Polynoms $f(X)$.

Aufgabe 8

(1) Lösen Sie das Gleichungssystem in $\mathbb{C}$. Benutzen Sie dazu ein Hilfspolynom drittes Grades.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -12 \\ z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2 \end{cases}$$

(2) Finden Sie a, b, c in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ so, dass a, b und c die Nullstellen des Polynoms $X^3 + aX^2 + bX + c$ sind.

Lösung zu Aufgabe 8:

(1) Nehmen wir an, dass z_1, z_2, z_3 die Nullstellen eines Polynoms sind, und bestimmen wir dieses Polynom:

$$X^3 + bX^2 + cX + d = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) =$$

$$X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)X - z_1z_2z_3.$$

Also:

$$\begin{cases} b = -(z_1 + z_2 + z_3) \\ c = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 \\ d = -z_1z_2z_3. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $b = 0$, $d = -2$ und $c = 6$, da

$$0 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3).$$

Also ist $X^3 + 6X - 2$ das gesuchte Polynom. Bestimmen wir jetzt die Diskriminante:

$$\Delta = -4c^3 - 27d^2 = -4 \cdot 6^3 - 27(-2)^2 = -27 \cdot 36.$$

Somit $-\frac{\Delta}{27} = 36$ und $w = 6$, $t_1 = \frac{1}{2}(-d + w) = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4$. Anschließend:

$$u = \sqrt[3]{4}, v = -\frac{c}{3u} = -\frac{2}{\sqrt[3]{4}}.$$

Mit $\zeta_3 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ erhalten wir die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms $X^3 + 6X - 2$:

$$\{z_1, z_2, z_3\} = \{u + v, u\zeta + v\zeta^2, u\zeta^2 + v\zeta\}.$$

(2)

$$X^3+aX^2+bX+c=(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc.$$

Also bekommen wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a=-(a+b+c) \\ b=ab+ac+bc \\ c=-abc. \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung bekommen wir $a=-\frac{1}{b}$, aus der ersten $c=-2a-b=\frac{2}{b}-b$, und die zweite Gleichung ergibt:

$$b=-\frac{1}{b}b-\frac{1}{b}\left(\frac{2}{b}-b\right)+b\left(\frac{2}{b}-b\right).$$

Nun multiplizieren wir sie mit $b^2\neq 0$:

$$b^3+b^2+2-b^2-2b^2+b^4=0,$$

$$b^3+b^2+2-b^2-2b^2+b^4=b^4+b^3-2b^2+2=b^3(b+1)-2(b-1)(b+1)=(b+1)(b^3-2b+2).$$

Damit erhalten wir $b=-1$, $a=-\frac{1}{b}=1$, $c=-2a-b=-1$. Das Polynom b^3-2b+2 hat keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$.

http://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/schulmathematik_22/