Liealgebren, SoSe 19

Blatt 8

Aufgabe 29 (6 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ endlichdimensionale halbeinfache Liealgebren. Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren. Sei $g \in \mathfrak{g}$.
Man zeige $\varphi(g)_{\mathrm{as}} = \varphi(g_{\mathrm{as}})$ und $\varphi(g)_{\mathrm{an}} = \varphi(g_{\mathrm{an}})$.

Aufgabe 30 (10 Punkte) Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Sei $b := \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \in K^{5\times 5}$.
Man zeige, daß $\mathfrak{o}(K, b)$ einfach ist; cf. Aufgabe 1.(2).

Aufgabe 32 (4+2 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei M ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul.

(1) Sei $\mu \in \gamma(M) \subseteq K$ ein maximales Gewicht.

Sei $m_0 \in M_\mu$. Setze $m_k := k!^{-1}(\varphi(f))^k(m_0)$ für $k \geqslant 1$ und $m_{-1} := 0$. Wir verwenden die Bezeichnungen von §3.5, insbesondere von Bemerkung 78.

Man zeige, daß $[h, m_k] = (\mu - 2k)m_k$ ist, daß $[e, m_k] = (\mu - k + 1)m_{k-1}$ ist und daß $[f, m_k] = (k+1)m_{k+1}$ ist für $k \geqslant 0$.

(2) Sei M einfach. Sei $\lambda \in K$. Sind λ und $\lambda + 2$ in $\gamma(M)$, so zeige man $[e, M_\lambda] = M_{\lambda+2}$.

Aufgabe 33 (6 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.
Wir schreiben $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(K)$.
Man zerlege folgende $\mathfrak{g}$-Moduln jeweils in eine direkte Summe von Teilmoduln isomorph zu den in Bemerkung 79 konstruierten. Man bestimme die Gewichtsräume.

(1) Man betrachte den via $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(K)$ gegebenen $\mathfrak{g}$-Modul $K^{2\times 1}$.

(2) Man betrachte den regulären $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{g}$.

(3) Es ist $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{sl}_3(K)$, $\begin{pmatrix} a&b \\ c&d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a&b&0 \\ c&d&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$. Man betrachte den Modul $M := \mathfrak{sl}_3(K)|_{\mathfrak{g}}$.