K : Körper

Liealgebra : Vektorraum $\mathfrak{g}$,

zusammen mit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ bilinear,

$$(x, y) \longmapsto \underbrace{[x, y]}_{\text{Liklammer}}$$

für welche gilt:

$$\boxed{[x, x] = 0} \quad \Rightarrow [x, y] = -[y, x] \text{ für } x, y \in \mathfrak{g}$$

$$\boxed{[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0}$$

$\uparrow$ Jacobiidentität

für $x, y, z \in \mathfrak{g}$

Bsp $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K) := K^{n \times n}$,

zusammen mit $\underbrace{[g, h]}_{\text{Kommutatorklammer}} := \overbrace{gh - hg}^{\text{Matrixmult.}}$

für $g, h \in \mathfrak{g}$

Bsp $\mathfrak{f} = \mathfrak{sl}_n(K) := \{ g \in K^{n \times n} : \operatorname{tr}(g) = 0 \}$

$\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g}$ Teilalgebra

Bsp In $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$: $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

K : Körper

$\mathfrak{g}$: Liealgebra

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\
g &\longmapsto \underbrace{\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : x \mapsto [g, x] \right)}_{\text{kurz: } \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g) = [g, -]}
\end{aligned}
$$

ist der adjungierte Morphismus

<u>Bem</u> 1b V : VR

Sei $x \in \mathrm{End}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ nilpotent,

also $x^m = 0$ für ein $m \geqslant 0$.

Dann ist auch

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$$

nilpotent.

<u>Bew.</u> Für $m \geqslant 0$ ist für $y \in \mathfrak{gl}(V)$:

$$\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)\right)^m (y) = \sum_{i \in [0,m]} (-1)^i \binom{m}{i} x^{m-i} \circ y \circ x^i .$$

$\perp$

K : Kp.

$\mathfrak{g}$: Lie alg.

$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$: Teilraum

$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ (Teilalgebra) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$

$\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ (Ideal) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$

$\Longleftrightarrow$ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$

$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Kern}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}) = \{ z \in \mathfrak{g} : [z, \mathfrak{g}] = 0 \} \trianglelefteq \mathfrak{g}$

Zentrum von $\mathfrak{g}$

Bsp 17 $n \geq 1$

Einheitsmatrix

$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(K)) = \langle E_n \rangle$

$\supseteq$: ok

$\subseteq$: Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(K)) \subseteq K^{n \times n}$

Gezeigt : $a_{i,j} = 0$ für $i, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$.

Zz: $a_{i,i} \overset{!}{=} a_{j,j}$ für $i, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$.

K : alg. abg. Körper (z.B. $K = \mathbb{C}$)

V : endl. dim. VR

$x \in \mathrm{End}(V)$

x heißt **halbeinfach** (engl.: **semisimple**), falls x diagonalisierbar ist.

<u>Jordanzerlegung</u> (gewöhnlich)

$\exists! \, (x_{gs}, x_{gn}) \in \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V)$

gewöhnlich, semisimple

mit :
- $x = x_{gs} + x_{gn}$,

gewöhnlich, nilpotent

- $x_{gs} \circ x_{gn} = x_{gn} \circ x_{gs}$
- x_{gs} halbeinfach
- x_{gn} nilpotent

<u>Beispiel</u> :

$$\mathbb{C}^{3\times 1} \xrightarrow{x} \mathbb{C}^{3\times 1}$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} v$$

also x mit Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Dann: x_{gs} mit Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

x_{gn} mit Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

K : Kp.

$\mathfrak{g}$: Lie alg $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

$\mathfrak{g}^{(2)} = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$

$\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}^{(n+1)} := [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}] \trianglelefteq \mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}$ auflösbar $:\Longleftrightarrow \exists\, n \geq 0$ mit $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$

Bsp. $\mathfrak{g}$ abelsch $\Rightarrow \mathfrak{g}$ auflösbar

Bsp. $\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ auflösbar

Bem 27.(4) : $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{f} \trianglelefteq \mathfrak{g}$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{f}$ auflösbar $\Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{f}$ auflösbar

Bem 27.(3) $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar $\Rightarrow \mathfrak{g}$ auflösbar

K: Kp.

$\mathfrak{g}$: Lie alg.

$\mathfrak{g}^{[0]} := \mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}^{[n+1]} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{[n]}]$ für $n \geq 0$

$\mathfrak{g}$ nilpotent, falls $\mathfrak{g}^{[n]} = 0$ für ein $n \geq 0$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathfrak{g} & = & \mathfrak{g}^{[0]} & \geq & \mathfrak{g}^{[1]} & \geq & \mathfrak{g}^{[2]} & \geq & \mathfrak{g}^{[3]} & \geq & \cdots \\ \| & & \| & & \| & & \mathbin{\rotatebox{90}{$\geq$}} & & \mathbin{\rotatebox{90}{$\geq$}} & & \\ \mathfrak{g} & = & \mathfrak{g}^{(0)} & \geq & \mathfrak{g}^{(1)} & \geq & \mathfrak{g}^{(2)} & \geq & \mathfrak{g}^{(3)} & \geq & \cdots \end{array}$$

Also: $\mathfrak{g}$ nilpotent $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ auflösbar

---

Bsp $\begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotent

$\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ auflösbar, aber nicht nilpotent

K: Kp. , V: endl dim. VR

Lemma 37: Sei $\dim V \geq 1$. Sei $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$.

$\exists k : g^k = 0$

Sei jedes $g \in \mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus.

Dann gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit

$$gv = 0 \quad \text{für } g \in \mathfrak{g}.$$

"simultaner EV zum EW 0 für alle g"

Lemma 39 Sei $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{gl}(V)$. Sei $n := \dim V$.

Äquivalent sind:

(1) Es besteht $\mathfrak{f}$ aus nilpotenten Endomorphismen von V

(2) $\exists$ Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V mit

$$h(\langle v_1, \ldots, v_j \rangle) \subseteq \langle v_1, \ldots, v_{j-1} \rangle \quad \text{für } j \in [1, n] \text{ und } h \in \mathfrak{f}$$

(3) $\exists$ Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V mit

zugehörigem Isomorphismus

$$\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K),$$

der $\varphi(\mathfrak{f}) \leq \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ erfüllt.

K: alg. abg. Kp. mit $\mathrm{char}(K) = 0$. z.B. $K = \mathbb{C}$

V: endl. dim. VR

Lemma 4.1 Sei $\dim V \geq 1$.

Sei $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$ eine auflösbare Teilalgebra.

Dann gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$

und eine lineare Abb. $\lambda : \mathfrak{g} \to K$

mit $g(v) = \lambda(g) \cdot v$ für $g \in \mathfrak{g}$.

Bew. Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$.

IA: $\dim \mathfrak{g} = 0$: ok.

IS: Sei $\dim \mathfrak{g} \geq 1$.

Haben gefunden:

Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ mit $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = 1$,

lineare Abb. $\mu : \mathfrak{a} \to K$ mit $\hat{v} \in V \setminus \{0\}$ und

$$a(\hat{v}) = \mu(a) \cdot \hat{v} \quad \text{für } a \in \mathfrak{a}.$$

Weiter im Beweis!

K : alg. abg. Kp. mit $\mathrm{char}(K) = 0$

Satz 43 (Lie)

$\mathfrak{g}$: endl. dim. Liealgebra, $n := \dim \mathfrak{g}$

Äquivalent sind:

(1) $\mathfrak{g}$ auflösbar

(2) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ auflösbar

(3) $\exists$ Basis $(g_1, \ldots, g_n)$ von $\mathfrak{g}$ derart, daß die zugehörige Isom.

$$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$$

erfüllt: $\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}) \leq \mathfrak{gl}_n^{\geq}(K)$

obere Dreiecks-matrizen

K: alg. abg., $\operatorname{char} K = 0$

Lemma 48

V: endl. dim VR

$A \subseteq B \subseteq \mathfrak{gl}(V)$: Teilräume

$N := \{ g \in \mathfrak{gl}(V) : [g, B] \subseteq A \}$

Sei $x \in N$ gegeben.

Ist $\operatorname{tr}(x \circ w) = 0$ für $w \in N$,

dann ist x ein nilpotenter Endomorphismus.

Aufgabe 22 (kommt noch)

$\mathfrak{g}$: endl dim. Liealg

$\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$

(1) $\mathfrak{h}$ h.e. $\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$

(2) $\mathfrak{g}$ h.e. $\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$

(3) $\mathfrak{g}$ h.e., $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$

zu zeigen ohne Verwendung von L53

K : alg. abg. Kp. und char $K = 0$

$\mathfrak{g}$: endl. dim. Liealg.

<u>Lemma 5.3</u>

Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

(1) Es gibt eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$$

mit $\mathfrak{g}_i \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_i$ einfach für $i \in [1, m]$.

Diese ist b.a. Reihenfolge eindeutig

(2) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$

Es gibt $A \subseteq [1, m]$ mit $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{g}_i$.

Es sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ halbeinfach.

<u>Bew</u>

(1), Existenz : ok

(2) : ok

(1), Eindeutigkeit !

K: Kp.

$\mathfrak{g}$: Liealgebra

Ein $\mathfrak{g}$-Modul $(M, \varphi) \overset{\text{kurz}}{=:} M$ besteht aus:

$$\begin{cases} M: & \text{Vektorraum} \\ \varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M): & \text{Operationsmorphismus} \end{cases}$$

Kurz: $(\varphi(g))(m) =: [g, m]$

„gemischte Lieklammer"

M, N: $\mathfrak{g}$-Moduln

$f: M \to N$ linear

f heißt $\mathfrak{g}$-linear, falls

$$f([g, m]) = [g, f(m)]$$

für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$.

Bsp:

$M = \mathfrak{g}$

$\varphi = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$

Dann: „gemischte Lieklammer" $=$ Lieklammer

K : alg. abg., char $K = 0$

$\mathfrak{g}$: endl. dim. halbeinfache Lie-alg.

$M = (M, \varphi)$: endl. dim. $\mathfrak{g}$-Modul

$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$

$\mathfrak{g} = (\operatorname{Kern} \varphi) \oplus \mathfrak{f}$: Zerlegung in Ideale

$$C_\varphi := C_{\varphi|_\mathfrak{f},\, \kappa_{\mathfrak{f},\, \overbrace{\varphi|_\mathfrak{f}}^{\text{inj.}}}} : M \to M$$

$\underbrace{\kappa_{\mathfrak{f}, \varphi|_\mathfrak{f}}}_{\text{nichtausgeartet}}$

$$\kappa_{\mathfrak{f}, \varphi|_\mathfrak{f}}(h, k) \quad (h, k \in \mathfrak{f})$$
$$= \operatorname{tr}(\varphi|_\mathfrak{f}(h) \circ \varphi|_\mathfrak{f}(k))$$
$$= \operatorname{tr}(\varphi(h) \circ \varphi(k))$$

Casimir-Element

$\mathfrak{f}$ habe Basis $(x_1, \dots, x_e)$

und dazu bzgl. $\kappa_{\mathfrak{f}, \varphi|_\mathfrak{f}}$ duale Basis

$$(y_1, \dots, y_e)$$

$$\Rightarrow \quad C_\varphi := \sum_{i \in [1,e]} \underbrace{\varphi(x_i)}_{M \to M} \circ \underbrace{\varphi(y_i)}_{M \to M} : M \to M$$

Wissen : C_φ ist $\mathfrak{f}$-linear ; cf L63.

K: alg. abg. Kp. mit $\mathrm{char}(K) = 0$

Satz 68 (Weyl)

$\mathfrak{g}$: halbeinfache endl. dim. Liealgebra

$M = (M, \varphi)$: endl. dim $\mathfrak{g}$-Modul

Dann ist M halbeinfach.

Bew.: Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul

Wir haben einen Teilmodul $M'' \subseteq M$ zu finden mit

$$M \overset{!}{=} M' \oplus M''$$

Beh. Dies funktioniert, wenn $\dim(M) = 1 + \dim(M')$. ✓

Allg. Fall: O.E. $\dim(M') \geq 1$

lin. Abb. von M nach M'

Betrachte $\mathfrak{g}$-Modul $\mathrm{Hom}(M, M')$.

Dann: für $f \in \mathrm{Hom}(M, M')$ und $g \in \mathfrak{g}$ ist

$[g, f] \in \mathrm{Hom}(M, M')$ definiert durch

$$[g,f](m) := [g, f(m)] - f([g,m])$$

für $m \in M$.

Teilmoduln:

$\mathrm{Hom}(M, M')$

$\cup|$

$H := \{ f \in \mathrm{Hom}(M, M') : f|_{M'} = \mu \, \mathrm{id}_{M'} \text{ für ein } \mu \in K \}$ ($\mathrm{id}_{M'}: M' \to M'$)

$\cup|$

$H' := \{ f \in \mathrm{Hom}(M, M') : f|_{M'} = 0 \}$

Fortsetzen!

K: alg. abg. Kp. mit $\operatorname{char}(K) = 0$

$\mathfrak{g}$: halbeinf. endl.dim. Liealgebra

Sei $g \in \mathfrak{g}$.

abstrakt semisimple

abstrakt nilpotent

$\exists! \, (g_{as}, g_{an}) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ mit:

abstrakte Jordanzerlegung

- $g = g_{as} + g_{an}$
- $[g_{as}, g_{an}] = 0$
- $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{as})$ halbeinfach
- $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{an})$ nilpotent

Dabei: $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{as}) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g)_s$

$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{an}) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g)_n$

$\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, V endl. dim VR

h.e.

$\Rightarrow$ Für $g \in \mathfrak{g}$ gilt

$g_{as} = g_s$

$g_{an} = g_n$

K: alg. abg. Kp. mit $\mathrm{char}(K) = 0$

$$(e, f, h) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right):$$

Basis von $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(K)$

$V = (V, \varphi)$: endl. dim $\mathfrak{g}$-Modul

$\gamma(V)$: Gewichte = Eigenwerte von $\varphi(h)$

$$V_\lambda = \left\{\begin{array}{l}\text{Gewichtsraum} \\ \text{zum Gewicht } \lambda\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}\text{Eigenraum von } \varphi(h) \\ \text{zum EW } \lambda\end{array}\right.$$

d.h.: $\mu + 2 \notin \gamma(V)$

Bem 7.8: $\mu \in \gamma(V)$ max. Gewicht

$w_0 \in V_\mu$

$$w_k := \frac{1}{k!}\, \varphi(f)^k (w_0) \in V_{\mu - 2k}$$

Dann:

$$[h, w_k] = (\mu - 2k)\, w_k$$
$$[e, w_k] = (\mu - k + 1)\, w_{k-1} \leftarrow w_{-1} := 0$$
$$[f, w_k] = (k+1)\, w_{k+1}$$

Analyse

Synthese

Bem 7.9 Sei $l \geq 0$.

Konstruktion eines einfachen $\mathfrak{g}$-Moduls V_{l+1} mit Basis $(v_0, \dots, v_l)$ und

$$[h, v_k] = (l - 2k)\, v_k$$
$$[e, v_k] = (l - k + 1)\, v_{k-1} \quad \left\{\begin{array}{l} v_{-1} := 0, \\ v_{l+1} := 0 \end{array}\right.$$
$$[f, v_k] = (k+1)\, v_{k+1}$$

K: alg. abg. Kp. mit $\operatorname{char}(K) = 0$

$\mathfrak{g}$: endl. dim. Liealgebra

$\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$ Torus, falls $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} t$ halbeinfach für alle $t \in \mathfrak{t}$

$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

Bsp $\mathfrak{t} := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathfrak{sl}_3(K)$

ist ein Torus

- Jeder Torus ist abelsch, i.e. $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$
- ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, dann ist $\mathfrak{t}$ maximal

K: alg. abg. Kp. und $\operatorname{char}(K) = 0$

Lemma 90

$\mathfrak{g}$: halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra und $\mathfrak{g} \neq 0$

$\mathfrak{t} \le \mathfrak{g}$: Torus

also $\mathfrak{g} = \underset{\mathfrak{t}}{\cancel{\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\alpha$ dieserfalls

(1) $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \iff 0 \neq \mathfrak{t} \le \mathfrak{g}$ max. Torus

(2) ist $\mathfrak{t} \le \mathfrak{g}$ max. Torus, dann ist $\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ nichtausgeartet

Bew. Sei $\mathfrak{t} \le \mathfrak{g}$ max. Torus.

Zz: $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \overset{!}{=} \mathfrak{t} \overset{!}{\neq} 0$ und $\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ nichtausg. !

Schreiben: $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$.

Wissen:

- $\mathfrak{z} \ge \mathfrak{t}$
- $c \in \mathfrak{z} \overset{\text{Schritt 1}}{\Longrightarrow} c_{as} \in \mathfrak{z},\ c_{an} \in \mathfrak{z}$

K: alg. abg. Kp. mit $\mathrm{char}(K) = 0$

$\mathfrak{g}$: halbeinfache endl. dim. Lieg. $\mathfrak{g} \neq 0$

$\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$: maximaler Torus

Haben:
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow[\sim]{\Sigma} & \mathfrak{t}^* \\ t & \longmapsto & \kappa_{\mathfrak{g}}(t, -)\big|_{\mathfrak{t}} \end{array}$$

Also:
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow[\sim]{\Sigma} & \mathfrak{t}^* \\ & & \cup \\ \cup & & \Phi(\mathfrak{g}) \\ & & \cup \\ t_\chi & \longmapsto & \chi \end{array}$$

Dann: $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\chi, t) = \chi(t)$ für $t \in \mathfrak{t}$

K: alg. abg. Kp. mit $\mathrm{char}(K) = 0$

$\mathfrak{g}$: endl.dim. halbeinfache Liealgebra mit $\mathfrak{g} \neq 0$.

$\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$: max. Torus

Lemma 10.1

$\sigma, \rho \in \Phi(\mathfrak{g})$

$t'_\rho = 2\,\rho(t_\rho)^{-1}\, t_\rho\,, \quad \rho(t'_\rho) = 2\,,$

$\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\rho, t_\rho) = \rho(t_\rho)$

(1) Es liegt

$$\sigma(t'_\rho) = \kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma, t'_\rho) = 2\,\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma, t_\rho)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\rho, t_\rho)}$$

in $\mathbb{Z}$.

(2) Es ist $\sigma - \sigma(t'_\rho)\,\rho \in \Phi(\mathfrak{g})$

$K = \mathbb{C}$

„$\mathfrak{t}$ reell gemacht“

$\mathfrak{g}$: endl. dim. h.e. Liealgebra

$\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$: max Torus, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := {}_{\mathbb{R}}\langle t_\chi : \chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \rangle$

Davon das **Wurzelsystem**:

$0 \notin t_{\Phi(\mathfrak{g})} = \{ t_\chi : \chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \} \subseteq \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$, endliche Teilmenge

Pos. def. symm. Bilinearform $\leftarrow$ aka Skalarprodukt

$$\kappa_{\mathfrak{g}} \Big|^{\mathbb{R}}_{\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}} : \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(1) ${}_{\mathbb{R}}\langle t_{\Phi(\mathfrak{g})} \rangle = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$

(2) Für $r \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ ist

$$\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot r \in t_{\Phi(\mathfrak{g})} \} = \{-1, +1\}$$

(3) Für $r, s \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ ist $2 \dfrac{\kappa_{\mathfrak{g}}(r,s)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(s,s)} \in \mathbb{Z}$

(4) Für $r, s \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ ist

$$r - 2 \frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(r,s)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(s,s)} \cdot s \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$$

$\mathbb{E} = (E, \lfloor \cdot, \cdot \rfloor)$: euklidischer Raum

$\Phi \subseteq E$: Wurzelsystem

Für $x \in E \setminus \{0\}$:

$$2 \frac{\lfloor y, x \rfloor}{\lfloor x, x \rfloor} =: \lfloor y, x \rceil$$

verwirrende Form

$$w_x : E \longrightarrow E$$

$$y \longmapsto y - \lfloor y, x \rceil x$$

Weylgruppe $W_{E,\Phi} := \langle\langle w_r : r \in \Phi \rangle\rangle$

(E', Φ'), (E'', Φ'') Wurzelsysteme.

Isomorphismus von (E', Φ') nach (E'', Φ''):

- $E' \xrightarrow[\sim]{\varphi} E''$ bijektive lineare Abb.
- $\varphi(\Phi') = \Phi''$
- $\lfloor \varphi(r'), \varphi(s') \rceil = \lfloor r', s' \rceil$ für $r', s' \in \Phi'$

$\mathbb{E} = (E, [\cdot,\cdot])$: eukl. Raum

$\Phi \subseteq \mathbb{E}$: Wurzelsystem

<u>Bem 123</u>: $r, s \in \Phi$, $r \notin \{-s, +s\}$

(1) $[r,s] > 0 \Rightarrow r - s \in \Phi$

(2) $[r,s] < 0 \Rightarrow r + s \in \Phi$

<u>Bem 127</u>:

$(x_1, \dots, x_\ell)$ Basis von E

$\Rightarrow \bigcap_{i \in [1,\ell]} E_{x_i,>} \neq \emptyset$

$\Pi \subseteq E$, $x \in E \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \Pi_{x,>} := \{u \in \Pi : [x,u] > 0\}$

<u>Bem 128</u>:

$x \in E \setminus \{0\}$

$\Pi \subseteq E_{x,>}$ mit: $[u,v] \leq 0$ für $u, v \in \Pi$ mit $u \neq v$

Dann ist Π linear unabhängig

(E, Φ) : Wurzelsystem

$\Delta \subseteq \Phi$ heißt **Basis** des Wurzelsystems, falls:

- Δ ist $\mathbb{R}$-lineare Basis von E
- $\Phi = \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-$

$$\Phi_\Delta^+ := \Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta} \zeta_\alpha \alpha : \zeta_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ für } \alpha \in \Delta \Big\} \cap \Phi$$

$$\Phi_\Delta^- := \Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta} \zeta_\alpha \alpha : \zeta_\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \text{ für } \alpha \in \Delta \Big\} \cap \Phi$$

Lemma 133 : $x \in E$ regulär für Φ

$\Rightarrow$ $\Phi_{x,>}^{\text{unz}}$ ist Basis

Lemma 136 : Δ Basis von (E, Φ)

$\Rightarrow$ $\exists\, x \in E$ regulär für Φ

mit $\Delta = \Phi_{x,>}^{\text{unz}}$

$$q = q_{\Phi,\Delta} := \frac{1}{2} \sum_{r \in \Phi_\Delta^+} r$$

(E, Φ) : Wurzelsystem

Δ : Basis von (E, Φ)

Satz 144 (Basensymmetrie)

$W_\Delta := \langle\langle w_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle\rangle$

$W_{E,\Phi} := \langle\langle w_r : r \in \Phi \rangle\rangle$

Cf. (3)

(1) Sei Δ' eine Basis von (E, Φ)

$\Rightarrow \exists\, w \in W_\Delta$ mit $w(\Delta) = \Delta'$

(2) Sei $r \in \Phi$.

Es gibt eine Basis Δ' von (E, Φ) mit $r \in \Delta'$

Es gibt ein $w \in W_\Delta$ mit $w(r) \in \Delta$

(3) $W_\Delta = W_{E,\Phi}$

(4) Für $w \in W_{E,\Phi}$ gilt:

$w(\Delta) = \Delta \iff w = id_E$.

(E, Φ): Wurzelsystem

Δ : Basis von (E, Φ)

$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$

Cartan-Matrix

$C = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{i,j} \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$

- bis auf Konjugation mit Permutationsmatrix unabhängig von Wahl von Δ
- Einträge in $[-3, +3]$
- $\det(C) \neq 0$

Lemma 149 Zwei WS mit (b.a. Perm.) gleichen Cartanmatrizen sind bereits isomorph

Neu: graphische Umsetzung der Cartanmatrix

Lemma 121 : $r, s \in \Phi$ mit $\|r\| \leq \|s\|$

$\Rightarrow (\langle r,s \rangle, \langle s,r \rangle) \in \{(0,0), (1,1), (1,2), (1,3), (-1,-1), (-1,-2), (-1,-3)\}$

27

Zusammenfassung von § 5-8 :

(E,Φ) : WS

(Δ,ρ,T) : zugehöriger Dynkingraph

D 155

$[E,\Phi]$ einfach $\iff$ $[\Delta,\rho,T]$ zusammenhängend

①

Bem 158 : (E,Φ) nicht einfach $\iff$ $\Phi = \Phi' \sqcup \Phi''$ mit $\Phi' \perp \Phi''$ existiert wobei $\Phi', \Phi'' \neq \emptyset$

Bem 159 : (E,Φ) hat eine (b.a. Perm.) eindeutige orthogonale Zerlegung in einfache Wurzelsysteme, genannt Komponentenzerlegung.

Bem 160 : Man kann umgekehrt auch eine orthogonale Summe von Wurzelsystemen bilden

---

Bem 161 : (E,Φ) ist via orthogonaler Summe aus seiner Komponentenzerlegung rekonstruierbar.

②

Also: es genügt, einfache Wurzelsysteme zu klassifizieren.

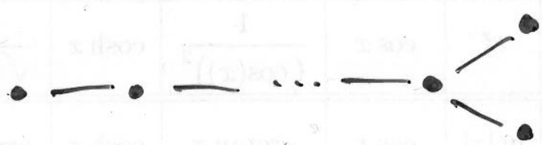
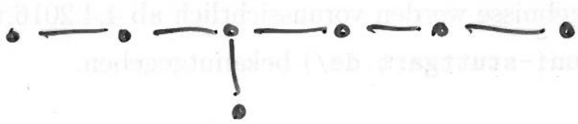
---

① : prüfungsrelevant

② : nicht prüfungsrelevant

Satz 162:

- Jede Dynkinklasse eines einfachen WS tritt genau einmal in der folgenden Liste auf.
- Jede in der folgenden Liste auftretende Isoklasse teilgerichteter Graphen ist die Dynkinklasse eines einfachen WS

Name	Knotenzahl	Isokl. teilg. Graphen
A_ℓ,	$\ell \geq 1$	
B_ℓ,	$\ell \geq 2$	
C_ℓ,	$\ell \geq 3$,	
D_ℓ,	$\ell \geq 4$,	
E_6,	$\ell = 6$,	
E_7,	$\ell = 7$,	
E_8,	$\ell = 8$,	
F_4,	$\ell = 4$	
G_2,	$\ell = 2$